UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci29fran

7330

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

GUILLET, *secrétaire*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

36016 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1904 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIX. — ANNÉE 1905

(XXXIXe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179873
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

QA
1
B8
v. 40

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GRAY, Prof. of Physics and MATHEWS, Prof. of Mathematics in University College of North Wales. — A TREATISE ON BESSEL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS TO PHYSICS. 1 vol. de 292 pages. Londres, Macmillan.

La partie théorique de ce traité occupe exactement les cent premières pages; les applications, les cent quarante suivantes; des Tables numériques et une liste bibliographique, les quarante-huit dernières pages.

Les auteurs ont réussi, autant que j'en ai pu juger, à réunir des questions réellement importantes de Physique se rattachant aux fonctions de Bessel et à pousser assez loin leur solution pour que la signification physique des calculs apparaisse et que des déterminations numériques soient possibles.

Au point de vue de la théorie des fonctions cylindriques, il y a un intérêt évident à voir quelles sont, parmi les propriétés de ces fonctions, celles dont l'application se présente le plus naturellement ou qui se prêtent le mieux aux calculs numériques. En particulier, on apercevra l'importance des développements semi-

convergents et des valeurs asymptotiques et l'on verra aussi avec plaisir des illustrations comme celles qui s'offrent dans la théorie de la diffraction.

1. *Introduction.* — L'équation différentielle qui sert à définir les fonctions cylindriques s'est présentée dans un problème traité par Bernoulli et par Euler sur les oscillations d'une chaîne homogène, puis dans l'étude faite par Fourier du mouvement de la chaleur dans un cylindre.

Bessel fut conduit à la découverte des fonctions qui portent son nom en partant de l'équation

$$\varphi - e \sin \varphi = \mu,$$

et en cherchant à déterminer, par une équation différentielle, les coefficients A_r du développement

$$\varphi - \mu = \sum A_r \sin r\mu.$$

2. *Intégration de l'équation différentielle.* — On appellera ici *fonction de Bessel*, ou encore *fonction cylindrique*, une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

où n désigne une constante.

On trouve de suite comme solution, par la méthode des coefficients indéterminés, la série

$$x^n \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right),$$

et une autre qui se déduit de la première par le changement de n en $-n$.

On reconnaît, comme le faisait prévoir la théorie des équations différentielles linéaires, qu'il y a lieu de traiter à part le cas où n est nul ou entier.

Si n n'est ni nul, ni entier, on peut prendre comme intégrales

$$J_n(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}\,\Pi(s)\,\Pi(n+s)}$$

[$\Pi(s)$ désignant la fonction de Gauss qui se réduit, dans le cas de s entier, au produit $1.2\ldots s$] et la fonction $J_{-n}(x)$ qu'on déduit de la précédente en y changeant n en $-n$.

Si n est entier et positif, la fonction J_{-n} n'est plus définie; il y aura avantage à adopter la définition

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n \text{ entier}).$$

Mais, pour avoir une seconde intégrale de l'équation différentielle, des recherches nouvelles ont été nécessaires; on prend le plus souvent, pour la seconde intégrale, une fonction $Y_n(x)$ qui a été trouvée par C. Neumann et qui est de la forme

$$Y_n = J_n \log x + u,$$

u étant une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x qui ne contient qu'un nombre limité de puissances négatives et qui devient infinie comme x^{-n}.

En particulier, on a, les exposants négatifs disparaissant pour $n = 0$,

$$Y_0 = \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \ldots\right)\log x + \frac{x^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2^2.4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} - \ldots.$$

Les auteurs donnent les propriétés les plus simples des fonctions J_n et Y_n; je citerai seulement le fait que J_n et Y_n sont des solutions des équations fonctionnelles

$$C'_n = \frac{n}{x} C_n - C_{n+1},$$

$$C_{n-1} - \frac{2n}{x} C_n + C_{n+1} = 0,$$

qui pourraient servir de point de départ à une définition des fonctions cylindriques.

3. *Développements en séries de fonctions de Bessel.* — Ces développements peuvent être rattachés au résultat suivant, facile à vérifier,

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n.$$

Si dans cette identité on pose $t = e^{i\varphi}$ et si l'on change ensuite φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on trouve

$$\cos(x\cos\varphi) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi - \ldots$$
$$\sin(x\cos\varphi) = 2J_1(x)\cos\varphi - 2J_3(x)\cos 3\varphi + 2J_5(x)\cos 5\varphi - \ldots$$

En ordonnant les deux membres de ces identités suivant les puissances de $\cos\varphi$ et en égalant les coefficients de $\cos^n\varphi$, on obtient le développement de x^n suivant les fonctions $J_s(x)$ et ceci permet de passer du développement d'une fonction $f(x)$ en série entière au développement de la même fonction en série ordonnée suivant les fonctions de Bessel.

L'identité

$$e^{\frac{u}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \times e^{\frac{v}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum J_n(u+v)$$

conduit au théorème d'addition

$$J_n(u+v) = \sum_0^n J_s(u)J_{n-s}(v) + \sum_1^\infty (-1)^s\left[J_s(u)J_{n+s}(v) + J_{n+s}(u)J_s(v)\right]$$

qui a de nombreuses applications.

Enfin, sous des conditions qui sont précisées, on a le développement

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 J(x) + a_2 J(2x) + \ldots + a_n J(nx) + \ldots,$$

où l'on a écrit, pour abréger, $J(x)$ au lieu de $J_0(x)$ et où, pour $n > 0$, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u\cos nu\left(\int_0^1 \frac{f(u\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)du,$$

a_0 ayant une expression analogue.

4. *Développements semi-convergents.* — Les séries de puissances obtenues pour J_n et pour $Y_n - J_n \log x$ sont convergentes pour toute valeur finie de x; mais elles deviennent pratiquement inutilisables dans les calculs numériques dès que x est assez

grand. On se sert alors de développements de la forme

$$J_n = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(P \sin x - Q \cos x),$$

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(R \sin x - S \cos x),$$

où P, Q, R, S sont des séries, en général infinies, procédant suivant les puissances descendantes de x. Ces séries sont divergentes; mais, quand x est très grand, en prenant un nombre convenable de termes, on a des valeurs approchées pour J_n et pour Y_n, le sens et l'ordre de l'approximation résultant de l'analyse qui conduit à ces séries.

On déduit de là les valeurs asymptotiques

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4} - x\right),$$

$$Y_n(x) \sim (\log 2 - \gamma) J_n - \frac{\pi}{2} J_{n-1},$$

γ désignant la constante d'Euler ($\log 2 - \gamma = 0,11593\ldots$).

La méthode suivie ici pour obtenir ces valeurs asymptotiques est une méthode de Stokes qui peut s'appliquer à d'autres fonctions utiles dans les applications. Elle donne, pour J_n et Y_n des résultats exacts et en termes finis quand n est la moitié d'un nombre impair.

Une Table insérée à la fin du Chapitre donne les valeurs de $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_n(x)$ pour $2n = 1, 3, \ldots, 11; -1, -3, \ldots, -11$.

5. *Les zéros des fonctions de Bessel.* — $J_n(x)$ a au moins une racine entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$, k étant un entier positif ou nul; les racines négatives sont égales et de signes contraires aux racines positives. En général J_{n+1} a au moins une racine entre deux racines consécutives de J_n.

On indique ici pour le calcul des racines de $J_0(x)$ une méthode de Stokes qui s'appuie sur les développements semi-convergents et pour le calcul des racines de $J_n(x)$ une formule du Professeur Mac Mahon.

6. *Développements de Fourier-Bessel.* — Ces développements s'établissent à l'aide du théorème suivant :

a désignant une constante, on a

$$\int_0^a J_n(\lambda r) J_n(\lambda' r) r\,dr = 0,$$

quand λ *et* λ' *sont deux racines distinctes de* $J_n(ax)$ *ou de* $J_n'(ax)$ *ou de* $AxJ_n'(ax) + BJ_n(ax)$, *les coefficients* A *et* B *étant indépendants de* x.

Une application importante de ce théorème se présente à propos de la propagation de la chaleur dans un cylindre. On suppose le cylindre limité par les surfaces $r = 1$, $z = 0$, $z = \infty$, la surface latérale en contact avec un milieu à la température zéro, tous les points de la base maintenus à une température fixe et l'état permanent établi.

La température en un point du cylindre est donnée par la formule

$$u = \sum\sum (A\cos n\theta + B\sin n\theta) J_n(\lambda r) e^{-\lambda z},$$

n prenant toutes les valeurs entières positives ou nulles et λ parcourant toutes les racines de chacune des fonctions $J_n(x)$, pourvu que la température fixe maintenue au point (r, θ) de la base soit définie par

$$u = \sum\sum (A\cos n\theta + B\sin n\theta) J_n(\lambda r).$$

On est conduit à se demander si une fonction quelconque de r et de θ admet un développement de cette forme. Si l'on admet la possibilité de ce développement, le calcul des coefficients se fait à l'aide du théorème précédent; il est analogue à celui des coefficients du développement d'une fonction en série trigonométrique. Mais la discussion par laquelle on établit la légitimité du développement de Fourier-Bessel est longue et délicate; les auteurs renvoient pour le détail de cette discussion au livre de Heine sur les fonctions sphériques et à d'autres Mémoires.

7. *Variables complexes.* — La théorie des fonctions d'une variable complexe permet de trouver ou d'illustrer un grand

nombre de propriétés des fonctions de Bessel. On en donne des exemples intéressants, en supposant pour simplifier $n + \frac{1}{2}$ réel et positif et, pour commencer, la partie réelle de x positive.

Un calcul direct montre que l'intégrale

$$u = x^n \int_\alpha^\beta e^{xz}(1 - z^2)^{n - \frac{1}{2}} dz$$

est une solution de l'équation de Bessel si α et β sont pris dans les nombres -1, $+1$, $k + \infty i$ (k réel et fini). En choisissant de manières différentes les limites et le chemin d'intégration, on obtient des intégrales différentes de l'équation de Bessel, en particulier une intégrale considérée par Hankel, et qui peut avec avantage, dans certains cas, remplacer l'intégrale désignée plus haut par Y_n.

Dans le cas où x est purement imaginaire, $x = it$, l'équation de Bessel devient

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \left(1 + \frac{n^2}{t^2}\right) y = 0.$$

Si n n'est pas entier, on peut prendre comme solutions fondamentales

$$I_n(t) = i^{-n} J_n(it),$$
$$I_{-n}(t) = i^n J_{-n}(it).$$

Si n est entier, on joint à $I_n(t)$ la fonction

$$K_n(t) = \frac{2^n \sqrt{\pi}}{\Pi\left(-\frac{1}{2} - n\right)} \cdot t^{-n} \int_0^\infty \frac{\cos(t \sinh \varphi)}{\cosh^{2n} \varphi} d\varphi.$$

I_n vérifie des relations analogues à celles qui ont été données pour J_n, et K_n vérifie des relations identiques à des relations vérifiées par I_n.

8. *Intégrales définies contenant des fonctions de Bessel.* — Des résultats établis par Weber et utiles dans les applications sont rattachés à la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

où a et b désignent des constantes, puis on démontre un théorème analogue au théorème de Fourier et qui permet de représenter une fonction donnée par une intégrale double portant sur des fonctions de Bessel.

9. *Relations des fonctions de Bessel avec les fonctions sphériques.* — Les notations étant celles de Heine, on démontre que, n devenant infini, on a

$$\operatorname{Lim} P_n\left(\cos\frac{x}{n}\right) = J_0(x), \qquad \operatorname{Lim} Q_n\left(\cosh\frac{x}{n}\right) = K_0(x),$$

et des relations analogues pour J_s, K_s, I_s, Y_s. D'après ces relations, à tout théorème sur les fonctions sphériques, on peut faire correspondre un théorème sur les fonctions de Bessel.

10. *Vibrations des membranes.* — On passe maintenant aux applications de la théorie précédente. L'une des plus simples se présente à propos des vibrations transversales d'une membrane plane et circulaire.

On suppose cette membrane maintenue dans un état de tension uniforme au moyen d'une contrainte convenable exercée le long du cercle limite. Il s'agit de trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right);$$

les conditions aux limites sont les suivantes : pour $t = 0$, z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ doivent se réduire à des fonctions données de r et de θ et l'on a constamment $z = 0$ pour tous les points du cercle limite.

Si l'on pose

$$z = v\cos n\theta\cos pt,$$

p désignant une constante, n un nombre entier et positif et v une fonction de r seul, on a pour déterminer v l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)v = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{p}{c}\right).$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$v = AJ_n(\alpha r) + BY_n(\alpha r).$$

Mais la condition évidente que v doit rester fini pour $r = 0$ entraîne $B = 0$, de sorte que, pour tenir compte des conditions aux limites, on n'a à raisonner que sur les fonctions J_n. La discussion est poussée assez loin pour que les résultats puissent être calculés sur un exemple pris avec des données numériques.

11. *Questions d'Hydrodynamique.* — Les solutions de l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, analogues à celles du § 6, peuvent être interprétées en regardant φ comme un potentiel de vitesse pour un liquide incompressible limité par une surface cylindrique.

On examine d'autres problèmes d'Hydrodynamique conduisant aux fonctions de Bessel. Je citerai ceux qui me paraissent les plus intéressants en les distinguant par des lettres pour rendre la lecture plus facile.

(a). Un liquide incompressible, de densité *un*, se meut de façon que chaque élément reste dans un plan passant par Oz et que la rotation moléculaire soit égale à ω, l'axe de rotation étant pour chaque point perpendiculaire au plan qui contient sa trajectoire.

Dans ce cas, la fonction de Stokes (*current function*) [1] vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - 2\omega = 0.$$

Si l'on fait l'hypothèse simple que ω est proportionnel à r et que l'on pose $\omega = \zeta r$, on est conduit à mettre ψ sous la forme

$$\psi = \frac{1}{4}\zeta r^3 + Ar^2 + B + \rho r \cos nz,$$

n, A et B désignant des constantes et ρ une fonction de r seul; on trouve alors, pour déterminer ρ, l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \left(n^2 + \frac{1}{r^2}\right)\rho = 0,$$

dont la solution générale est

$$\rho = C_n I_1(nr) + D_n K_1(nr),$$

[1] *Voir* APPELL, *Mecanique*, t. III, p. 385.

C_n et D_n désignant les constantes qui correspondent à la valeur choisie pour n. On achève la solution en supposant que le liquide remplit l'espace compris entre les cylindres $r = a$, $r = b$ et les plans $z = \pm h$.

(*b*). Lord Kelvin a étudié les oscillations d'un tourbillon cylindrique autour d'un état de mouvement permanent, en particulier quand le mouvement permanent du liquide est un mouvement de rotation autour de Oz, dont la vitesse angulaire ω est constante.

Si l'on pose

$$\frac{dz}{dt} = w \sin mz \sin(nt - s\theta),$$

s désignant un nombre entier, m et n des constantes et w une fonction de r supposée très petite par rapport à la vitesse de l'élément correspondant, on trouve que w doit vérifier l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left\{ \frac{m^2[4\omega^2 - (n - s\omega)^2]}{(n - s\omega)^2} - \frac{s^2}{r^2} \right\} w = 0.$$

(*c*). Un autre problème instructif suggéré à Lord Kelvin par la théorie des marées est le suivant :

Un bassin circulaire contenant un liquide homogène pesant tourne avec une vitesse angulaire constante autour de la verticale qui passe par son centre; étudier les oscillations du liquide en supposant que le mouvement de chaque particule diffère très peu de ce qu'il serait si liquide et bassin tournaient ensemble comme un seul corps solide et en admettant que la vitesse est toujours la même pour les éléments d'une même verticale.

(*d*). Mouvement à deux dimensions d'un liquide visqueux.

(*e*). Effet du frottement interne d'un fluide sur le mouvement d'un pendule (analyse abrégée d'un Mémoire de Stokes).

12. *Flux permanent d'électricité dans un milieu isotrope.* — Après avoir examiné en détail le cas d'une petite électrode circulaire appliquée sur la surface d'un corps conducteur, les auteurs traitent un problème identique, au fond, au problème des anneaux de Nobili étudié pour la première fois par Riemann :

Un conducteur infini est limité par deux plans parallèles $z = \pm a$ et deux électrodes en forme de disques de rayon r_1 sont appliquées à ces plans de façon que leurs centres soient sur l'axe des z; on demande le potentiel en tout point du conducteur.

La solution doit satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{pour} \qquad -a < z < a,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = \pm a, \qquad r > r_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{S}{2\pi k r_1 \sqrt{r_1^2 - r^2}} \qquad \text{pour} \qquad z = \pm a, \qquad r < r_1,$$

S et k désignant des constantes.

On trouve une solution qui, dans le cas où les électrodes sont très petites, se réduit à

$$V = \frac{S}{2\pi k}\int_0^\infty \frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda a)} J_0(\lambda r)\, d\lambda.$$

Le problème est plus compliqué quand le conducteur, au lieu d'être infini, est limité par un cylindre d'axe Oz entouré d'un milieu isolant. Il est abordé ici, puis viennent des problèmes traités par Weber. Les auteurs renvoient à ces Mémoires de Weber en attirant l'attention sur les questions d'Analyse qui y sont traitées.

13. *Propagation d'ondes électromagnétiques le long d'un fil.* — On suppose le fil cylindrique, entouré à distance par un conducteur qui peut s'étendre à l'infini mais qui est limité du côté du fil par un cylindre de même axe que le fil, l'espace compris entre les deux conducteurs étant rempli par un milieu parfaitement isolant.

Il y a symétrie autour de l'axe du fil, on prend cet axe pour axe des x. Il suffit de considérer, pour chaque point, la valeur de x et la distance ρ à l'axe des x. La force électrique est déterminée par ses projections P et R sur Ox et sur une perpendiculaire à Ox menée dans le méridien du point; la force magnétique H est perpendiculaire à ce méridien.

On écrit les équations de Maxwell, modifiées par Hertz et

Heaviside, en appelant k la conductibilité électrique, $\varkappa$ le coefficient d'induction électrique, μ le coefficient d'induction magnétique.

En tenant compte de ce que P s'annule à l'infini dans le conducteur extérieur et reste fini sur l'axe du fil, on trouve une solution dépendant de deux indéterminées m et n :

Dans le fil

$$P = A J_1(q\rho i) e^{mx - nt\sqrt{i}};$$

Dans le diélectrique

$$P = [B J_0(p\rho i) + C Y_0(p\rho i)] e^{mx - nt\sqrt{i}};$$

Dans le conducteur extérieur

$$P = D[(\gamma - \log\rho) J_0(q\rho i) - Y_0(q\rho i)] e^{mx - nt\sqrt{i}};$$

γ est la constante d'Euler, p et q s'expriment en fonction de m, n, k, $\varkappa$, μ; A, B, C, D sont des constantes qu'on détermine en tenant compte de la continuité des composantes tangentielles dans le voisinage de la surface des conducteurs.

Dans chacun des trois cas, les valeurs de R et de H se déduisent de celles de P.

On examine en détail le cas d'un signal à vibrations peu rapides se propageant le long d'un câble de petit rayon, en suivant une analyse du Professeur J.-J. Thomson, puis le cas où des oscillations très rapides se propagent dans un câble immergé.

Passant enfin au problème des oscillations électriques, on donne la solution de Hertz pour un doublet électrique, puis pour un fil.

14. *Diffraction de la lumière* (*cas de symétrie autour de l'axe*). — Le problème considéré ici est relatif à la diffraction produite par une petite ouverture circulaire d'un plan sur lequel tombe de la lumière venant d'un point-source. On demande l'éclairement en un point P d'un écran parallèle au plan de l'ouverture.

On prend pour axe la droite allant de la source au centre de l'ouverture. Soient a la distance de la source à un point de l'ouverture, b la distance de l'écran au point le plus voisin de l'onde sphérique de rayon a, ζ la distance du point P à l'axe de symétrie, r le rayon de l'ouverture, λ la longueur d'onde de la lumière

supposée homogène. Enfin soient

$$\frac{2\pi\zeta}{\lambda b} r = z, \qquad \frac{1}{2} y = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{b^2}{\zeta^2} \frac{a+b}{2ab} x^2.$$

L'éclairement est proportionnel à l'expression

$$\frac{1}{a^2 b^2 \lambda^2} (C^2 + S^2),$$

où

$$C = \frac{b^2 \lambda^2}{2\pi\zeta^2} \int_0^z \cos\left(\frac{1}{2} y\right) J_0(x) x\, dx,$$

$$S = \frac{b^2 \lambda^2}{2\pi\zeta^2} \int_0^z \sin\left(\frac{1}{2} y\right) J_0(x) x\, dx.$$

Il y a intérêt à introduire les fonctions suivantes de Lommel

$$U_n(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^n J_n(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} J_{n+2}(z) + \ldots,$$

$$V_n(y, z) = \left(\frac{z}{y}\right)^n J_n(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2} J_{n+2}(z) + \ldots,$$

dont les propriétés simples se déduisent assez facilement de celles des fonctions de Bessel.

Avec ces ressources d'Analyse, on peut étudier dans le plus grand détail le phénomène de diffraction de Fraunhofer qui correspond au cas particulier où $y = 0$.

On a alors

$$C^2 + S^2 = \left(\frac{2}{z} J_1(z)\right)^2.$$

Les maxima d'intensité de lumière correspondent aux maxima et aux minima de $\frac{1}{z} J_1(z)$ et l'on vérifie qu'ils sont déterminés par l'équation $J_2(z) = 0$; les minima d'intensité correspondent aux zéros de $J_1(z)$.

Quand z est grand, les valeurs de z qui correspondent à un maximum d'intensité et au minimum précédent ou suivant diffèrent sensiblement de $\frac{\pi}{2}$; la lumière reçue dans un cercle correspondant à une valeur donnée de z est proportionnelle à

$$\int_0^z (C^2 + S^2) z\, dz = 2[1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)].$$

Dans le cas plus général de diffraction considéré par Fresnel, γ n'est pas nul et l'on a

$$C^2 + S^2 = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 (U_1^2 - U_2^2).$$

Les maxima et les minima d'intensité sont donnés par les racines de $J_1(z)$ et celles de $U_2(z)$.

On indique comment ces valeurs de z peuvent être obtenues numériquement. On donne, pour $\gamma = \pi, 5\pi, 9\pi$, des Tables indiquant les valeurs de $\frac{2}{\gamma} U_1$, $\frac{2}{\gamma} U_2$, $C^2 - S^2$ pour des valeurs de z prises entre 2,5 et 11,5. Des diagrammes mettent sous les yeux l'ensemble des résultats et une discussion approfondie montre les renseignements qu'on peut tirer de ces diagrammes.

Le problème relatif à un petit écran opaque est ramené au précédent. Ce sont les fonctions V_n qui interviennent là où s'étaient présentées les fonctions U_n.

Ce Chapitre, qui contient d'autres problèmes tirés d'un Mémoire de Lommel, se termine par l'étude des phénomènes qui se produisent quand la lumière passe par une fente étroite à bords parallèles. Ici s'introduisent les intégrales de Fresnel qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z\, dz, \qquad \frac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z\, dz;$$

il suffit de se reporter aux expressions de $J_{\frac{1}{2}}$ et de $J_{-\frac{1}{2}}$ pour obtenir les intégrales considérées sous la forme

$$\frac{1}{2}\int_0^z J_{-\frac{1}{2}}(z)\, dz, \qquad \frac{1}{2}\int_0^z J_{\frac{1}{2}}(z)\, dz.$$

Les intégrales de Fresnel sont donc immédiatement réductibles aux fonctions de Bessel; on démontre que leurs valeurs sont données par les sommes des deux séries

$$J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{\frac{3}{2}}(z) + J_{\frac{5}{2}}(z) - \ldots,$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{3}{2}}(z) + J_{-\frac{5}{2}}(z) - \ldots,$$

qui se calculent aisément au moyen des Tables.

15. *Applications variées.* — Ce sont des exercices accompagnés de solutions et de renvois aux Mémoires originaux qui, à cause de leur intérêt, ont été placés avant les Exercices simplement proposés au lecteur. Ceux-ci sont au nombre de 55; ils sont suivis de deux Notes dont l'une se rapporte au calcul des racines des fonctions J_n et l'autre à une fonction de Bessel qui s'évanouit à l'infini.

Six Tables numériques donnent les valeurs de J_0 et de J_1 puis de J_n pour les premières valeurs de l'indice n, les cinquante premières racines de $J_0(x)$, les valeurs de $J_0(x\sqrt{i})$, enfin les valeurs de $I_1, I_2, \ldots, I_{11}$.

Le Volume se termine par une liste d'Ouvrages qui ont été effectivement utilisés par les auteurs et par une figure représentant, à une échelle indiquée, les variations de $J_0(x)$ et de $J_1(x)$.

E. Lacour.

VIVANTI (G.). — Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations, *professées à l'Université de Messine*; traduites par *A. Boulanger*. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Il est remarquable que la théorie des groupes de transformations, qui a déjà donné lieu à tant de recherches, n'ait pas encore été exposée au public mathématique français sous une forme didactique.

Le livre que nous annonçons vient heureusement combler cette lacune. Au premier abord, une traduction française du grand Traité de Sophus Lie : *Theorie der Transformationsgruppen*, eût pu paraître d'une utilité plus urgente. Malheureusement cet Ouvrage, d'une importance si capitale, est bien long et parfois un peu prolixe : on n'y trouve point de chapitre qui ne soit en quelque sorte encadré entre son introduction et sa conclusion. Aussi serons-nous reconnaissants à M. Vivanti d'avoir su nous présenter les points fondamentaux de la théorie sans développements qui ne soient pas essentiels. Presque toute la matière des trois gros volumes de Lie-Engel se trouve condensée dans ce livre de 300 pages sans que jamais la brièveté y nuise à la précision. Nous ne saurions

donc trop en recommander la lecture à ceux qu'intéresse ce sujet. Ils se trouveront amenés sans efforts à une connaissance complète des principes et seront parfaitement préparés à la lecture des Mémoires originaux.

Afin de me conformer à l'habitude, je présenterai cependant quelques observations qui ne diminuent en rien le mérite du livre de M. Vivanti. La plus importante a trait à la considération exclusive des fonctions analytiques dans tout le cours du volume. La facilité qui en résulte pour quelques démonstrations est évidente; mais ne serait-il pas désirable d'arriver à se passer de cette restriction, qui ne semble pas être dans le fond des choses, dans un sujet aussi intimement lié que celui-là à la Géométrie et qui paraît plutôt commander l'usage des fonctions continues et dérivables? C'est un progrès analogue, quoique bien plus difficile à réaliser, qui a été réclamé et accompli par M. Hadamard pour le calcul des variations.

Une remarque moins importante est relative à la définition des groupes. M. Vivanti observe dans une note (p. 19) que tous les groupes ne contiennent pas nécessairement la transformation identique. Mais il se restreint immédiatement à l'étude de ceux qui la contiennent. Cette restriction, qui fait tout l'intérêt des transformations infinitésimales, me paraît assez essentielle pour être incorporée dans la définition même des groupes, ce qui mettrait son importance mieux en évidence. C'est ce que fait, par exemple, M. Weber dans son *Lehrbuch der Algebra*. D'après lui, un ensemble d'éléments A, B forme un groupe relativement à un mode de composition déterminé (représenté symboliquement par AB quand il est effectué sur les éléments A, B) lorsque :

1° AB fait partie de l'ensemble quels que soient A et B;

2° *L'équation symbolique* AB = C *peut toujours être résolue et d'une seule manière par rapport à* A, B *ou* C.

Bien que l'expression soit aujourd'hui classique, ne vaudrait-il pas mieux, au lieu de *transformations infinitésimales*, dire *transformations linéaires tangentes* à un groupe donné, de même que l'on dit, par exemple, mouvement hélicoïdal tangent à un mouvement donné? Considérons en effet un groupe à un paramètre dans lequel les trajectoires Γ forment une congruence de courbes

définie par les équations

$$\frac{dX_1}{F_1(X_1, \ldots, X_n)} = \ldots = \frac{dX_n}{F_n(X_1, \ldots, X_n)}.$$

Les transformations

$$X'_1 = X_1 + t F_1, \qquad \ldots, \qquad X'_n = X_n + t F_n$$

représentent la transformation infinitésimale du groupe pour t très petit. Mais leur ensemble a une propriété géométrique remarquable indépendante de l'ordre de grandeur du paramètre t et qui justifierait notre dénomination. Car les trajectoires du point $(X'_1, \ldots, X'_n)$ quand t varie sont des *droites* qui sont les *tangentes* aux courbes Γ.

Le plan adopté dans ces Leçons diffère un peu de celui de l'ouvrage de Lie-Engel. M. Vivanti commence par établir dans une première Partie de 118 pages la théorie générale des transformations. Il en montre aussitôt les applications aux équations différentielles dans la seconde Partie (65 pages). La dernière Partie (96 pages) est consacrée aux tranformations de contact.

Nous ne terminerons pas sans féliciter M. Boulanger du talent avec lequel il s'est acquitté de sa tâche. Un lecteur non prévenu pourrait se croire en présence d'une œuvre originale et non pas d'une véritable traduction. MAURICE FRÉCHET.

MÉLANGES.

SUR L'APPROXIMATION PÉRIODIQUE DES IRRATIONNELLES CUBIQUES;

PAR M. LOUIS KOLLROS.

A. Si l'on reporte l'unité de longueur sur les deux axes d'un système de coordonnées rectangulaires (x, y) et que l'on fasse

correspondre aux abscisses x des suites de Farey

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{0}{1} & & & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{1} \\ & \frac{1}{3} & & & & \frac{2}{3} & \\ \frac{1}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

des ordonnées y, égales aux fractions duales exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & \frac{1}{2} & & & 1 \\ & \frac{1}{4} & & & & \frac{3}{4} & \\ \frac{1}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{5}{8} & & \frac{7}{8} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array},$$

on définit une fonction continue et toujours croissante que M. Minkowski a désignée par $y = ?(x)$ (voir *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. XII, p, 593).

On a ainsi une image géométrique de l'approximation d'un nombre par des *fractions duales*, sur l'axe des y, et par des *fractions continues*, sur l'axe des x.

Si maintenant x est une *irrationnelle quadratique*, la fraction continue est *périodique;* la fraction duale correspondante, y, le sera aussi, et représentera un nombre *rationnel*. Nous avons donc le

Théorème. — *Si x est une irrationnelle quadratique, $y = ?(x)$ sera un nombre rationnel.* Exemple :

$$\frac{1}{5} = ?\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right);$$

si x est un nombre rationnel, y sera une fraction duale exacte. Exemple :

$$\frac{3}{4} = ?\left(\frac{2}{3}\right).$$

La réciproque est vraie, de sorte que nous avons ici un *critère pour les nombres algébriques du second degré.*

Remarquons que, grâce à la continuité, la fonction y est aussi définie pour les valeurs transcendantes de la variable x; on a, par

exemple,

$$?\left(\frac{e-1}{e-1}\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^9} - \ldots\right) = 1 - \Theta\left(0, q = \frac{1}{4}\right),$$

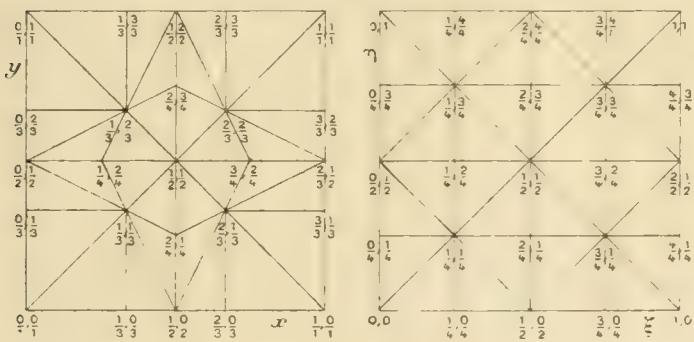
où Θ est la série connue de la théorie des fonctions elliptiques.

B. On définira d'une manière analogue les *deux fonctions à deux variables* $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$

Dans le plan II, on partagera le carré $\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \end{cases}$ en deux triangles égaux, rectangles et isoscèles, par la diagonale $\xi = \eta$: le procédé de fractionnements successifs sera complètement déterminé si l'on convient de diviser chacun de ces deux triangles en deux autres qui seront encore égaux, rectangles et isoscèles, et ainsi de suite.

Dans le plan I, on mènera également la diagonale $x = y$ du

Fig. 1 Fig. 2.



carré $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ et la décomposition en triangles de plus en plus petits sera bien déterminée si l'on convient d'intercaler entre les deux points $\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{b_1}{c_1}\right)$ et $\left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{b_2}{c_2}\right)$ le point $\left(\frac{a_1 + a_2}{c_1 + c_2}, \frac{b_1 + b_2}{c_1 + c_2}\right)$, de telle sorte que chaque partage dans le plan II ait son correspondant dans le plan I.

En supposant maintenant une périodicité dans ces deux procédés d'approximation, j'arrive aux théorèmes suivants :

THÉORÈMES : 1° *Si x, y et 1 forment une* BASE D'UN CORPS CUBIQUE, *ξ et η seront* RATIONNELS ;

2° *Si x et y appartiennent au* MÊME CORPS QUADRATIQUE, UN ET UN SEUL DES QUATRE NOMBRES RATIONNELS ξ, η, $\xi+\eta$, $\xi-\eta$ *est une* FRACTION DUALE EXACTE; il existe alors une relation linéaire à coefficients entiers entre x, y et 1;

3° *Si x et y sont* RATIONNELS, ξ *et* η *sont* TOUS DEUX DES FRACTIONS DUALES EXACTES.

On trouve, par exemple :

1° Pour

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{4} - 1, & \xi = \dfrac{26}{41}, \\ y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}, & \eta = \dfrac{12}{41}; \end{cases}$$

2° Pour

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{2}, & \xi = \dfrac{3}{5}, \\ y = \sqrt{2} - 1, & \eta = \dfrac{2}{5}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \xi - \eta = 1;$$

3° Pour

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, & \xi = \dfrac{5}{8}, \\ y = \dfrac{2}{5}, & \eta = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Les trois réciproques sont vraies et se démontrent très simplement, tandis que la proposition directe (1°) que j'ai vérifiée sur une suite *systématique* d'exemples semble difficile à prouver rigoureusement.

Les algorithmes périodiques de Jacobi et Bachmann, Hermite, Charve et Minkowski ne sont valables que pour des racines cubiques de nombres entiers ou pour des corps cubiques réels de discriminant négatif (à une seule unité fondamentale), tandis que nos critères s'étendent aux corps cubiques réels de *discriminant positif*, où il y a deux unités fondamentales.

D'ailleurs, ces théorèmes sont susceptibles d'une généralisation immédiate pour des corps algébriques réels du $n^{\text{ième}}$ degré.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TANNERY (J.). — INTRODUCTION A LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE. Deuxième édition. Tome I : NOMBRES IRRATIONNELS, ENSEMBLES, LIMITES, SÉRIES, PRODUITS INFINIS, FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES, DÉRIVÉES. 1 vol. in-8° : IX-422 pages. Paris, Hermann, 1904.

Nous reproduisons ci-dessous la Préface de l'auteur :

« Si la première édition de cette *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* a rendu quelques services, je crois que ces services sont aujourd'hui épuisés, pour la meilleure partie, et qu'il aurait été peu utile de la réimprimer, en me bornant à ces corrections et améliorations de détail qui se présentent en foule à l'esprit de quelques auteurs, dès qu'ils ont donné le *bon à tirer* de la dernière feuille de leur livre.

» J'ai donc écrit à nouveau, presque entièrement, cette seconde édition; j'espère qu'elle sera moins incomplète que la première, et que ce que j'ai cherché à faire y apparaîtra mieux.

» Qu'une exposition logique et rigoureuse de l'analyse doive être fondée essentiellement sur l'idée de nombre entier, c'est là sans doute un point qu'on accordera volontiers aujourd'hui; que, dans le développement de l'analyse, nos intuitions spatiales et nos habitudes géométriques aient tenu un rôle considérable, cela est aussi très certain : non seulement les progrès, mais encore les concepts fondamentaux de l'Analyse et de la Géométrie sont liés intimement. Les uns ont réagi sur les autres. Les extensions successives de l'idée de nombre ont eu pour but la parfaite adaptation du nombre à la grandeur continue. Lors même qu'on prétend construire l'Analyse avec cette idée de nombre, d'une façon purement logique, et qu'on se garde d'y introduire aucun élément étranger, il n'est pas nécessaire de méconnaître ces éléments étrangers, ni, tout en parlant des nombres, de feindre qu'on ignore l'espace. Il est légitime, dans une exposition logique de l'Analyse, de se servir

des termes et des figures de la Géométrie, pourvu qu'on sache les traduire dans un langage numérique et déduire logiquement les propriétés numériques qu'illustrent les figures. Cela, à mon avis, est aussi légitime que d'écrire une formule, qui, après tout, est aussi une *figure*. De cette façon, l'exposition logique de l'Analyse tend à se rapprocher d'une exposition plus élémentaire, où l'on cherche à tirer tout ce qu'on peut de l'intuition spatiale, à voir devant soi pour aller plus vite, sans trop s'inquiéter des fissures qu'on n'aperçoit pas; elle complète et précise cette exposition.

» Je me suis encore efforcé de rendre élémentaire cette *Introduction* en ne recherchant point la généralité pour elle-même; j'ai eu hâte d'arriver à ces fonctions spéciales qui, par la simplicité, la beauté et l'importance de leurs propriétés, doivent, à mon avis, retenir longtemps les commençants, avant qu'ils ne s'élèvent dans la région des théorèmes généraux, d'où ces mêmes fonctions n'apparaissent plus que comme d'infimes particularités. Pour la même raison enfin, j'ai renvoyé au second volume l'étude des fonctions d'une variable complexe.

» Si, dans la première édition, je me suis abstenu de tout langage et de toute figure géométriques, c'est que, dans les limites que je m'étais imposées, l'emploi de ce langage ou de ces figures n'aurait guère simplifié les raisonnements, c'est aussi à cause d'une certaine timidité: j'avais peur que le lecteur ne fût pas bien persuadé, s'il voyait une figure, que cette figure n'était qu'une aide et ne cachait point quelque trou, impossible à combler avec les seules ressources de la logique, et, peut-être aussi, avais-je besoin de fortifier en moi-même la conviction que je désirais imprimer dans son esprit. Aujourd'hui, les craintes de cette sorte me semblent un peu puériles; j'ai d'ailleurs l'intention, pour ce qui concerne les éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, tout en restant dans le domaine du nombre, de profiter des facilités qu'offre le langage géométrique.

» Il m'a paru aussi que j'avais été beaucoup trop timide en parlant des *ensembles*; je m'étais borné à des indications par trop discrètes, sans mettre suffisamment en lumière le rôle vraiment fondamental que cette notion doit tenir dans une exposition logique de l'Analyse; elle est, à ce que je crois, aussi essentielle et plus primitive que celle même de limite, qui lui est d'ailleurs liée

étroitement. En dégageant cette notion, en en développant les conséquences, M. G. Cantor a apporté aux Mathématiques et à la philosophie des Mathématiques une contribution considérable, dont l'importance s'accroît par les nombreux travaux qu'elle continue de susciter. Mais, quel que soit son intérêt propre, je ne pouvais songer à exposer la théorie des ensembles; je me suis borné à quelques propositions très simples qui lui servent de point de départ, et je me suis appuyé franchement sur ces propositions, toutes les fois qu'elles me semblaient constituer un point d'appui naturel. J'ai pu d'ailleurs profiter en cela de l'exemple qu'a donné M. Camille Jordan dans son *Cours d'Analyse*.

» C'est parce qu'il se relie directement à la théorie des ensembles que j'ai entièrement adopté le point de départ de M. Dedekind pour l'introduction des nombres irrationnels, en sacrifiant, malgré sa simplicité et sa rigueur, la méthode de M. Méray [1]. Celui-ci a d'ailleurs donné de cette méthode, au début de ses *Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale*, une exposition sur laquelle il n'y a pas à revenir.

» Sauf la notion d'intégrale, le présent volume contient à peu près tout ce qui figurait dans la première édition, c'est-à-dire l'introduction des nombres irrationnels, les propositions d'un caractère fondamental qui concernent les ensembles, les limites, les séries, les fonctions d'une variable en général, les dérivées; enfin la définition et les propriétés les plus simples des fonctions élémentaires. Le second volume se rapportera à quelques points essentiels du calcul intégral et de la théorie des fonctions d'une variable complexe, que je me suis efforcé de préparer dans celui-ci.

» Pour qui ce livre est-il écrit?

» Il ne suppose, pour être compris, que très peu de connaissances mathématiques. Le plus souvent les choses y sont reprises au début et les démonstrations y sont très détaillées. Les sujets qui y sont traités sont *élémentaires*, d'une part parce qu'ils se rattachent aisément aux principes, d'autre part en raison de leur importance pour la suite. Il semble donc fait pour des commençants, et j'ai souvent pensé à eux en l'écrivant. J'aurais entièrement manqué mon but s'il ne pouvait être compris d'un commen-

---

[1] J'ai eu le tort, dans la première édition, de l'attribuer à E. Heine.

çant qui serait capable d'appliquer une forte attention à de longues déductions abstraites et ne se lasserait point devant les raisonnements qui, parfois, semblent vides en raison de leur généralité, alors qu'il ne peut apercevoir ni le but où tendent ces raisonnements, ni l'économie qui résulte de leur généralité. Mais le plus souvent cette attention et cette patience ne s'acquièrent que par une habitude déjà longue des Mathématiques. C'est donc surtout à ceux qui *recommencent* l'étude des Mathématiques qu'il s'adresse.

» Toute étude approfondie suppose de nombreux retours en arrière. Il me semble que beaucoup d'étudiants, à un moment ou à un autre, doivent sentir l'utilité de ce retour et de ce recommencement, soit parce qu'ils veulent mettre plus d'ordre et de cohésion dans ce qu'ils savent, soit parce qu'ils veulent se débarrasser de l'inquiétude que leur ont laissée quelques raisonnements et qui, peut-être, vient de s'éveiller en eux, soit parce que leurs connaissances sont maintenant assez étendues pour qu'ils sentent qu'une parfaite rigueur est indispensable dans certains sujets qui les attirent. C'est ceux-là que je voudrais contenter et dont je voudrais faciliter le travail.

» Il n'y avait guère de bibliographie dans la première édition et elle n'était pas toujours exacte. On en trouvera moins encore cette fois : si je ne me suis pas refusé à écrire le nom d'un mathématicien illustre qui se trouvait sous ma plume, si j'ai indiqué, à l'occasion, une source où j'avais puisé directement, je ne me suis préoccupé, en aucune façon, de faire à chacun sa part : quant à la mienne, il est bien aisé de l'indiquer : je me suis borné à repenser de mon mieux des vérités connues depuis longtemps, à les disposer dans un ordre où elles me paraissent faciles à comprendre.

» Ce n'est pas que je méconnaisse l'importance ou l'intérêt de la bibliographie, même dans un livre d'enseignement, où toutefois je ne la crois pas indispensable, en raison du caractère impersonnel que la Science y prend naturellement : mais la tentation de renvoyer le lecteur à l'Encyclopédie des Mathématiques [1] est trop

---

[1] *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (Leipzig, B. G. Teubner). L'édition française de cet important ouvrage, à laquelle M. J. Molk donne tous ses soins, a commencé de paraître (Paris, Gauthier-Villars).

naturelle pour que je n'y cède pas. La paresse de l'auteur peut ici se couvrir d'excellentes raisons : en vérité, il importe peu de mettre un nom propre sur un théorème; ce qui importe vraiment, c'est l'ordre dans lequel les vérités ont été découvertes, la façon dont les théories sont nées, se sont développées, se sont enchaînées : c'est précisément ces renseignements, avec l'indication précise des sources, que le lecteur trouvera dans cette Encyclopédie à laquelle je me permets de le renvoyer. »

J. T.

DAVENPORT (C.-B.). — STATISTICAL METHODS WITH SPECIAL REFERENCE TO BIOLOGICAL VARIATION Second, revised edition. New-York, John Wiley and Sons. In-12, VIII-224 pages. London: Chapman and Hall.

On nous dit que ce petit Ouvrage est très apprécié et très employé par les biologistes auxquels il rend les plus grands services. Nous n'avons pas la compétence nécessaire pour qu'il nous soit permis d'ajouter notre témoignage à celui des naturalistes; mais il nous sera permis de dire que la partie mathématique est très bien comprise et que les nombreuses Tables par lesquelles se termine l'Ouvrage sont bien choisies et très bien disposées.

D. J.

GOMES TEIXEIRA (Dr F.). — OBRAS SOBRE MATHEMATICA PUBLICADAS POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS. Volume primeiro. 1 vol. in-4°. VIII-402 pages. Coimbra. Imprensa da Universidade. 1904.

C'est avec grand plaisir que nous annonçons aujourd'hui la publication du premier Volume des Œuvres mathématiques de M. Gomes Teixeira, réunies par ordre du gouvernement portugais. Le savant et habile géomètre est bien connu de nos lecteurs qui ont lu avec un vif intérêt ses nombreuses recherches, insérées

dans les divers recueils que publient aujourd'hui les différents pays civilisés. Ces recueils accueillent aujourd'hui les Mémoires écrits dans les langues les plus diverses, ils sont devenus si nombreux qu'il est presque impossible à un géomètre de prendre connaissance de leur contenu d'une manière qui ne soit pas superficielle. D'ailleurs, la publication des travaux d'un auteur dans ces recueils, si variés, diminue l'influence que ne manqueraient pas d'exercer des recherches méthodiquement poursuivies, conservant leur suite et leur ordre chronologique dans un journal parfaitement déterminé. Aussi voyons-nous de tous côtés se multiplier les publications de la nature de celles dont nous rendons compte aujourd'hui. La France, qui avait donné l'exemple en publiant la première les Œuvres de ses grands savants, Laplace, Lavoisier, Lagrange, Fresnel, Fermat, Fourier, Cauchy, se trouve aujourd'hui dépassée. Partout, en Angleterre, en Allemagne, en Russie, en Italie, on éprouve le besoin de réunir en un corps les travaux isolés et épars, publiés un peu partout par les géomètres et, en général, par les savants. C'est l'hommage le plus délicat, le monument le plus utile qu'on puisse élever à leur mémoire. C'est, quand ils sont encore vivants, le moyen le plus efficace de mettre en valeur toute leur œuvre et de lui assurer l'influence et l'action qu'on doit en attendre. Nous félicitons le gouvernement portugais d'entrer à son tour dans la voie qui était ouverte, et nous sommes convaincus que, publiées sous la direction et avec le contrôle de leur auteur, les Œuvres complètes de M. Gomes Teixeira seront accueillies avec faveur par les géomètres.

G. D.

POINCARÉ (HENRI). — WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erlaternden Anmerkungen von *F.* und *L. Lindemann*. In-8°, X-344 pages.

Nous n'avons pas besoin de rappeler ici le succès obtenu par le bel Ouvrage de M. H. Poincaré, *La Science et l'hypothèse,* qui

fait l'ornement de la *Bibliothèque de Philosophie scientifique* entreprise par M. Ernest Flammarion. Le livre de M. Poincaré répondait d'une manière magistrale au besoin qu'éprouvent de plus en plus les savants de notre époque de se rendre compte du but et des résultats de leurs études et de se faire à leur tour une philosophie, s'appuyant sur des notions à la fois plus précises, plus étendues et plus profondes que celles sur lesquelles les philosophes de profession ont l'habitude d'échafauder leurs systèmes.

La traduction qu'en publie aujourd'hui l'éditeur Teubner avec l'autorisation de l'auteur a été entourée de toutes les garanties possibles de savoir et de compétence. Un des traducteurs, M. F. Lindemann, qui a l'honneur de voir son nom attaché à la première démonstration donnée de l'impossibilité de la quadrature du cercle, a été amené, par l'ensemble même de ses recherches, à réfléchir sur les questions qui se rattachent à la philosophie scientifique. Il a été conduit ainsi à enrichir sa traduction de notes nombreuses qui seront particulièrement agréables aux géomètres et aux physiciens, et leur serviront très utilement de guide.

G. D.

FIEDLER (W.). — DIE DARSTELLENDE GEOMETRIE IN ORGANISCHER VERBINDUNG MIT DER GEOMETRIE DER LAGE. Vierte Auflage. I. Theil : *Die methode der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie.* Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. In-8°. XXIV-429 pages. Leipzig. Teubner. 1904.

Il nous suffira évidemment de signaler la quatrième édition de cet excellent Traité dans lequel les methodes de la Géométrie descriptive se trouvent rajeunies et développées à l'aide des ressources fournies par la Géométrie moderne. L'union de la Géométrie de situation et de la Géométrie de Monge nous a toujours paru devoir fournir les méthodes les plus fécondes et les plus lumineuses pour la représentation des objets et la mise en œuvre des propositions de Géométrie. En la réalisant dans son exposition,

M. Fiedler a rendu un service qui se trouve attesté par le succès même qui a accueilli cette partie de son œuvre. G. D.

AHRENS (D. W.), in Magdeburg. SCHERZ UND ERNST IN DER MATHEMATIK: GEFLÜGELTE UND UNGEFLÜGELTE WORTE, GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN. In-8°, x-522 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

On sait le succès qui a accueilli les Ouvrages du regretté Alphonse Rebière, notre camarade de l'École Normale : *Mathemathiques et Mathématiciens*, *Les femmes dans la Science*, *Pages choisies des savants modernes*. Dans ces différentes publications, une part assez grande était faite aux savants français, que Rebière connaissait mieux et au sujet desquels il avait pu recueillir ces anecdotes qui ne s'écrivent pas toujours, mais que les hommes du métier prennent souvent plaisir à se transmettre oralement. Il n'est aucun de nos étudiants qui ne répète le mot célèbre de Sturm sur le théorème dont il avait l'honneur de porter le nom et qui ne connaisse aussi les mauvaises et peu justifiées plaisanteries que l'on faisait sur le titre de l'excellent Ouvrage où Lamé a reproduit ses leçons de Physique de l'École Polytechnique. Par contre, les traditions et la littérature des peuples voisins nous sont beaucoup moins familières. Aussi nous pensons que l'Ouvrage que vient de publier M. Ahrens rencontrera faveur et succès dans notre pays.

Il nous paraît très intéressant et très bien entendu. L'auteur a grand soin d'indiquer les sources où il a puisé ses citations. Il a muni son livre d'une table des matières très étendue, ce qui est un mérite essentiel, car il faut que les recherches soient faciles en pareille matière et que l'on puisse facilement retrouver telle pensée ou telle expression qui aura frappé dans une première lecture.

M. Ahrens a définitivement renoncé aux classifications, qui sont bien difficiles à établir ici. Il va un peu au hasard; mais cependant il obéit aux lois de l'association des idées et rapproche les opinions qui se rapportent à la même personne ou au même

sujet. Quelquefois même l'intérêt naît du contraste de deux citations juxtaposées. C'est ainsi qu'après avoir reproduit un passage de Joseph Bertrand où il est rappelé que, malgré les expériences de Fresnel qui répondaient d'une manière victorieuse à ses objections, Poisson ne voulut jamais renoncer à la théorie de l'émission, il ajoute une citation d'une ligne de Frédéric le Grand : « Dur comme un géomètre en ses opinions ». M. Ahrens d'ailleurs est bien loin, et il a raison, de se borner aux réflexions des géomètres sur la Géométrie; grâce à lui, nous connaîtrons l'opinion, ou une partie de l'opinion, de Kronecker sur la république considérée comme forme de gouvernement; comme il est naturel, nous avons un certain nombre de citations sur les rapports des Mathématiques avec la Musique, sur le rôle politique, les opinions religieuses, etc.

Les géomètres anciens, Newton, Pascal, d'Alembert, Euler, Fermat, Descartes, ne sont pas négligés; leurs noms côtoient ceux de Gauss, d'Helmholtz, de Laplace, de Cauchy, de Weierstrass, d'Hermite; de nombreux extraits sont empruntés aux géomètres encore vivants de tous les pays.

Nous croyons que l'Ouvrage de M. Ahrens sera accueilli avec beaucoup de faveur.

G. D.

MÉLANGES.

SUR LA SPHÈRE DE RAYON NUL ET SUR LA THÉORIE DU DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE;

PAR M. GASTON DARBOUX (*).

I.

Considérons un cône isotrope, ou sphère de rayon nul, défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0. \tag{1}$$

On peut, en appliquant à cette surface imaginaire une méthode générale, exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction de deux variables u et v par les formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= u^2 - v^2, \\ Y &= i(u^2 + v^2), \\ Z &= 2uv. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

A chaque point de la surface correspondent deux systèmes de valeurs : u, v et $-u$, $-v$. On passe d'un point au point imaginaire conjugué par la substitution

$$u = iv_0, \quad v = -iu_0, \tag{3}$$

où u_0 et v_0 désignent les quantités imaginaires conjuguées de u et de v. Comme on a

$$\frac{X + iY}{-Z} = \frac{v}{u}, \qquad \frac{X - iY}{Z} = \frac{u}{v}, \tag{4}$$

(*) Résumé de Leçons faites à la Sorbonne en 1900 et 1904.

on voit que, si u et v varient en conservant le même rapport, on obtient tous les points situés sur une même génératrice rectiligne du cône isotrope.

Pour appliquer la méthode de Gauss, il faudrait commencer par calculer la forme quadratique qui définit l'élément linéaire de la surface. D'une manière plus générale, cherchons la distance de deux points quelconques, M, M_1, ayant respectivement pour coordonnées curvilignes u, v et u_1, v_1.

Si l'on désigne par d_{01} la distance de ces deux points, on aura

$$d_{01}^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2 = (uv_1 - vu_1)^2.$$

En extrayant la racine carrée, on trouve la formule fondamentale

$$(5) \qquad d_{01} = \pm(uv_1 - vu_1).$$

Nous voyons ici se reproduire, pour la sphère de rayon nul, cette propriété curieuse des distances comptées sur une même droite : La distance MM_1 de deux points du cône isotrope est une fonction *rationnelle* et, par suite, peut être affectée d'un signe qui change quand on échange les deux points.

Voici quelques conséquences curieuses de l'équation (5). Si l'on prend quatre points quelconques M_1, M_2, M_3, M_4 sur le cône isotrope, une propriété bien connue des déterminants nous donne entre leurs distances mutuelles la relation

$$(6) \qquad d_{12}d_{34} - d_{13}d_{42} - d_{14}d_{23} = 0,$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$d_{12}d_{34} = d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23}.$$

C'est la relation entre les distances mutuelles exprimée par le célèbre théorème de Ptolémée relatif au quadrilatère inscriptible. Ainsi :

Si la sphère circonscrite à un tétraèdre a son rayon nul, on a, entre les arêtes de ce tétraèdre, la relation

$$aa' \pm bb' \pm cc' = 0.$$

a, a', b, b', c, c' désignant les trois couples d'arêtes opposées.

En d'autres termes le triangle invariable du tétraèdre se réduit à une droite.

III.

J'avais déjà énoncé cette proposition dans mon *Mémoire sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace*, inséré en 1872 aux *Annales de l'École Normale* (2e série, t. I, p. 323). Je vais rappeler ici en quelques mots la démonstration qui m'y avait conduit.

Considérons la sphère circonscrite au tétraèdre formé par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, et rapportons-la à des axes rectangulaires passant par son centre. R désignant son rayon, elle aura pour équation en coordonnées homogènes

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2T^2 = 0.$$

Substituons à ces coordonnées les coordonnées barycentriques relatives au tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$; c'est-à-dire effectuons la substitution définie par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4, \\ Y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4, \\ Z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4, \\ T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \end{array}\right.$$

où x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées cartésiennes de M_i. En désignant par α_{ij} le *carré* de la distance M_iM_j, on sera facilement conduit à l'identité

$$(8)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2T^2 = -\Sigma\Sigma\alpha_{ik}\lambda_i\lambda_k.$$

Cela posé, on sait que, lorsqu'on effectue sur une forme quadratique une substitution linéaire quelconque, le discriminant de la forme se reproduit multiplié par le carré du déterminant de la substitution. Ce déterminant, qui est ici le suivant :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à six fois le volume V du tétraèdre formé par les quatre points. En calculant les discriminants des deux membres de l'identité (8), on sera donc conduit à la relation

$$-36R^2V^2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

qui a été donnée en premier lieu par Carnot.

Le second membre est, au signe près, le carré de la surface S du triangle formé en prenant pour côtés les trois produits des arêtes opposées du tétraèdre. On a donc, en introduisant cette surface S, la relation

$$6RV = S,$$

qui a été donnée pour la première fois par Baltzer.

Le triangle formé avec les produits

$$\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{34}}, \qquad \sqrt{\alpha_{13}\alpha_{24}}, \qquad \sqrt{\alpha_{14}\alpha_{23}},$$

des arêtes opposées a reçu le nom de *triangle invariable*.

On voit que sa surface deviendra nulle si le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre devient nul. Et l'on aura alors

$$\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{34}} = \sqrt{\alpha_{13}\alpha_{24}} = \sqrt{\alpha_{14}\alpha_{23}}.$$

C'est, sous une forme moins précise, le résultat déjà obtenu plus haut.

IV.

Revenons à la formule (5) pour en déduire d'autres conséquences. Si l'on suppose que le point M_1 soit infiniment voisin du point M, on aura

$$u_1 = u - du, \qquad v_1 = v - dv,$$

et la formule nous donnera

$$ds^2 = (u\,dv - v\,du)^2. \tag{9}$$

Nous retrouvons ici une propriété caractéristique des dévelop-

pables isotropes, déjà signalée dans mes *Leçons sur la théorie des surfaces* (Ire Partie, p. 150). L'élément linéaire de la surface est un carré parfait. La forme sous laquelle il se présente n'offre d'ailleurs rien de particulier à signaler. Si l'on prend comme nouvelle variable

$$2\frac{v}{u} = \omega,$$

on aura

$$ds^2 = u^2\,d\omega^2, \tag{10}$$

les deux fonctions u et ω étant essentiellement distinctes. C'est le résultat que l'on retrouve avec une développable isotrope quelconque, comme il est aisé de le démontrer.

Si nous définissons, en effet, l'arête de rebroussement d'une développable isotrope par les formules

$$x = \int (1 - w^2)\bar{\lambda}(w)\,dw,$$

$$y = i\int (1 + w^2)\bar{\lambda}(w)\,dw,$$

$$z = 2\int w\bar{\lambda}(w)\,dw,$$

un point quelconque de la surface aura pour coordonnées

$$X = x + \frac{\lambda}{2}(1 - w^2), \qquad Y = y + \frac{i\lambda}{2}(1 - w^2), \qquad Z = z - w\lambda.$$

En calculant l'élément linéaire de la surface, on trouvera

$$dS^2 = \lambda^2\,dw^2, \tag{11}$$

formule qui ne diffère que par les notations de celle (10) que nous avons obtenue plus haut.

En cherchant à appliquer la développable sur le cône isotrope, on rencontre même un fait unique dans la théorie de la déformation. Les deux éléments linéaires deviendront identiques si l'on pose

$$w = \varphi(\omega), \qquad \lambda = -\frac{u}{\varphi'(\omega)};$$

de sorte que la solution du problème comportera une *fonction arbitraire*.

Il y a une développable, encore plus simple que le cône isotrope, qui échappe entièrement à la théorie précédente : c'est le *plan isotrope*, qu'on peut considérer comme une dégénérescence du cône isotrope relative au cas où le sommet de ce cône vient se placer sur le cercle de l'infini.

Soit en effet

$$(1 - \alpha^2)X - i(1 - \alpha^2)Y - 2\alpha Z - h$$

l'équation d'un plan isotrope. On verra facilement que la distance d_{01} de deux points du plan, M, M', est rationnelle et a pour expression

$$(12) \qquad d_{01} = \alpha(X - iY) + \alpha(X' - iY') + Z - Z'.$$

Ici nous avons la généralisation *complète* de la notion d'abscisse. Dans un polygone quelconque tracé sur le plan isotrope, *un côté quelconque est la somme algébrique de tous les autres. Deux points situés sur deux droites parallèles isotropes du plan sont à une distance invariable l'un de l'autre, quelle que soit leur position sur ces droites.*

L'élément linéaire est donné par la formule

$$ds = dw,$$

où l'on a posé

$$w = \alpha(X - iY) - Z,$$

et, par conséquent, cet élément linéaire ne rentre pas dans la formule (10).

V.

La formule (5) donne lieu à des remarques d'un autre genre. Elle nous permet en particulier d'obtenir la signification géométrique des variables u et v. Si nous faisons, en effet, coïncider successivement le point M_1 avec le point A qui correspond aux valeurs

$$v_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 0,$$

et avec le point imaginaire conjugué B qui correspond aux valeurs

$$v_1 = 0, \qquad u_1 = i,$$

elle donne

$$(13) \qquad AM = 2u, \qquad BM = 2iv.$$

Ainsi u et v désignent les distances du point M à deux points fixes du cône isotrope, multipliées par des facteurs numériques que l'on pourrait d'ailleurs faire disparaître en déplaçant ces points fixes A et B sur les génératrices isotropes qui les contiennent. Nous avons choisi ces deux points particuliers par la condition qu'ils soient imaginaires conjugués.

Leurs coordonnées rectangulaires sont : pour le point A,

$$X = 1, \qquad Y = i, \qquad Z = 0,$$

et pour le point B,

$$X = -1, \qquad Y = -i, \qquad Z = 0.$$

Ils se trouvent donc tous les deux à l'intersection du cône isotrope et de la droite réelle

$$X = -1, \qquad Z = 0.$$

VI.

Si nous avons donné quelque étendue aux développements qui précèdent, bien qu'ils paraissent dépourvus de toute application à des objets réels, c'est que l'imaginaire prend dans la Géométrie une place de plus en plus grande et qu'il n'est plus permis de restreindre arbitrairement. Nous allons voir d'ailleurs que les formules obtenues trouvent une application des plus intéressantes dans la théorie du déplacement d'une figure invariable ou, ce qui est la même chose, dans celle du changement d'axes coordonnés.

Considérons un déplacement quelconque d'une figure invariable laissant fixe l'origine des coordonnées.

Il laissera évidemment invariable le cône isotrope ayant pour sommet cette origine ; de sorte que, dans le déplacement, ce cône aura nécessairement glissé sur lui-même. Un point du cône, de coordonnées u, v, sera venu occuper sur la surface une autre position de coordonnées u_1, v_1.

Il s'agit d'exprimer u, v en fonction de u_1, v_1, et *vice versa*.

Pour obtenir ce résultat, nous pouvons nous appuyer sur ce que la distance de deux points quelconques M, M′ du cône doit être conservée par le déplacement. Si donc on désigne par u, v, u', v' les coordonnées des points M, M′ et par u_1, v_1, u'_1, v'_1 celles des points M_1, M'_1 qui leur correspondent, on devra avoir toujours

$$uv' - vu' = \pm(u_1 v'_1 - v_1 u'_1). \tag{14}$$

Donnons au point M′ deux positions particulières successives. Nous aurons ainsi deux relations qui nous permettront évidemment d'exprimer u, v en fonction linéaire de u_1, v_1. Donc nous devons avoir

$$\left\{\begin{aligned} u &= \alpha u_1 + \beta v_1, \\ v &= \gamma u_1 + \delta v_1, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

α, β, γ, δ étant des constantes qui, d'après la relation (14), devront satisfaire à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Le déplacement pouvant être réalisé d'une manière continue, il faut que l'équation précédente puisse être vérifiée par des valeurs de α, δ très voisines de 1 ou de -1 et par des valeurs de β, γ très voisines de zéro. Donc, en vertu de la continuité, on doit avoir, dans le cas d'un déplacement,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{16}$$

Le signe $-$ du second membre correspondrait à une transformation par symétrie.

Par les formules (15) et (16) la théorie du déplacement est ramenée à l'étude d'une substitution linéaire *qui cesse de contenir trois variables et n'en contient plus que deux*. On pourrait objecter, il est vrai, que ces formules concernent le déplacement d'une surface particulière; mais il est bien évident que le solide tout entier fait bloc avec le cône isotrope et a son mouvement entièrement défini par celui de cette surface. Nous allons le vérifier; mais auparavant, et pour épargner les calculs, nous indiquerons une propriété caractéristique des *déplacements réels*.

Nous avons vu que, si u et v définissent un point du cône iso-

trope, le point imaginaire conjugué aura pour coordonnées iv_0 et $-iu_0$, u_0 et v_0 étant les imaginaires conjuguées de u et de v.

Si donc le déplacement est réel, les formules (15) devront être vérifiées quand on y remplacera u, v, u_1, v_1 par leurs conjuguées iv_0, $-iu_0$, iv_{10}, $-iu_{10}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} v_0 &= -\alpha v_{10} + \beta u_{10}, \\ u_0 &= \gamma v_{10} - \delta u_{10}. \end{aligned}$$

Changeons dans ces formules i en $-i$ et désignons par α_0, β_0, γ_0, δ_0 les imaginaires conjuguées de α, β, γ, δ. Nous aurons

$$\begin{aligned} v &= \alpha_0 v_1 - \beta_0 u_1, \\ u &= -\gamma_0 v_1 + \delta_0 u_1. \end{aligned}$$

Ces équations doivent nécessairement être identiques aux équations (15); il faudra donc que l'on ait

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \alpha, & \gamma_0 &= \beta, \\ \beta_0 &= -\gamma, & \alpha_0 &= \delta. \end{aligned}$$

Nous sommes donc conduits à poser

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha = \rho + i\nu, & \beta = -\mu - i\lambda, \\ \delta = \rho - i\nu, & \gamma = \mu - i\lambda, \end{cases}$$

λ, μ, ν, ρ étant des quantités qui seront réelles si le déplacement est réel et qui, en vertu de la relation (16), doivent satisfaire à la condition

$$(17\ bis) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1.$$

Quant aux formules (15), elles deviendront

$$(18) \qquad \begin{cases} u = (\rho - i\nu)u_1 + (\mu + i\lambda)v_1, \\ v = (\mu - i\lambda)u_1 + (\rho + i\nu)v_1. \end{cases}$$

Remarquons d'ailleurs que les formules (18) ont le même degré de généralité que les équations (15) et qu'elles peuvent représenter même les déplacements imaginaires, pourvu qu'on y suppose que les variables λ, μ, ν, ρ puissent prendre, elles aussi, des valeurs imaginaires quelconques, assujetties à l'unique condition (17).

Ces remarques une fois établies, on déduit sans peine de la sub-

stitution linéaire à deux variables (18) celle qui s'applique aux coordonnées cartésiennes X, Y, Z.

Il est clair que l'une quelconque de ces coordonnées étant une fonction quadratique de u, v, sera par cela même une fonction quadratique de u_1, v_1 et, par suite, une fonction linéaire des combinaisons

$$u_1^2 - v_1^2, \qquad u_1^2 + v_1^2, \qquad u_1 v_1,$$

c'est-à-dire des nouvelles coordonnées cartésiennes X_1, Y_1, Z_1. On est ainsi conduit par un calcul facile aux formules

$$(19)\quad \begin{cases} X = (\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)X_1 - 2(\rho\nu + \mu\lambda)Y_1 + 2(-\rho\mu + \nu\lambda)Z_1, \\ Y = 2(-\rho\nu - \mu\lambda)X_1 + (\rho^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2)Y_1 - 2(\rho\lambda + \mu\nu)Z_1, \\ Z = 2(\rho\mu + \nu\lambda)X_1 - 2(-\rho\lambda + \mu\nu)Y_1 + (\rho^2 + \nu^2 - \mu^2 - \lambda^2)Z_1, \end{cases}$$

qui s'appliquent évidemment à tous les points de l'espace et qui ont été données en premier lieu, sous une forme un peu différente, par Euler. Elles définissent, comme on sait, une rotation. Si θ désigne la grandeur de cette rotation et si a, b, c sont les cosinus directeurs de l'axe de la rotation, on a les relations

$$(20)\quad \begin{cases} a \sin\frac{\theta}{2} = \lambda, \qquad b \sin\frac{\theta}{2} = \mu, \qquad c \sin\frac{\theta}{2} = \nu, \\ \cos\frac{\theta}{2} = \rho, \end{cases}$$

que nous nous bornerons à rappeler [1].

VII.

La réduction des formules du déplacement à la forme si simple d'une substitution linéaire homogène à deux variables indépendantes permet d'effectuer de la manière la plus élégante la composition des mouvements effectués successivement.

Considérons, en effet, un premier déplacement défini par les

---

[1] *Voir* pour leur démonstration les *Leçons de Cinématique théorique* de M. G. Kœnigs, p. 344.

formules

$$(21)\qquad \begin{cases} u = \alpha u_1 + \beta v_1, \\ v = \gamma u_1 + \delta v_1. \end{cases}$$

Si, après celui-là, on en effectue un autre, défini par la substitution

$$(22)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 u_2 + \beta_1 v_2, \\ v_1 = \gamma_1 u_2 + \delta_1 v_2, \end{cases}$$

le déplacement résultant s'obtiendra en portant dans les premières formules les valeurs de u_1, v_1 fournies par les secondes, ce qui donnera

$$(23)\qquad \begin{cases} u = \alpha_{01} u_2 + \beta_{01} v_2, \\ v = \gamma_{01} u_2 + \delta_{01} v_2, \end{cases}$$

α_{01}, β_{01}, γ_{01}, δ_{01} ayant les valeurs suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha_{01} = \alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1, & \gamma_{01} = \gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1, \\ \beta_{01} = \alpha\beta_1 + \beta\delta_1, & \delta_{01} = \gamma\beta_1 + \delta\delta_1. \end{cases}$$

Si l'on substitue aux α, β, γ, δ leurs expressions en fonction des λ, μ, ν, ρ, on aura

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda_{01} = \lambda\rho_1 + \rho\lambda_1 - \nu\mu_1 - \mu\nu_1, \\ \mu_{01} = \mu\rho_1 + \rho\mu_1 + \lambda\nu_1 - \nu\lambda_1, \\ \nu_{01} = \nu\rho_1 + \rho\nu_1 + \mu\lambda_1 - \lambda\mu_1, \\ \rho_{01} = \rho\rho_1 - \lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1. \end{cases}$$

Ces formules nous conduisent à dire un mot des rapports de cette théorie avec celle des quaternions.

Remarquons d'abord que si, dans les formules (21), on suppose que

$$(26)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = \Delta$$

ne soit pas égal à 1, elles définissent non plus un déplacement, mais un déplacement suivi d'une homothétie pour laquelle le rapport de similitude est Δ. Les équations (22) définissent de même un déplacement suivi d'une homothétie au rapport de similitude

$$(27)\qquad \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 + \rho_1^2 = \Delta_1,$$

de sorte que les formules (23) déterminent nécessairement un

déplacement suivi d'une homothétie au rapport de similitude $\Delta\Delta_1$. Mais comme ce rapport de similitude est aussi

$$(28) \qquad \Delta_{01} = \lambda_{01}^2 + \mu_{01}^2 + \nu_{01}^2 + \rho_{01}^2,$$

on voit que l'on doit avoir nécessairement

$$(29) \qquad \Delta_{01} = \Delta\Delta_1,$$

ce qui est l'identité de Lagrange relative au produit de deux sommes de quatre carrés. C'est ici que l'on peut utilement introduire les quaternions.

Employons trois unités complexes i, j, k pour former l'expression

$$Q = \rho + i\lambda + j\mu + k\nu,$$

qui, par cela même qu'elle contient à l'état isolé les quatre quantités λ, μ, ν, ρ, définit notre première substitution (21). La seconde (22) sera de même définie par le quaternion

$$Q_1 = \rho_1 + i\lambda_1 + j\mu_1 + k\nu_1,$$

et enfin la substitution résultante le sera par le quaternion

$$Q_{01} = \rho_{01} + i\lambda_{01} + j\mu_{01} + k\nu_{01}.$$

Or, si l'on convient d'assujettir la multiplication des unités complexes aux règles suivantes :

$$(30) \qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \end{cases}$$

où la valeur d'un produit dépend de l'ordre dans lequel on prend les unités, on verra facilement que l'on a identiquement

$$(31) \qquad Q_1 Q = Q_{01},$$

de sorte que la multiplication de deux quaternions donne la loi de la composition des substitutions telles que la substitution (22), c'est-à-dire *des rotations autour d'un point suivies d'une homothétie dont le centre est en ce point*. C'est là la *propriété fondamentale* des quaternions.

Pour en donner une application, proposons-nous de retrouver

les formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues données plus haut et relatives à un déplacement.

Soit

$$Q = \rho - i\lambda - j\mu - k\nu \tag{32}$$

le quaternion relatif à ce déplacement et pour lequel on a évidemment

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1. \tag{33}$$

Étant donné un point M de coordonnées x, y, z, cherchons les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nouvelle position dans laquelle l'amènera la rotation. Pour cela nous nous appuyerons sur la remarque suivante qui est à peu près évidente :

Le déplacement transforme deux figures symétriques l'une de l'autre par rapport à OM en deux figures symétriques l'une de l'autre par rapport à OM_1.

Par conséquent, si l'on effectue un renversement, c'est-à-dire une rotation de 180° autour de la droite OM, puis le déplacement considéré, on aura la même position finale que si l'on effectuait le déplacement, sauf à faire ensuite un renversement autour de OM_1.

Or, en vertu des relations (20), le premier renversement s'exprime par le quaternion

$$P = \frac{ix + jy + kz}{R}, \tag{33 bis}$$

où R est la distance de M à l'origine. Le second renversement s'exprimera de même par le quaternion

$$P_1 = \frac{ix_1 + jy_1 + kz_1}{R}. \tag{34}$$

En appliquant donc la remarque précédente et la formule (31), on reconnaît que l'on doit avoir

$$QP = P_1 Q. \tag{35}$$

Comme on a, en désignant par Q_{-1} l'inverse de Q,

$$Q_{-1} = \rho - i\lambda + j\mu + k\nu, \tag{36}$$

on voit que si l'on multiplie *à gauche* les deux membres de l'éga-

lité par Q_{-1}, on aura

$$(37) \qquad P = Q^{-1} P_1 Q,$$

et il ne restera plus qu'à effectuer la multiplication pour trouver les formules d'Euler (19).

Si, au lieu d'employer la formule (37) qui donne directement x, y, z, on veut se servir de la précédente (35), on aura, en supprimant le facteur inutile R,

$$\begin{aligned} QP = &-\lambda x - \mu y - \nu z + i(\rho x + \mu z - \nu y) \\ &+ j(\rho y + \nu x - \lambda z) + k(\rho z + \lambda y - \mu x), \\ P_1 Q = &-\lambda x_1 - \mu y_1 - \nu z_1 + i(\rho x_1 + \mu z_1 - \nu y_1) \\ &+ j(\rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1) + k(\rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1), \end{aligned}$$

et, en égalant les deux produits terme à terme, on sera conduit aux équations

$$(38) \qquad \begin{cases} \lambda x + \mu y + \nu z = \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1, \\ \rho x + \mu z - \nu y = \rho x_1 + \mu z_1 - \nu y_1, \\ \rho y + \nu x - \lambda z = \rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1, \\ \rho z + \lambda y - \mu x = \rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1. \end{cases}$$

qu'il est aisé de démontrer par les considérations géométriques les plus simples [1] et d'où l'on déduit chacune des variables x, y, z par un procédé régulier : il suffit de multiplier chaque équation par le coefficient de l'inconnue que l'on cherche et d'ajouter toutes les équations ainsi obtenues.

Les formules (38), et par suite toutes leurs conséquences, subsistent si l'on échange x, y, z et x_1, y_1, z_1 en changeant ρ en $-\rho$.

Il est bon de remarquer que les formules (38) peuvent être envisagées aussi comme définissant, non plus une rotation, mais un changement de coordonnées, si l'on y considère x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées d'un même point relatives à deux trièdres (T) $Oxyz$ et (T_1) $Ox_1y_1z_1$, et alors λ, μ, ν, ρ définissent la rotation qui amène le trièdre (T_1) à coïncider avec le trièdre (T). En effet, cette rotation amène le point M, dont les coordonnées

---

[1] *Voir* les *Leçons de Cinématique théorique* de M. Kœnigs à la page déjà rappelée.

relatives à (T) sont x, y, z, en une position M_1 dont les coordonnées relatives à (T_1) sont précisément les mêmes que celles de M par rapport à (T_1), c'est-à-dire x_1, y_1, z_1.

VIII.

Après avoir montré le rôle du cône isotrope dans la théorie du déplacement fini, il nous reste à dire quelques mots du déplacement infiniment petit.

Nous pouvons opérer de deux manières différentes : on peut d'abord partir des formules (18) que, pour plus de commodité, on résoudra par rapport à u_1 et à v_1, ce qui donnera

$$(39)\qquad \begin{cases} u_1 = (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \rho^2)u + 2(\mu - i\lambda)v, \\ v_1 = -2(\mu + i\lambda)u - (\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - \rho^2)v. \end{cases}$$

Si la rotation finie $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ se réduit à une rotation infiniment petite de composantes $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, les formules (20) nous donneront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(40)\qquad \lambda = \frac{1}{2}p\,dt, \qquad \mu = \frac{1}{2}q\,dt, \qquad \nu = \frac{1}{2}r\,dt, \qquad \rho = 1;$$

u_1 et v_1, d'autre part, devront être remplacés par $u - \delta u$, $v - \delta v$. On aura donc

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta u}{dt} = -\dfrac{ir}{2}u - \dfrac{q - ip}{2}v, \\ \dfrac{\delta v}{dt} = \dfrac{ir}{2}v + \dfrac{q - ip}{2}u. \end{cases}$$

Telles seraient les variations de u et de v dues au déplacement.

Si l'on emploie la méthode du trièdre mobile, c'est-à-dire si p, q, r sont les composantes de la rotation par rapport aux axes d'un trièdre (T) invariablement lié au solide mobile et si u et v se rapportent à un point invariablement lié au trièdre (T_1) fixe dans l'espace, il est clair qu'il faudra changer dans les formules (41) le signe de p, q, r; parce que $-p$, $-q$, $-r$ sont les composantes de la rotation dans le mouvement du solide (T_1) par rapport au

trièdre (T). On aura donc

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{ir}{2}u - \dfrac{q+ip}{2}v, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{ir}{2}v + \dfrac{q-ip}{2}u. \end{cases}$$

Telles sont les formules dont nous ferons usage dans ce qui va suivre.

On peut encore les établir comme il suit.

On sait que, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point M par rapport au trièdre (T), les composantes de sa vitesse sont données par les formules

$$v_x = \frac{dx}{dt} = qz - ry,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = rx - pz,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Si donc ce point M est fixe dans l'espace, on devra avoir

$$(43)\qquad \frac{dx}{dt} = ry - qz, \qquad \frac{dy}{dt} = pz - rx, \qquad \frac{dz}{dt} = qx - py.$$

Admettons que le point M appartienne au cône isotrope de centre O et posons

$$(44)\qquad x = u^2 - v^2, \qquad y = i(u^2 + v^2), \qquad z = 2uv.$$

Les formules (43) nous donneront

$$\frac{d(x+iy)}{dt} = ri(x+iy) - (q-ip)z,$$

ou encore

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{ri}{2}v + \frac{q-ip}{2}u.$$

On trouvera de même

$$\frac{du}{dt} = \frac{ri}{2}u - \frac{q+ip}{2}v,$$

ce sont les équations (42).

Si l'on suppose que p, q, r soient donnés en fonction du temps, il y aura lieu d'intégrer le système des équations (42).

Par suite de leur forme particulière, ces équations jouissent de la propriété que, *pour deux systèmes quelconques u, v; u', v' de solutions, le déterminant*

$$uv' - vu'$$

demeure constant.

D'autre part, si, comme il arrive d'ordinaire, p, q, r sont réelles, on verra sans peine qu'à tout système u, v de solutions correspond un autre système $-v_0$, $-u_0$ où u_0, v_0 désignent les conjuguées de u et de v. Par conséquent, au moins dans le cas des déplacements réels, si u', v' désigne une solution particulière du système (42) la solution générale sera

$$(45)\qquad \begin{cases} u = Cu' - Dv'_0, \\ v = Cv' + Du'_0, \end{cases}$$

C et D étant les deux constantes arbitraires qui entrent dans la solution générale.

En vertu de la propriété générale que nous venons de signaler, le déterminant

$$u'u'_0 + v'v'_0$$

des deux solutions particulières doit être constant. Comme il est évidemment réel et positif, on peut toujours le réduire à 1, en divisant u', v' par une même constante. On pourra donc supposer

$$u'u'_0 + v'v'_0 = 1.$$

Si nous posons alors

$$(46)\qquad \begin{cases} u' = \rho + i\nu, & u'_0 = \rho - i\nu, \\ v' = \mu - i\lambda, & v'_0 = \mu + i\lambda, \end{cases}$$

λ, μ, ν, ρ seront réelles et satisferont à l'équation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1.$$

D'autre part, les formules (45) deviendront

$$(47)\qquad \begin{cases} u = (\rho + i\nu)C - (\mu - i\lambda)D, \\ v = (\mu - i\lambda)C + (\rho - i\nu)D. \end{cases}$$

Il suffit de les rapprocher des formules (18) pour voir qu'elles définissent une rotation, qui amènerait le point variable (u, v) du cône isotrope en un point fixe (C, D) de ce cône.

En d'autres termes, ces équations déterminent le mouvement cherché et il suffira, pour avoir les formules qui permettent de passer du trièdre mobile (T) au trièdre fixe (T_1), de porter dans les formules (19) les valeurs de λ, μ, ν, ρ données par les équations (46).

Si l'on veut avoir les équations différentielles qui déterminent λ, μ, ν, ρ en fonction de t, il faudra porter les valeurs (46) de u' et de v' dans le système (42). On trouvera ainsi

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\lambda}{dt} &= p\rho - q\nu - r\mu, \\ 2\frac{d\mu}{dt} &= p\nu + q\rho - r\lambda, \\ 2\frac{d\nu}{dt} &= -p\mu - q\lambda + r\rho, \\ 2\frac{d\rho}{dt} &= -p\lambda - q\mu - r\nu. \end{aligned}\right.$$

et de là on déduira aussi

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} p &= 2\left(\rho\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\rho}{dt} + \nu\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\nu}{dt}\right), \\ q &= 2\left(\rho\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\rho}{dt} + \lambda\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\lambda}{dt}\right), \\ r &= 2\left(\rho\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\rho}{dt} + \mu\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\mu}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces expressions sont quelquefois employées.

Grâce aux équations (48), nous voyons apparaître dans l'étude d'une même question trois systèmes différents d'équations différentielles, le système (42) qui ne contient que deux variables, le système (43) qui en contient trois et enfin le système (48) qui en contient quatre. Les deux derniers admettent une intégrale quadratique.

La réduction du problème de la détermination du mouvement à l'intégration du système (42) avait été indiquée dans mes *Leçons;* mais ce sont les travaux de MM. F. Klein et Sommerfeld, exposés dans leur bel Ouvrage *Ueber die Theorie des Kreisels* (Heft I.

Leipzig, 1897) qui lui ont donné toute la simplicité et toute l'élégance désirables. Il ne sera pas inutile, en terminant, de rapprocher les remarques précédentes de celles que j'avais développées dans la première Partie de mes *Leçons sur la théorie des surfaces*.

VIII.

Dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, toutes les sphères qui ont pour centre le point fixe glissent sur elles-mêmes. Nous nous sommes attachés plus haut à celle de ces sphères qui se réduit à un point. Envisageons maintenant une sphère de rayon quelconque R. On pourra donner à ce rayon tel signe que l'on voudra.

Si l'on considère la sphère comme une surface réglée, nous pourrons, pour un point de la sphère de coordonnées X, Y, Z, poser

$$(50)\qquad \frac{X + iY}{R - Z} = x = \frac{R + Z}{X - iY},$$

et nous aurons, en attribuant à x différentes valeurs constantes, ce que nous appellerons les génératrices rectilignes *du premier système* de la sphère. Si nous posons de même

$$(51)\qquad \frac{X - iY}{R - Z} = y = \frac{R + Z}{X + iY},$$

les lignes de paramètre y seront les génératrices rectilignes *du second système*, et nous nous bornerons à rappeler les formules bien connues

$$(52)\qquad \begin{cases} X = R\dfrac{1 + xy}{x - y}, \qquad Y = iR\dfrac{1 - xy}{x - y}, \qquad Z = R\dfrac{x + y}{x - y}, \\ dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \dfrac{4R^2\,dx\,dy}{(x - y)^2}. \end{cases}$$

Cela posé, considérons sur le cône isotrope

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

une génératrice rectiligne. Avec les notations données plus haut

[formules (2)], elle sera définie par les équations

$$(53)\qquad \frac{X - iY}{Z} = \frac{-v}{u} = \frac{-Z}{X - iY}.$$

Pour qu'elle soit parallèle à une génératrice rectiligne, soit du premier, soit du second système, de la sphère, il faudra donc et il suffira que, pour un quelconque de ses points, $\frac{v}{u}$ soit égal à x ou à y.

Faisons passer par le centre et par une génératrice quelconque G de la sphère un plan P. Ce plan, qui sera nécessairement isotrope, touchera le cône isotrope concentrique à la sphère suivant une génératrice rectiligne G′ parallèle à G. Nous avons vu que deux points, pris respectivement sur G et G′, sont à une distance constante, quelle que soit leur position sur G et sur G′. Cette distance sera ici égale à R; et, d'après ce que nous venons de démontrer, si l'on prend un point quelconque sur G′, le rapport $\frac{v}{u}$ des coordonnées curvilignes de ce point sera égal au paramètre x ou y de G. On peut dire encore que cette valeur de x ou de y *définit le point du cercle de l'infini où se rencontrent* G *et* G′.

Faisons l'application de ces remarques si simples à la théorie du mouvement autour d'un point fixe. S'il s'agit d'abord d'un déplacement fini, déterminé par les paramètres λ, μ, ν, ρ, les coordonnées curvilignes u, v d'un point M du cône isotrope seront transformées par les formules déjà données

$$u = (\rho - i\nu)u_1 - (\mu - i\lambda)v_1,$$
$$v = (\mu - i\lambda)u_1 + (\rho - i\nu)v_1.$$

Divisons ces équations membre à membre, ce qui donnera

$$(54)\qquad \frac{v}{u} = \frac{(\rho - i\nu)v_1 + (\mu - i\lambda)u_1}{-(\mu - i\lambda)v_1 + (\rho - i\nu)u_1},$$

et remarquons que les quotients tels que $\frac{v}{u}$, $\frac{v_1}{u_1}$ sont les paramètres x ou y des génératrices rectilignes de la sphère parallèles à la génératrice OM du cône isotrope. On voit donc que si l'on emploie, pour déterminer un point de la sphère, les coordonnées x, y définies par les formules (50), (51), on aura, entre les valeurs anciennes

et nouvelles de ces coordonnées curvilignes, les relations fondamentales

$$(55)\quad x = \frac{(\rho - i\nu)x_1 - (\mu - i\lambda)}{-(\mu - i\lambda)x_1 + (\rho + i\nu)}, \qquad y = \frac{(\rho - i\nu)y_1 - (\mu - i\lambda)}{-(\mu - i\lambda)y_1 + (\rho + i\nu)},$$

où il n'est même plus nécessaire de supposer

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1;$$

ainsi toute la théorie de la rotation se trouve contenue dans les formules (55).

On peut raisonner de même dans le cas où l'on étudie le mouvement autour d'un point fixe, rapporté au trièdre mobile. Si p, q, r désignent à chaque instant les composantes de la rotation infiniment petite relatives au trièdre mobile, nous avons vu que les coordonnées u et v d'un point fixe du cône isotrope doivent satisfaire aux équations différentielles (42)

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{ir}{2}u + \dfrac{q + ip}{2}v, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{ir}{2}v + \dfrac{q - ip}{2}u. \end{cases}$$

Or on sait et nous avons remarqué dans nos *Leçons* (1re Partie, p. 25) que ce système est en rapport étroit avec une certaine équation de Riccati qui définit le rapport des inconnues. On peut obtenir cette équation comme il suit. Multiplions la première équation (56) par $-v$, la seconde par u et ajoutons-les. Nous aurons

$$(57)\quad u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt} = -iruv + \frac{q - ip}{2}u^2 - \frac{q + ip}{2}v^2.$$

Divisons par u^2 et posons

$$(58)\quad \frac{v}{u} = \sigma.$$

Il viendra

$$(59)\quad \frac{d\sigma}{dt} = -ir\sigma + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2}\sigma^2.$$

Et, d'après les remarques qui précèdent, cette équation sera celle à laquelle doivent satisfaire les paramètres x ou y des généra-

trices rectilignes de toutes les sphères qui glissent sur elles-mêmes dans le mouvement.

C'était elle qui jouait le rôle le plus essentiel dans nos premières recherches. Elle dérivait de la considération des sphères de rayon fini; le but de ce travail a été de restituer la première place au cône isotrope qui glisse sur lui-même dans toute la durée du mouvement.

MÉDAILLE GUCCIA.

A l'occasion du IVe Congrès international des Mathématiciens, qui se tiendra à Rome en l'année 1908, le *Circolo matematico di Palermo* décernera un prix international de Géométrie. Ce prix, qui sera appelé Médaille Guccia (du nom de son fondateur), consistera en une petite médaille portative en or et en une somme de 3000^fr^.

On sait que, depuis les travaux auxquels a donné lieu le Prix Steiner décerné en 1882, la théorie des courbes gauches algébriques a été plutôt délaissée, et que même les grands progrès de la Géométrie moderne, obtenus par des méthodes synthétiques, ou algébriques, ou fonctionnelles, ont laissé de côté cette théorie; de sorte que les questions fondamentales, que l'on avait abordées dans les travaux cités, et d'autres questions encore qu'on pourrait se poser, n'ont pas fait l'objet de travaux ultérieurs. Si d'ailleurs on passe de l'espace ordinaire aux espaces supérieurs, on rencontre pour les courbes algébriques (en particulier pour leur classification, pour l'étude des courbes canoniques de genre donné, etc.) une foule de questions importantes dont personne encore ne s'est occupé. D'autre part, on connaît bien peu de propositions sur les courbes gauches algébriques obtenues en se limitant au champ réel, ou bien à un champ rationnel donné.

C'est en s'inspirant de ces considérations (mais sans vouloir d'ailleurs limiter d'avance, en aucune manière, les problèmes et les méthodes de recherche) que le *Circolo matematico di Pa-*

lermo, conformément aux intentions du fondateur du prix, décernera la MÉDAILLE GUCCIA à

Un Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.

Dans le cas où, parmi les travaux envoyés au concours, aucun Mémoire relatif à la théorie ci-dessus ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à

Un Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.

Les Mémoires destinés au concours devront être : inédits, rédigés en italien, ou français, allemand, anglais, et écrits (sauf les formules) avec la machine à écrire. Munis d'une épigraphe, ils devront parvenir, en trois exemplaires, au Président du *Circolo matematico di Palermo* **avant le 1er juillet 1907**, accompagnés d'un pli cacheté contenant sur l'enveloppe l'épigraphe adoptée et à l'intérieur le nom et l'adresse de l'auteur. Le Mémoire couronné sera inséré dans les *Rendiconti* ou autre publication du *Circolo matematico di Palermo*. L'auteur en recevra 200 tirages à part.

Dans le cas où aucun des Mémoires présentés au concours ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à un Mémoire, sur les théories ci-dessus, qui aura été publié après la publication de ce programme et avant le 1er juillet 1907.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LORENZ (L.). — Œuvres scientifiques, revues et annotées par *H. Valentiner*. Tome II, deuxième fascicule. In-8°, XXII-230 pages. Copenhague, Lehmann et Stage, 1905.

Dans les Volumes précédents du *Bulletin* nous avons déjà annoncé la publication du premier Volume et du premier fascicule du Tome second de cette belle et utile publication. Le fascicule qui la termine et dont nous avons à rendre compte aujourd'hui est orné d'un beau portrait de Lorenz et précédé d'une Notice extrêmement intéressante sur la vie et les travaux de l'illustre physicien géomètre, due à la plume de l'éditeur même de cette publication, M. H. Valentiner. Cette Notice non seulement nous fait connaître le cours de la carrière si simple et si unie de Lorenz, mais elle est accompagnée d'une analyse critique et détaillée de chacun des Mémoires qui sont compris dans la publication. Personne ne pouvait écrire une telle Notice avec plus de compétence que M. H. Valentiner, le dévoué et habile commentateur de l'Ouvrage.

Cette dernière partie des Œuvres de Lorenz se signale surtout à l'attention des savants par quelques Mémoires purement mathématiques dont plusieurs présentent un réel intérêt.

Nous signalerons, en particulier, un travail sur le développement des fonctions arbitraires au moyen de fonctions données et des recherches analytiques sur les nombres de nombres premiers qui se rattachent aux résultats de Riemann.

Un mot en terminant. C'est grâce à la fondation Carlsberg que Lorenz put, vers la fin de sa vie, se livrer, sans préoccupation d'aucune sorte, aux recherches de Science pure qui ont si efficacement contribué aux progrès de la Physique mathématique. C'est grâce à cette fondation que M. H. Valentiner a pu réunir et publier les deux Volumes dont nous avons rendu compte. Tous ceux qui

sont au courant de l'histoire récente des Lettres et des Arts en Danemark savent combien les fondations accomplies par les membres d'une même famille ont contribué aux progrès de la culture intellectuelle et artistique dans ce pays. G. D.

BRANISLAV PETRONIEVICS. — Principien der Metaphysik. I. Band, I. Abtheilung : Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien, mit einem Anhang : Elemente der neuen Geometrie. In-8°, XXXI-447 pages. Heidelberg. Winter. 1904.

L'auteur pense que le divorce de la Mathématique et de la Métaphysique a pour cause le fait que la première est infinitiste et la seconde finitiste ; et il veut faire cesser ce divorce, non pas, comme on pourrait le supposer, en réhabilitant l'infinitisme en Métaphysique, mais au contraire en introduisant le finitisme en Mathématique. Le volume présent (qui ne constitue que le quart de l'œuvre totale) se compose de deux parties bien distinctes : une partie métaphysique et une partie mathématique. Dans la première, il essaie d'établir que le temps et l'espace ne sont rien plus que des ordres (de succession ou de coexistence) et n'existent pas en dehors des objets ordonnés. Par suite, il n'y a ni temps ni espace vides ; et l'auteur opte en faveur des « thèses » des antinomies kantiennes : le temps et l'espace sont finis, et composés d'un nombre fini d'éléments. Cela résulte logiquement, selon lui, de la triple contradiction qu'enferme la notion d'infini : contradiction du nombre infini ; contradiction de la « finitude » de l'infini : contradiction du passage brusque du fini à l'infini. Les difficultés qu'on a toujours trouvées à concevoir l'espace et le temps comme discontinus sont levées, si l'on admet, avec l'auteur, qu'il y a deux espèces d'éléments simples (points ou instants) : des éléments réels, qui ont une étendue (égale à 1) ; et des éléments irréels, dont l'étendue est égale à 0, et qui servent à séparer les précédents. Cette hypothèse permet de concevoir comment les points peuvent se toucher sans coïncider, et sans comporter de

parties : entre deux points réels qui se touchent il y a un point irréel, inétendu, que l'auteur conçoit comme « un acte de négation du réel ». Dans un espace composé d'un nombre fini de points, il ne peut évidemment pas y avoir de lignes courbes. Si nous voyons des lignes courbes, c'est parce que nous ne percevons pas les points réels, mais seulement les figures complexes et confuses qu'ils forment. En revanche, les lignes irrationnelles sont parfaitement possibles dans l'espace discontinu ; l'auteur soutient même qu'elles ne sont possibles que là, et qu'elles deviennent rationnelles dans le continu (!).

Voici maintenant les principes de la « nouvelle Géométrie » : deux points ont un contact « réel » s'ils ne sont séparés que par un point irréel; ils ont un contact imaginaire s'ils sont séparés par un point réel, c'est-à-dire si leur distance est supérieure au minimum. Une ligne est un ensemble de points qui se touchent; une droite est une ligne dont chaque point ne touche qu'un de ceux qui le précèdent (et un de ceux qui le suivent). Une droite est réelle, si les contacts de tous ses points sont réels; imaginaire, si quelques-uns de ces contacts sont imaginaires. Cela posé, imaginons le plan comme un réseau de points formant des triangles équilatéraux : c'est le plan « triangulaire ». L'élément du plan est un triangle dont les trois sommets se touchent. D'un point quelconque partent trois droites (ou six demi-droites) réelles, et une multitude de droites imaginaires (qui le joignent à tous les points de l'espace qui ne le touchent pas). Dans l'angle formé par deux droites, il y a une « imaginaire principale », qu'on nomme vulgairement *la bissectrice* de cet angle. L'auteur prétend démontrer que deux droites de direction différente se rencontrent toujours; mais ce n'est qu'à la condition de dire que deux droites se rencontrent quand elles se traversent sans avoir un point commun. Il tâche ensuite de transformer son plan triangulaire en plan « quadratique », dont l'élément soit le carré. Pour cela, il considère les six angles formés par les « demi-droites réelles » issues d'un même point, et il en fait quatre en menant la bissectrice de deux d'entre eux; puis il transforme cette droite imaginaire en droite réelle, par une translation mystérieuse, et du même coup le plan triangulaire se trouve transformé en plan quadratique (en un quadrillé de points). Chaque point n'a plus que quatre points conti-

gus, au lieu de six, et ne donne naissance qu'à deux droites réelles au lieu de trois. Les angles réels sont droits, et non plus de 60°; etc. Dans le plan triangulaire, il n'y a pas d'autres polygones réguliers possibles que le triangle et l'hexagone; dans le plan quadratique, il n'y a de possible que le carré. On conçoit aisément l'extension de cette géométrie finitiste à l'espace à 3, et même à 4, ..., à n dimensions. L'espace (à 3 dimensions) tétraédrique est impossible; l'espace cubique est seul possible. Dans cet espace, les seuls polyèdres réguliers simples (formés de points contigus) sont le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre; mais le seul polyèdre régulier composé est l'hexaèdre. Les propositions analogues pour l'espace à 4, ..., à n dimensions ne sont pas dépourvues d'intérêt. Mais ce que nous venons de dire suffit pour qu'on puisse juger cette « nouvelle Géométrie » au point de vue philosophique. Il était intéressant de tirer du « finitisme » toutes ses conséquences scientifiques; à cet égard, le travail de M. Petronievics ne sera pas inutile, car il constitue une sorte de réduction à l'absurde du finitisme, qui en est peut-être la meilleure réfutation. Ajoutons qu'il n'est pas permis de publier un volume de cette étendue (qui, de l'aveu de l'auteur, peut être regardé comme un Ouvrage complet) sans Table des Matières, sans divisions et sans titres courants. L. COUTURAT.

FORSYTH SCOTT (R.). — THE THEORY OF DETERMINANTS AND THEIR APPLICATIONS. Second édition; Revised by *G. B. Matthews*. 1 vol. in-8°; XI-285 pages. Cambridge University press, 1904.

M. Mathews, en revoyant la seconde édition de cet excellent livre, et en la complétant sur quelques points essentiels, a pris grand soin de ne pas en changer le caractère et de ne pas le grossir sensiblement. Pour échapper à cette dernière tentation, lorsqu'on reprend un livre au bout de quelques années, il faut quelque courage, même lorsque ce livre contient réellement ce qui est essentiel; malgré tout, des faits importants se sont ajoutés

à ceux que l'on connaissait lorsque le livre avait été composé; il est parfois assez difficile de discerner ceux de ces faits qu'il faut faire pénétrer dans le livre qu'on revise, et, pour leur faire place, les pages de l'ancienne édition qu'on peut sacrifier sans trop d'inconvénient. On jugera sans doute que M. Mathews s'est fort bien acquitté de cette tâche délicate.

Le point de départ de l'exposition de M. Forsyth Scott est dans la définition d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre comme produit symbolique de n facteurs linéaires; l'auteur a montré comment cette définition se prête à la démonstration rapide et élégante de la plupart des propriétés importantes des déterminants, comment, d'autre part, elle se prête facilement à une extension de la notion de déterminant (déterminants cubiques, etc.). Il n'y a aucune difficulté à reconnaître le double avantage de ce point de vue. Quant à la façon dont cette définition est acceptée et comprise par le lecteur qui débute dans l'étude de cette théorie, c'est un point sur lequel il convient peut-être de consulter l'expérience, sans se prononcer *a priori*, et, d'ailleurs, je ne serais pas très étonné si les résultats de l'expérience n'étaient pas concordants : les uns sont, plus que les autres, rebelles au symbolisme; quelques-uns, qui ne se contentent point des commodités qu'il apporte, y répugnent peut-être trop, parce qu'ils y cherchent une signification profonde, qu'il ne recouvre pas toujours, et la raison de conventions, dont on ne s'arrête pas suffisamment à montrer qu'elles sont légitimes et arbitraires.

Quoi qu'il en soit, dans le cas particulier qui nous occupe, dès que la définition est accordée, les propriétés fondamentales des déterminants se déroulent d'une façon vraiment facile et naturelle dans les cinq ou six premiers Chapitres, et ceux mêmes des lecteurs qui sont familiers avec ces propriétés auront plaisir à en relire la déduction dans le livre de M. Forsyth Scott.

Après cette exposition, M. Mathews a introduit un Chapitre contenant les propositions les plus importantes de la théorie des diviseurs élémentaires; le lecteur ne pouvait être introduit dans cet important sujet d'une façon plus claire et plus facile.

Un Chapitre est ensuite consacré aux déterminants d'une forme spéciale. Il me semble que l'on aurait pu, à propos des déterminants symétriques, signaler la belle proposition de Kronecker sur

les relations entre les mineurs d'un pareil déterminant. La partie la plus importante de ce Chapitre se rapporte aux propriétés des déterminants gauches et des pfaffiens.

La première Partie du livre se termine par un intéressant Chapitre, dû à M. Mathews, sur les déterminants infinis.

Ensuite viennent les *Applications*. C'est d'abord la théorie des équations linéaires, les méthodes d'élimination de Sylvester et de Bézout, des exemples de déterminants dont les éléments sont des polynomes (Vandermonde, etc.) ou des fractions rationnelles, deux importants Chapitres consacrés, l'un aux propriétés des jacobiens et des hessiens, l'autre aux formes bilinéaires et quadratiques; un autre se rapporte aux propriétés de ce déterminant formé au moyen de n fonctions d'une variable et de leurs $n-1$ premières dérivées qui tient un rôle si important dans la théorie des équations différentielles linéaires; un autre, aux fractions continues; le dernier enfin, à ces nombreuses formules de trigonométrie ou de géométrie analytique que l'emploi des déterminants permet de condenser sous une forme particulièrement élégante.

En résumé, les lecteurs trouveront dans ce Livre une exposition rapide et élégante de la théorie des déterminants, poussée plus loin que les dimensions du livre ne le feraient supposer tout d'abord; un très grand nombre de faits intéressants, les plus belles et les plus importantes applications de cette théorie, développées avec mesure : c'est tout ce qu'il faut pour assurer le succès de cette seconde édition. J. T.

EMILE BOREL. — LEÇONS SUR LES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES ET LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE POLYNOMES, rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes de *Paul Painlevé* et *Henri Lebesgue*. 1 vol in-8°, VIII-160 pages. Gauthier-Villars, 1905.

La publication du petit livre de M. Borel est pour nous un plaisir annuel : nous savons qu'une nouvelle route est ouverte qui nous conduira sans trop d'efforts jusqu'aux recherches les plus

récentes dans le domaine où elle est frayée, et, qu'à faire cette route avec M. Borel, elle nous paraîtra plus agréable et plus courte. Elle sera favorable aussi à la réflexion et c'est un des grands attraits de ces monographies que leur lecture, pour être facile, ne soit pas moins suggestive. Je ne pourrai, à propos de chaque théorie, dire la part qui revient à l'auteur dans son développement ou son exposition : celle-ci est presque toujours simplifiée et éclaircie, les éléments importants y sont mis en évidence de telle sorte que c'est tantôt le fait mathématique qui est en relief, et tantôt la méthode qui l'a fait apparaître. La leçon philosophique qui se dégage des recherches n'est jamais oubliée pour le plus grand profit de ceux qui « veulent réfléchir sur leur art ». Enfin, l'Ouvrage se termine par deux Notes importantes de MM. Painlevé et Lebesgue qui apportent, dans une innovation heureuse, un grand élément d'intérêt.

Il s'agit, dans ces Leçons, des séries convergentes de fonctions de variables réelles. Les fonctions définies comme sommes de séries ou, ce qui revient au même, comme limites de suites de fonctions même très élémentaires, offrent une grande généralité, et l'étude de leurs propriétés exige la définition précise et complète des propriétés des fonctions relatives à la continuité, à la dérivation, à l'intégration. On sait la netteté qu'apportent dans ces questions les notions relatives aux ensembles de points : aussi, M. Borel reprend-il tout d'abord ces notions en nous faisant bénéficier des progrès que la théorie des ensembles a faits dans ces dernières années. Il rapproche de l'idée de point limite celle, introduite par M. Ernst Lindelöf, de *point de condensation* : on appelle ainsi un point tel que toute sphère dont il est le centre contienne une infinité non dénombrable de points de l'ensemble; tout ensemble infini possède un point limite au moins, tout ensemble infini non dénombrable possède un point de condensation au moins. La notion de point de condensation conduit à une démonstration très simple du théorème de MM. Cantor et Bendixson sur la décomposition de tout ensemble fermé de points en la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait. L'introduction des nombres transfinis est évitée, et ne devient nécessaire que si l'on veut établir que l'ensemble parfait est obtenu par des dérivations successives.

Viennent ensuite l'étude de la construction des ensembles parfaits linéaires non denses à partir de l'ensemble dénombrable de leurs segments contigus, celle de leur puissance, faite en établissant une correspondance effective entre leurs points et ceux d'un continu, celle de leur mesure et, plus généralement, des ensembles mesurables que l'on obtient par des sommes algébriques d'ensembles parfaits en nombre fini ou infini et qui comprennent tous les ensembles que l'on peut effectivement former. Toute cette théorie est dominée par une proposition qui joue un rôle important dans bien des problèmes relatifs aux ensembles et aux fonctions et dont M. Borel, qui en a d'abord démontré un cas particulier, et M. Lebesgue ont donné des généralisations : Si l'on a sur un segment une infinité d'intervalles tels que chaque point du segment soit intérieur à l'un d'eux au moins, on peut choisir un nombre fini de ces intervalles pour recouvrir entièrement le segment et le déborder. M. Borel définit ensuite et étudie les ensembles limites complet et restreint d'une suite dénombrable d'ensembles : le premier est formé par les points communs à une infinité d'ensembles de la suite, le dernier par les points communs à tous les ensembles qui restent dans la suite après la suppression d'un nombre fini d'ensembles de cette suite; il s'occupe enfin des ensembles linéaires formés par la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses, que M. Baire a appelés *ensembles de première catégorie*.

On reprend alors les notions d'oscillation et de continuité en un point d'une fonction, celles de continuité uniforme, celles de nombres dérivés, et enfin, celles d'intégrale avec la belle généralisation de M. Lebesgue qui a étendu si loin le champ des fonctions intégrables.

Le terrain ainsi préparé, M. Borel aborde l'étude des séries supposées convergentes dont les termes sont des fonctions de variables réelles. On peut se poser au sujet de ces séries deux groupes de questions : 1° étude des propriétés de la somme, lorsqu'on connaît les propriétés des termes : le problème de M. Baire pour les séries de fonctions continues rentre dans ce cas. 2° Étude du mode particulier de convergence auquel doit être assujettie une série de fonctions de propriétés connues pour que la somme possède des propriétés données. Les problèmes de MM. Arzelà et

Osgood relatifs aux cas où les termes et la somme sont des fonctions continues ou intégrables appartiennent à cette seconde catégorie. Ce sont ces questions qui se ramènent souvent au problème général de l'interversion dans la double limite que l'auteur étudie d'abord.

Une série de fonctions continues étant convergente, à quelles conditions la somme représentera-t-elle une fonction continue? Cette question a fait l'objet des recherches de MM. Osgood et Arzelà et a été complètement résolue par ce dernier géomètre. La convergence doit être quasi-uniforme; voici le sens de cette expression : il résulte de la convergence de la série que, pour chaque valeur de la variable, on peut prendre un nombre assez grand n de termes pour que l'erreur commise en substituant la somme de ces termes à celle de la série ne dépasse pas une limite arbitrairement assignée : en général, le nombre n varie avec la valeur de la variable, la convergence est quasi-uniforme lorsqu'il suffit d'un nombre fini de valeurs de n pour toutes les valeurs de la variable, chaque valeur de n convenant à un petit intervalle partiel dans le segment où se meut la variable. En particulier, s'il suffit d'une seule valeur de n, la convergence est simplement uniforme. Une série de fonctions intégrables étant convergente, la somme est-elle une fonction intégrable? lorsqu'il en est ainsi, l'intégrale de la somme est-elle la somme des intégrales des termes? M. Borel étudie les réponses que MM. Arzelà et Lebesgue ont données à ces questions.

Toute série uniformément convergente de fonctions continues représente une fonction continue : la réciproque de ce théorème, quand on suppose que les termes de la série sont des polynomes, est la proposition de Weierstrass. M. Borel fait connaître plusieurs démonstrations de cette proposition qui, en dehors de leur intérêt historique, se recommandent par leur principe ou leur simplicité : il les range en deux catégories, la première comprenant les démonstrations où interviennent des notions transcendantes (Weierstrass, MM. Picard et Volterra), la seconde contenant celles d'un caractère élémentaire (MM. Mittag-Leffler, Lebesgue). Après l'extension des résultats aux fonctions de plusieurs variables, on étudie la possibilité de représenter des fonctions dérivables par des séries dérivables terme à terme : on peut

se servir de séries de polynomes, mais M. Borel montre qu'on peut représenter toute fonction indéfiniment dérivable par la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier qui présentent sur les séries de polynomes l'avantage de mettre en évidence les propriétés de dérivabilité. L'auteur traite la question de savoir si, dans le théorème de Weierstrass, on peut prendre, comme termes de la série, les polynomes que fournit la méthode d'interpolation de Lagrange. Il fait voir que les polynomes formés par cette méthode ne convergent pas nécessairement vers la fonction, mais qu'il est possible de modifier le procédé d'interpolation de façon à obtenir des polynomes qui convergent. Comparant ensuite les méthodes de représentation d'une fonction continue par une série de polynomes à celles qui permettent de représenter un nombre quelconque par une série de nombres rationnels, il introduit les polynomes de Tchebicheff dont la propriété, analogue à celle des réduites des fractions continues, est de représenter, pour chaque degré, la fonction continue, avec une approximation supérieure à celle que donnerait tout autre polynome du même degré.

Le dernier Chapitre est consacré au théorème de M. Baire sur les conditions que doit remplir une fonction pour être la limite d'une suite de fonctions continues. M. Borel donne des démonstrations simples de la possibilité d'obtenir certaines fonctions discontinues comme limites de fonctions continues. Le théorème général de M. Baire est établi dans une Note très élégante de M. Lebesgue. Si l'on appelle *fonctions de première classe* les limites de fonctions continues, fonctions de deuxième classe les limites de fonctions de première classe, etc., on peut faire correspondre une classe de fonctions à chaque nombre entier et, plus généralement, à chacun des symboles transfinis de M. Cantor. Dans une courte Note, M. Borel montre qu'il n'est pas possible d'épuiser l'ensemble des fonctions que l'on peut effectivement définir en prenant toutes celles dont la classe ne dépasse pas un nombre donné.

La Note de M. Painlevé étudie la représentation des fonctions analytiques par des sommes de séries de polynomes en z. Une fonction analytique étant définie par la suite des coefficients de son développement en série de Taylor autour d'un point régulier, les polynomes de M. Mittag-Leffler, qui dépendent linéairement

de ces constantes, représentent la fonction dans l'étoile d'holomorphie. Par une méthode simple et générale, reposant sur la représentation conforme, M. Painlevé montre la possibilité de construire une infinité de tels développements et fait le calcul explicite des polynomes et de la grandeur de l'approximation pour le développement obtenu d'abord par M. Fredholm qui est un des plus simples que l'on connaisse. Des transformations élémentaires effectuées sur ces développements en donnent une infinité de nouveaux; des généralisations de la méthode permettent de remplacer l'étoile rectiligne par des étoiles curvilignes ou d'autres étoiles rectilignes dont les droites frontières ne concourent plus. Après avoir établi les résultats remarquables auxquels conduit l'application de cette méthode au domaine réel, M. Painlevé étudie des cas étendus où les polynomes convergent vers la fonction, même sur les droites frontières, exception faite des points singuliers. Les résultats s'étendent aisément au cas de plusieurs variables complexes ou aux développements des fonctions harmoniques en séries de polynomes harmoniques.

PAUL MONTEL.

HERMANN GRASSMANN'S GESAMMELTE MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren *J. Lüroth, E. Study, J. Grassmann* der Jüngere, *G. Scheffers*, herausgegeben von *F. Engel*. II. Band, I. Theil : DIE ABHANDLUNGEN ZUR GEOMETRIE UND ANALYSIS; II. Theil : DIE ABHANDLUNGEN ZUR MECHANIK UND ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK. 2 vol. gr. in-8°, X-451 pages et VIII-264 pages. Leipzig, Teubner, 1904 et 1902.

La publication des Œuvres de Grassmann se poursuit avec lenteur; mais cette lenteur s'explique par les soins qu'apportent l'éditeur, M. Engel, et ses dévoués collaborateurs à l'œuvre qu'ils ont entreprise. Rien n'est négligé par eux de tout ce qui peut accroître la valeur de l'édition; ce sera un travail définitif, un véritable monument élevé à la mémoire du penseur profond qu'a

été Grassmann. Grâce à eux sansdoute, les idées si originales que l'éminent géomètre a semées de son vivant dans ses écrits apparaîtront dans leur suite naturelle et exerceront sur le développement futur de la Géométrie toute l'influence à laquelle elles ont le droit de prétendre.

La première Partie du Tome II, publiée par MM. Study, Scheffers et Engel, contient les Mémoires sur la Géométrie et l'Analyse que Grassmann a publiés de son vivant et, en outre, quelques parties de deux Traités élémentaires d'Arithmétique et de Trigonométrie; elle est accompagnée de Notes étendues relatives aux divers Mémoires et de Tables très complètes et très bien ordonnées.

La seconde Partie du même Tome contient d'abord les Mémoires de Mécanique analytique publiés par M. Lüroth, puis une partie des Mémoires de Physique mathématique dont M. Engel a plus particulièrement dirigé la réimpression.

La publication se terminera avec le troisième Volume qu'attendent avec impatience tous les amis de la Géométrie et qui doit contenir une biographie de Grassmann. G. D.

DOBRINER (Dr H.). — THEORIE DER FLAECHEN MIT EBENEN UND SPHOERISCHEN KRUMMUNGSLINIEN. In-8°, 56 pages. Francfort-sur-Main, Druckerei Gebrüder Sey.

Ce petit travail est malheureusement le dernier d'un géomètre qui s'était fait connaître par des recherches intéressantes sur les surfaces à lignes de courbure sphériques. M. Dobriner s'était proposé de déterminer toutes les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques qui sont en même temps des surfaces de Weingarten, c'est-à-dire pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. Malheureusement sa mort prématurée l'a empêché de mettre la dernière main à cette recherche intéressante, et la solution du problème n'est donnée d'une manière réellement complète que pour les surfaces à lignes de

courbure planes. M. Epstein, qui a bien voulu se charger de mettre au point et de préparer pour l'impression le manuscrit de M. Dobriner, insiste avec raison sur l'intérêt de la recherche et l'élégance des résultats relatifs aux cas des lignes de courbure planes. En dehors des solutions déjà connues, M. Dobriner avait obtenu deux solutions nouvelles. Les surfaces correspondantes à la première se déterminent complètement à l'aide de séries hypergéométriques particulières; les surfaces qui composent la deuxième sont parallèles à des surfaces de Joachimsthal et, à ce titre, ont été aussi obtenues par M. Raffy dans une étude insérée récemment au Tome XX des *Annales de l'École Normale supérieure* (3e série). G. D.

Atti del Congresso internazionale di Scienze storiche (Roma, 1-9 aprile 1903); Volume XII. Atti della Sezione VIII; Volume XII : Storia delle Scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche. 1 vol. in-8°; xxiv-330 pages. Roma, Tipografia della R. Accademia dei Lincei; 1904.

Les lecteurs du *Bulletin* regretteront assurément que Paul Tannery, qui a pris une part si active aux travaux du Congrès des Sciences historiques de Rome, ne soit plus là pour rendre compte de ces travaux. Au lieu d'un récit vivant, d'une parole autorisée, de vues personnelles, ils n'auront qu'une sèche nomenclature. Le *Bulletin* doit toutefois extraire au moins de ces *Atti* les sujets des Communications qui se rapportent à l'histoire des Mathématiques.

La huitième Section du Congrès a tenu neuf séances où ont été lus et discutés des Rapports et des Communications d'un grand intérêt concernant les Sciences physiques, mathématiques, naturelles et médicales.

M. E. Millosevich a développé le thème suivant :

L'iconographie des éclipses de soleil contenue dans l'admirable Canon des éclipses de T. Oppolzer ne peut servir dans les recherches historiques pour la vérification des dates. Le récent tra-

vail de F.-K. Ginzel contient un atlas des éclipses de soleil, totales et annulaires, pour la région de la civilisation classique ancienne et pour l'intervalle de — 900 à + 600. Il répond aux besoins des historiens. Il semblerait opportun de publier à part l'atlas avec une préface explicative, d'autant que l'œuvre classique de Ginzel est technique pour la plus grande partie, qu'elle est relativement coûteuse et peu connue, notamment dans le monde des historiens. La reproduction devrait en outre contenir les dates des éclipses de lune visibles à Rome, Athènes, Memphis et Babylone pour la période susdite, quand l'éclipse, dans sa phase maximum, atteignait le tiers du diamètre de la Lune.

Paul Tannery, après avoir rappelé le vœu que le Congrès international d'histoire comparée de Paris (1900) avait voté à l'unanimité pour l'introduction d'éléments d'histoire des Sciences dans les lycées, la création de chaires d'histoire des Sciences dans les universités et d'un diplôme correspondant, a développé sa conception propre de l'histoire générale des Sciences, opposée dans quelque mesure à la conception de l'histoire des Sciences particulières, qu'elle implique toutefois; il a parlé de l'organisation d'une Revue correspondant à cet ordre d'idées. Il a étudié aussi l'histoire des mots *analyse* et *synthèse* en Mathématiques. Cette belle étude se retrouve en partie dans les *Notions de Mathématiques et notions historiques* qu'il a publiées avec son frère.

MM. D. Barbazzi, P. Giacosa, G. Loria ont insisté avec éloquence sur l'utilité de l'histoire des Sciences positives et se sont étonnés, à bon droit, que cette histoire ne fût pas enseignée en Italie alors qu'on y enseignait l'histoire du droit romain et du droit italien, l'histoire comparée des langues classiques et de la littérature néo-latine, l'histoire de l'art, l'histoire de la philosophie et des doctrines économiques; ils demandent une légère modification aux règlements universitaires, afin de permettre l'organisation de cours libres, dans les universités et facultés, sur l'histoire des Sciences, séparées ou par groupe. Sur la demande de M. S. Günther, les diverses propositions relatives à l'organisation de l'histoire des Sciences ont été renvoyées à une sous-commission.

M. Giacosa a montré l'utilité qu'il y aurait à constituer un catalogue complet des manuscrits scientifiques qui existent dans les bibliothèques et les archives du royaume d'Italie.

M. Gino Loria a fait voter un vœu pour la publication (nationale) des œuvres d'Evangelista Torricelli, tant de celles qui ont déjà été imprimées que de ceux des manuscrits qui en valent la peine. Cette publication honorerait assurément le Gouvernement italien et continuerait heureusement celle des œuvres de Galilée. Il a résumé un important travail de M. G. Eneström sur les diverses manières de comprendre et d'écrire l'histoire des Mathématiques et a saisi cette occasion pour rendre hommage au dernier livre de M. Zeuthen sur les Mathématiques au XVIIe et au XVIIIe siècles, exposées historiquement. Il a lu enfin une Communication, sur Gerolamo Cardano, de M. M. Cantor, que son état de santé retenait à Heidelberg. M. Cantor a eu la coquetterie de ne pas parler de Cardan comme mathématicien; il avait d'ailleurs bien le droit, sur ce sujet, de renvoyer ses auditeurs à ses *Vorlesungen;* mais il a retracé avec humour la vie étrange de ce médecin qui avait « du génie, mais pas de caractère » et dont le nom reste attaché à un joint mécanique et à une formule qui ne lui appartient pas. Assassinats, évasions, erreurs judiciaires, astrologie, il y a tout ce qu'il faut pour épicer ce curieux roman historique.

C'est d'une autre façon que la vie des Bolyai fut dramatique et agitée; elle est pourtant bien passionnante et angoissante : ceux qui lisent la correspondance de Wolfgang Bolyai et de Gauss ne peuvent s'empêcher de ressentir une grande sympathie pour cet ami fidèle, ce poète, ce mathématicien, qui s'attaquait a de belles questions, et qui aurait été récompensé de ses efforts méritoires par la découverte de son fils, si cette découverte même n'avait pas contribué à développer chez son auteur les germes d'une folie qu'il tenait sans doute d'une mère hystérique, dont la figure, entrevue à travers la correspondance, n'est pas sans inquiéter le lecteur, devenu naturellement l'ami de Wolfgang Bolyai. On se prend à regretter que les pages attachantes où M. Darvai a retracé rapidement la vie de Jean Bolyai soient si courtes.

M. G. Wacca a fait une Communication sur l'histoire de la numération binaire et sur le parti qu'on peut tirer de cette numération.

M. Ernest Lebon a exposé le plan d'une bibliographie analytique des écrits contemporains sur l'histoire de l'Astronomie, qui commencerait en 1846, et où seraient groupés les écrits dans l'ordre de filiation des idées qui y sont émises.

M. E. Lampe a parlé de ce *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qu'il dirige depuis de longues années et dont tous les mathématiciens connaissent l'extrême utilité.

M. F. Müller a apporté d'intéressants renseignements sur les journaux mathématiques. Il y en a aujourd'hui plus de six cents et il importe à ceux qui étudient les Mathématiques de savoir se débrouiller dans cette littérature. Plus de trois cents se trouvent déjà cités dans ce qui a paru de l'*Encyclopädie der Mathematik*. M. F. Müller étudie en particulier ceux qui ont paru entre 1665 (date de la publication du *Journal des Sçavants*) et les premières années du XIXe siècle.

M. A. von Braunmühl s'est occupé de l'histoire du Calcul intégral. Il a montré comment Newton a appris à intégrer les fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{a + bx + cx^2}$ d'après les méthodes qui ont été reprises par son disciple et ami E. Cotes. Celui-ci ne s'est pas borné au rôle de commentateur; il a développé et renouvelé les procédés newtoniens, en les combinant avec des idées originales et importantes, et en exprimant des vues profondes qui furent retrouvées beaucoup plus tard par M. Félix Klein, lequel les a prises pour point de départ de ses belles recherches sur la Géométrie non euclidienne.

M. Sigismond Günther a parlé du *bâton de Jacob* ou *radius astronomicus*, dont l'invention a été attribuée longtemps à Regiomontanus, d'autant que celui-ci s'en est servi, et n'a jamais fait mention de ses prédécesseurs, dans cet usage. M. Petz, de Munich, a découvert dans la bibliothèque de cette ville un traité manuscrit du juif catalan Levi ben Gerson sur le *radius astronomicus*. Au reste, les Anciens connaissaient cet instrument : Archimède montre dans son arénaire comment il peut servir à mesurer le diamètre apparent du Soleil : la διόπτρα d'Hipparque repose sur le même principe, elle est d'ailleurs bien adaptée aux usages astronomiques.

Une curieuse Communication de M. G. Uzielli se rapporte à un système de mesures employé pendant le moyen âge en Italie et dont les éléments étaient tirés du corps du Christ.

M. R. Amalgià s'est occupé de la théorie des marées chez les Anciens, et des manuscrits de Leonardo Ximenes; M. A. Mori, de la bibliographie géodésique en Italie; M. G. Pittarelli du livre de Pier dei Franceschi sur la perspective.

M. G. Vailati, en étudiant la controverse récente entre MM. Mach et Hölder sur la valeur de la démonstration du principe du levier qu'a donnée Archimède, s'est montré aussi pénétrant philosophe que savant historien.

M. V. Tonni-Bazza a donné les résultats fragmentaires de nouvelles recherches relatives à la vie et aux écrits de Nicolo Tartaglia. Un portrait de Tartaglia, la photographie d'une page de l'un de ses manuscrits sont joints à sa Communication.

On voit, par ce court résumé qui ne concerne que les Mathématiques, quelle a été l'activité de la huitième Section du Congrès international des Sciences historiques. Parmi les Communications relatives aux autres Sciences, je ne puis m'empêcher de citer, en raison de l'intérêt qu'elle offre pour la France, celle de M. I. Guareschi sur les accusations de plagiat dont Lavoisier a été l'objet.

J. T.

MULLER (C.-H.) et PRESLER (O.). — Leitfaden der Projektions-Lehre. Ein Uebungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen; mit 203 figuren im Text. 1 vol. in-8°, VI-320 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

J'ai eu plus d'une fois l'occasion de signaler l'intérêt et le profit qu'on trouve à parcourir les Livres d'enseignement des pays que l'on n'habite pas. Les professeurs français qui voudront lire le livre de MM. Müller et Presler seront certainement frappés par les tendances *réalistes* qui y dominent. C'est des corps réels qu'ils apprennent à dessiner : les exemples sont choisis dans les divers ordres de sciences; ils sont assez simples d'ailleurs pour que les étudiants ne soient pas découragés par la difficulté, la longueur ou la complication des constructions graphiques; ils sont toujours intéressants.

Le Livre est divisé en deux Parties : la première se rapporte à cette projection parallèle qui sert à faire tous les dessins scientifiques, sur le papier, ou le tableau noir, et dont cependant on ne

parle guère aux élèves; la seconde Partie est relative à la projection normale. Sans doute, un étudiant qui a bien compris les notions de Géométrie descriptive que l'on enseigne dans nos lycées n'éprouvera aucune difficulté théorique à traiter les problèmes dont la solution est développée dans ce *guide* : encore hésitera-t-il souvent devant l'exécution de la plupart de ces dessins. Je signalerai en particulier ceux qui se rapportent à certaines figures classiques de la Géométrie dans l'espace ou de Cosmographie, à quelques formes cristallines simples, aux alvéoles d'abeilles, etc., et, dans la seconde Partie, les épures relatives aux polyèdres, à leurs sections planes, à leurs intersections mutuelles, aux ombres, aux cartes géographiques; enfin le Chapitre final relatif à la projection centrale, et les additions concernant les autres modes de projection pour les cartes géographiques. Le Volume se termine par deux appendices qui contiennent de nombreux éclaircissements théoriques, historiques ou bibliographiques sur les sujets traités dans le texte. J. T.

OCAGNE (M. D'). — LE CALCUL SIMPLIFIÉ PAR LES PROCÉDÉS MÉCANIQUES ET GRAPHIQUES. HISTOIRE ET DESCRIPTION SOMMAIRE DES INSTRUMENTS DE MESURE ET MACHINES A CALCULER, TABLES, ABAQUES ET NOMOGRAMMES. 2e édition. 1 vol. in-8°, VI-228 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition de cet intéressant Livre, où l'on trouve des renseignements qu'il est vraiment difficile d'aller chercher ailleurs.

L'auteur a pu profiter, pour la compléter sur quelques points, du Livre russe de M. von Bohl sur les appareils et machines pour le calcul mécanique (Moscou, 1896) et du *Katalog mathematischer und mathematical-physikalischer Modelle* de M. W. Dick (1892-1893), du bel article de M. R. Mehmke sur le calcul numérique dans l'Encyclopédie mathématique. Enfin, il n'était que juste de donner aux procédés nomographiques, qui prennent chaque jour plus d'importance et d'extension, une place un peu plus large

que celle où la modestie de l'auteur avait resserré l'explication sommaire des plus simples de ces procédés.

Deux Notes terminent le Volume : l'une figurait déjà dans la première édition : c'est celle où M. Maurice d'Ocagne donnait la première description complète de la machine de Tchebychef. La seconde se rapporte à la machine à différences de G. et E. Scheutz. L'auteur y expose un ingénieux procédé, dû à M. le lieutenant-colonel Bertrand, qui permet de se rendre compte du jeu de la machine en développant sur un plan les organes tournants.

Les nombreux renseignements historiques et bibliographiques, les figures qui l'illustrent ajoutent au prix du Livre. J. T.

SALMON (GEORGE). — ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER NEUEREN METHODEN NACH *George Salmon* FREI BEARBEITET VON Dr W. FIEDLER. Sechste Auflage. zweiter Theil. In-8°, XXIV-444-854 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

Il nous suffira évidemment de signaler ici cette nouvelle édition d'un Ouvrage connu dans le monde entier. La seconde partie, dont nous avons à rendre compte, comprend les systèmes linéaires de coniques, les propriétés projectives et les équations homogènes, les éléments de la théorie des formes et leur application aux fondements de la métrique. L'Ouvrage, toujours soigneusement documenté, se termine par l'étude des transformations des figures les plus simples et par les applications des méthodes de projection. D. J.

HAENTZSCHEL (E). — DAS ERDSPHÄROID UND SEINE ABBILDUNG. In-8°, VIII-150 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

Ce petit Ouvrage se recommande d'une manière toute particulière dans la collection des Traités publiés par l'éditeur Teubner.

Écrit avec beaucoup de clarté et de précision, il nous fait connaître les méthodes usuelles que l'on emploie plus particulièrement en Allemagne pour la représentation cartographique des différentes portions du sphéroïde terrestre. Ces méthodes remontent à Gauss, à qui l'on doit une représentation très élégante et très précise du sphéroïde terrestre sur la surface même de la sphère; de sorte qu'en employant cette représentation comme intermédiaire, on peut ensuite traiter tous les problèmes et se borner à considérer la Terre comme une sphère parfaite.

L'Ouvrage se divise en deux Chapitres. Dans le premier M. Haentzschel développe les formules connues relatives à l'ellipsoïde terrestre, aux latitudes géographiques, géocentriques ou réduites. Un grand nombre d'applications numériques éclairent et complètent la discussion.

Le second Chapitre traite des modes de représentation du sphéroïde qui conservent soit les angles, soit les distances. L'auteur y donne des détails très précis, particulièrement intéressants pour les lecteurs français, sur les systèmes de représentation qui sont employés pour les cartes de la Prusse et de l'Empire allemand.

Cette exposition, très suffisante pour qui désire prendre connaissance des méthodes modernes de projection cartographique, rendra des services à ceux-là mêmes qui voudraient poursuivre leurs études de cartographie et devenir des géographes de profession.

D. J.

PFISTER (ARTHUR). — DIE GEODÄTISCHEN LINIEN EINER KLASSE VON FLÄCHEN DEREN LINIENELEMENT DEN LIOUVILLESCHEN TYPUS HAT. In-8°, 48 pages. Göttingen, W. Kaestner, 1904.

Ce court travail, qui a été présenté comme thèse à la Faculté de Philosophie de l'Université de Kiel, est consacré à l'étude d'une intéressante question qui se rattache à un ensemble de recherches dont on trouve l'origine dans les travaux de Joseph Bertrand et de M. Darboux relatifs aux problèmes de Mécanique pour lesquels

les trajectoires sont toujours fermées. Dans un Mémoire présenté en 1877 à la Société mathématique de France et reproduit avec quelques amplifications dans les Notes de la *Mécanique* de Despeyrous, M. Darboux s'était proposé le premier le problème de la détermination de toutes les surfaces de révolution, dont les lignes géodésiques sont généralement fermées. Dans ces derniers temps, M. Stäckel s'était proposé une recherche analogue [1] relative aux surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

et il avait obtenu sur la disposition et la forme des géodésiques quelques propositions très dignes d'attention.

C'est aux travaux de M. Stäckel que se rattache d'abord l'étude de M. Pfister. Il commence par montrer comment on pourrait utiliser les recherches générales de M. Stäckel, pour déterminer les surfaces de Liouville, dont les géodésiques sont généralement fermées et, pour pouvoir obtenir des conditions précises, il se limite au cas où les fonctions U et V se réduisent à des polynomes du second degré. Quelques transformations très simples permettent alors de ramener l'élément à la forme simple

$$ds^2 = (c^2 - m^2 u^2 - n^2 v^2)(du^2 + dv^2),$$

et alors il est facile de voir que les lignes géodésiques sont définies par les équations

$$u = \frac{c}{m} \cos\alpha \cos(mt + u_0),$$

$$v = \frac{c}{m} \sin\alpha \sin(nt + u_0),$$

et, par suite, sont représentées sur le plan par des courbes de Lissajous si l'on fait correspondre, au point de la surface, le point du plan dont les coordonnées sont u et v. Toutes ces courbes sont enfermées dans une ellipse dont les axes sont $\frac{2c}{m}$, $\frac{2c}{n}$ et l'on voit immédiatement que la condition nécessaire et

---

[1] *Voir* son Mémoire dans le *Jahresber. der deutschen math. Verein.* 1901, p. 111-120.

suffisante pour qu'elles soient toujours fermées est que le rapport $\frac{m}{n}$ soit commensurable. Mais ici se présente une question importante. L'élément linéaire est réel pour tout l'intérieur de l'ellipse précédente; mais on sait qu'il n'en résulte pas nécessairement l'existence d'une surface admettant l'élément linéaire donné et ayant des points réels correspondant à chaque système de valeurs de u et de v pour lequel la fonction

$$c^2 - m^2 u^2 - n^2 v^2$$

ne cesse pas d'être positive. Renonçant à trouver des surfaces qui correspondent à l'élément linéaire général, M. Pfister se borne à rechercher les cas dans lesquels cet élément linéaire pourrait convenir à une surface de révolution. Et il montre que cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$m = n.$$

Alors on retombe sur un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = (1 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2)$$

ou

$$ds^2 = (1 - r^2)(dr^2 + r^2 dz^2),$$

qui avait été déjà considéré. En s'appuyant sur le principe de la moindre action, M. Darboux avait vu que, dans ce cas, qui correspond au problème des forces centrales pour lequel l'attraction est proportionnelle à la distance, les lignes géodésiques sont représentées sur le plan par des ellipses pour lesquelles la somme des carrés des axes est égale à 1, et, par suite, étaient généralement fermées.

M. Pfister, en cherchant et discutant avec beaucoup de soin les surfaces de révolution qui admettent l'élément linéaire précédent, confirme cette conclusion qui, comme il fallait s'y attendre, ne concerne que les lignes géodésiques ayant libre cours sur la surface. Il est clair, en effet, que, si une surface a une limite, les géodésiques qui viennent frapper cette limite ou qui en partent ne sauraient être fermées. D. J.

FOURIER (J.-B.). — Die Auflösung der bestimmten Gleichungen (Analyse des équations déterminées). Uebersetzt und herausgegeben von *Alfred Lœwy*. Petit in-8°, VI-263 pages. Leipzig, W. Engelmann.

Cet Ouvrage fait partie d'une collection bien connue de nos lecteurs, les *Classiques des Sciences exactes*, publiés depuis quelques années en Allemagne sous la direction de MM. Bruns, Wangerin, Groth, Pfeffer et W. Ostwald. Pour ne parler que des Mathématiques, elle comprend les Ouvrages fondamentaux de Gauss, de Bravais, de Chasles, de Dirichlet, de Lagrange, d'Abel, de Göpel, de Steiner, d'Euler, de Jacobi, de Monge, tous publiés ou traduits en allemand. Le volume dont nous avons à rendre compte est le 127e de la collection.

L'*Analyse des équations déterminées*, dont Fourier avait à peine commencé l'impression au moment où la mort est venue le frapper, est une œuvre inachevée, mais elle est digne de son auteur; elle peut figurer sans désavantage à côté de la *Théorie de la chaleur* et elle contient, on peut le dire, tout ce qu'il y a d'essentiellement nouveau dans les recherches que Fourier avait faites sur la résolution numérique des équations et sur l'Analyse algébrique. Le grand géomètre s'y montre avec ses qualités habituelles, son esprit philosophique, la hauteur de ses vues, l'originalité de ses pensées. L'*Analyse des équations déterminées*, aujourd'hui encore, est un des Ouvrages dont la lecture serait le plus profitable à nos jeunes débutants. M. A. Lœwy l'a publié en y mettant tous ses soins. Il a respecté scrupuleusement, non le texte puisqu'il traduit, mais la pensée de Fourier (sauf en un point, à la page 103, où il aurait mieux fait de se borner à corriger une faute d'impression). Des notes consciencieuses, au nombre de 67, quelques-unes assez étendues, facilitent beaucoup la lecture et donnent de précieuses indications. Elles seront les bienvenues, auprès même de ceux qui possédaient le texte français de Fourier. G. D.

WHITAKER (E.-T.). — A TREATISE ON THE ANALYTICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND RIGID BODIES; WITH AN INTRODUCTION TO THE PROBLEM OF THREE BODIES. 1 vol. grand in-8 : XIII-414 pages. Cambridge, University Press, 1904.

C'est l'étude des équations de Lagrange qui domine le Livre de M. Whitaker et lui imprime un caractère systématique. S'il mérite par là l'épithète d'*analytique*, il est cependant vraiment un traité de dynamique, et non le développement d'une branche spéciale de l'analyse, parce que l'auteur ne perd pas de vue le sens physique des problèmes qu'il traite. Il plaira assurément au lecteur, non seulement par la clarté et la simplicité élégante de l'exposition, par son actualité et la façon dont l'auteur a su profiter des travaux les plus récents, mais encore par le souci du détail, et le soin avec lequel les démonstrations les plus élémentaires ont été choisies et développées. En outre, les exemples et les exercices abondent, et permettent à l'étudiant qui se donne la peine de les traiter de se rendre compte de la façon dont il a compris les belles théories qu'a développées M. Whitaker et d'acquérir quelque habileté dans leur maniement.

J'ai signalé plus haut le caractère systématique de ce Traité : il se manifeste par la façon dont sont traités les sujets relativement élémentaires, qui occupent à peu près la moitié du Livre : l'auteur se propose évidemment de mener peu à peu son lecteur aux propositions générales qui seront étudiées dans la seconde moitié.

M. Whitaker reprend les choses au début, de manière que son livre puisse être parfaitement compris par un lecteur ayant de bonnes connaissances élémentaires en analyse et qui n'aurait pas encore étudié la mécanique. Sans doute, ce ne sera pas le cas habituel de ses lecteurs; mais il sera toujours bon pour ceux-ci de revoir ces principes et ces définitions fondamentales qui leur ont peut-être été exposés de façons très diverses, où ils se retrouvent malaisément, et dont la simplicité a pu s'obscurcir dans la multiplicité des applications.

Le Livre s'ouvre par des « préliminaires cinématiques » qui contiennent les propositions fondamentales sur le déplacement

d'un corps solide, l'introduction des angles d'Euler, des paramètres de Klein, etc. Les notions de masse, de force et de travail, les équations fondamentales de la dynamique, la distinction entre les systèmes holonomes et non holonomes sont introduites d'une façon vraiment simple, qui montre bien le caractère expérimental des hypothèses essentielles. L'auteur établit les équations de Lagrange, pour un système holonome, sous la forme classique, puis sous la forme généralisée que l'on doit à M. Boltzmann. Il montre le rôle des circonstances initiales, introduit, à ce propos, les *percussions*, et les équations de Lagrange relatives aux percussions.

C'est le caractère spécial du potentiel cinétique qui permet de reconnaître la possibilité de résoudre par quadratures un problème de Mécanique. Le premier cas à examiner, pour l'étude du mouvement d'un système honolome conservatif, est celui où, parmi les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui déterminent ce système, quelques-unes ne figurent pas dans le potentiel cinétique, autrement que par leurs dérivées. A ces coordonnées *ignorables* ou *cycliques* correspondent évidemment des intégrales des équations de Lagrange, et si, parmi les n coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$, il y en a en k qui sont *ignorables*, le problème se ramène à un problème dynamique avec $n - k$ degrés de liberté. Le théorème des moments des quantités de mouvement, le théorème des aires se rattachent immédiatement à cette remarque : l'auteur, après les avoir développés, montre le rôle de l'intégrale des forces vives.

Trois chapitres sont ensuite consacrés à l'étude des problèmes classiques qui se résolvent par des quadratures : mouvement d'un point matériel, pendule, forces centrales, mouvement sur une surface, en particulier sur une surface de révolution, mouvement d'un corps solide avec deux ou trois degrés de liberté, mouvements à la Poinsot, toupie sur un plan poli, détermination des angles d'Euler, des paramètres de Klein; cas considéré par Mme Kowalevski, etc.

Un Chapitre intitulé *Théorie des vibrations* se rapporte à l'étude approximative des petits mouvements qui peuvent se produire autour d'une position d'équilibre quand les vitesses initiales sont faibles. Les énergies cinétique et potentielle peuvent être regardées comme des formes quadratiques à coefficients constants, l'une des vitesses, l'autre des coordonnées. C'est la première approxi-

mation dans le problème qui sera repris au dernier Chapitre du Livre.

L'auteur passe ensuite aux systèmes non holonomes et aux systèmes dissipatifs. Il montre comment, pour les systèmes non holonomes, les équations de Lagrange doivent être modifiées, développe quelques cas particuliers, et donne des exemples de mouvements vibratoires. Il traite du frottement, du milieu résultant et du choc.

Il arrive maintenant aux théories générales et, en particulier, aux principes d'Hamilton et de Gauss. Après avoir établi le principe de la moindre action pour les systèmes holonomes, il explique dans quel sens on doit l'entendre pour les systèmes non holonomes; il introduit, pour l'intégrale d'Hamilton, la distinction du maximum et du minimum et indique le rôle des *foyers cinétiques*. Il établit le principe de la moindre contrainte (Gauss) ou de la moindre courbure (Hertz), donne l'expression simple de la courbure au moyen des coordonnées et de leurs dérivées que l'on doit à M. Lipschitz et la forme des équations générales du mouvement d'un système, holonome ou non, que M. Appell a déduites du principe de Gauss.

Après avoir montré le rôle des invariants intégraux (Poincaré) absolus ou relatifs, dans la théorie des équations canoniques, après avoir établi les propriétés du dernier multiplicateur, et montré comment elle s'applique aux équations canoniques (théorème de Liouville, réduction d'un système d'équations différentielles à la forme de Lagrange), M. Whitaker développe la théorie de la transformation des équations de la dynamique : le point de départ est dans la considération de ces transformations de contact particulières consistant dans le changement des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en d'autres $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_1, \ldots, P_n$ qui dépendent des premières de manière que la forme différentielle

$$P_1 dQ_1 + P_2 dQ_2 + \ldots + P_n dQ_n - p_1 dq_1 - p_2 dq_2 \ldots - p_n dq_n$$

devienne, lorsque tout est exprimé en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, la différentielle totale d'une fonction de ces variables.

Une telle transformation laisse invariante l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\delta p_i \, dq_i - \delta p_i \, dp_i).$$

A la considération de cette expression se rattachent, naturellement, l'introduction, d'une part, des parenthèses de Lagrange, d'autre part, de celles de Poisson. La considération des transformations de contact infinitésimales éclaire le véritable caractère des équations de la dynamique. Les transformations de contact des variables q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n d'un système dynamique conservent la forme hamiltonienne des équations du mouvement de ce système. Ces théories aboutissent à l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi et aux propositions fondamentales qui s'y rattachent. Signalons, à la fin de ces généralités, la méthode de Bertrand pour déterminer les forces qui agissent sur un système lorsqu'on connaît une intégrale, et l'application au cas où cette intégrale est du second degré par rapport aux vitesses.

Deux Chapitres sont consacrés au problème des trois corps. M. Whitaker traite d'abord de la réduction du dix-huitième ordre au sixième, dont le problème est susceptible, et cela de manière à conserver toujours la forme hamiltonienne des équations. Le théorème du mouvement du centre de gravité, la réduction, l'intégrale des aires et l'élimination des nœuds, l'intégrale des forces vives et l'élimination du temps permettent successivement la réduction au douzième ordre, au huitième, au sixième. Dans le cas où l'un des corps (*planétoïde*) est regardé comme étant sans masse (problème restreint des trois corps), on a une intégrale de plus (Jacobi), et le problème se ramène à un système hamiltonien du second ordre. M. Whitaker établit le théorème de Bruns sur l'impossibilité d'autres intégrales algébriques que les intégrales classiques dans le cas du problème des trois corps et le théorème analogue de M. Poincaré relatif au problème restreint.

M. Whitaker traite ensuite de la trajectoire d'un point se mouvant librement dans un plan sous l'action des forces conservatrices : après avoir introduit les variables normales de M. Poincaré pour une orbite périodique, il indique le critérium qu'il a donné lui-même pour la recherche des orbites périodiques : il étudie la solu-

tion du problème des trois corps où ces trois corps formeraient un système invariable; il traite enfin de la stabilité des orbites en général (Korteweg, Poincaré, Hadamard).

Le dernier Chapitre est intitulé : *Intégration par séries trigonométriques*. Après avoir rappelé le rôle de ces séries dans l'Astronomie, M. Whitaker y reprend, en la perfectionnant sur quelques points, la méthode qu'il a donnée récemment dans les *Proceedings* de la Société mathématique de Londres [1] et qui est très générale. Elle consiste à ramener par une suite de transformations de contact le problème au mouvement d'un système qui s'écarte peu d'une position d'équilibre. J. T.

FOUËT (E.). — LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. Seconde Partie : THÉORÈMES D'EXISTENCE; ÉTUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU POINT DE VUE DE CAUCHY, DE WEIERSTRASS, DE RIEMANN. 1 vol. XI-299 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

On retrouvera dans la seconde Partie de ces *Leçons* cette abondance qui caractérise la manière de l'auteur, abondance de style, de renseignements historiques et bibliographiques, de citations, d'indications sur les points qui ne sont pas développés, de vues sur la façon dont se pénètrent les diverses parties de la Science; le lecteur ne manquera pas de goûter cette abondance, et l'on peut espérer qu'il s'efforcera de prendre part à la continuation d'un travail scientifique dont l'auteur lui a signalé, à diverses reprises, les résultats les plus récents.

Le présent Volume comprend deux Livres dont l'un (pages 1-88) est consacré aux théorèmes relatifs à l'existence des solutions des équations différentielles, dont l'autre (pages 89-299) se rapporte à la théorie des fonctions analytiques.

L'auteur traite d'abord des fonctions implicites, puis des équations différentielles ordinaires du premier ordre, pour établir, comme

---

[1] 1902, p. 200.

le faisait Weierstrass, l'existence de séries qui vérifient formellement ces équations différentielles, et qui convergent sous les conditions imposées à ces équations; l'existence des solutions définies par les conditions initiales est ainsi mise en évidence. M. Fouët donne ensuite quelques indications sur les renseignements relatifs aux singularités de ces solutions qu'on peut tirer des équations; il démontre en particulier, sur une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynomes, le théorème que l'on doit à M. Painlevé, d'après lequel les seules singularités mobiles possibles d'une équation du premier ordre sont des pôles et des points critiques algébriques, et oriente le lecteur vers la signification moderne de l'intégration des équations différentielles.

Il traite ensuite des systèmes d'équations linéaires du premier ordre aux dérivées partielles, ramenés au type

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \sum_{i,k} a_{i,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial y_m}{\partial x} = \sum_{i,k} l_{i,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k},$$

$i = 1, 2, \ldots, m; \qquad k = 1, 2, \ldots, p \qquad (m \text{ fonctions } y, p+1 \text{ variables } x, x_k),$

où les $m^2 p$ coefficients $a_{i,k}$ qui ne dépendent que des m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont supposés holomorphes aux environs du point

$$y_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad y_m = 0;$$

elles admettent des solutions qui sont des fonctions holomorphes aux environs du point

$$x = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_p = 0,$$

et qui se réduisent, pour $x = 0$, à des fonctions données (holomorphes) de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Le problème de Dirichlet est ensuite traité (pour l'équation $\Delta u = 0$) par la méthode de C. Neumann; l'auteur ne manque pas de faire ressortir le rôle physique de ce problème et de donner quelques indications sur les autres façons de l'aborder.

Un intéressant Chapitre se rapporte aux fonctions définies par

des équations fonctionnelles : il se termine par le théorème relatif aux fonctions uniformes qui ont un théorème d'addition.

Dans le second Livre, l'auteur groupe, autour des noms de Cauchy, de Weierstrass et de Riemann, les propriétés les plus importantes des fonctions analytiques. Ce n'est pas, d'ailleurs, que M. Fouët se tienne étroitement tantôt à un point de vue, tantôt à un autre. Ainsi les propriétés relatives à la série de Taylor, qui sont mises dans le Chapitre qui porte le nom de Cauchy, posent naturellement la question du prolongement, question que l'on pourrait aussi bien rattacher à la conception de Weierstrass, et une ingénieuse méthode due à M. Lindelöf se trouve exposée là, bien qu'elle repose sur des propriétés de la représentation conforme qui ne seront établies que plus tard, dans le Chapitre relatif à Riemann. Au bout d'un certain temps, des doctrines qui pouvaient sembler très distinctes arrivent à se pénétrer et à se fondre. Les divisions historiques ne sont plus celles de la Science.

L'étude des fonctions uniformes a pour point de départ la série de Laurent, établie au moyen de l'intégrale de Cauchy, ainsi que la série de polynomes (Mittag-Leffler) qui permet de représenter dans une étoile une branche uniforme de fonction analytique : à cette dernière série est rattaché le mode de représentation, que l'on doit à M. Phragmén, d'une fonction comme limite de certaines expressions analytiques. Le théorème de M. Jensen relatif aux zéros et aux pôles d'une fonction méromorphe est démontré de la façon simple que M. Goursat a exposée ici même (1902, p. 299).

La série de Lagrange est établie par la méthode de M. Rouché; l'auteur en donne les applications classiques.

La notion du résidu d'une fonction relatif à une singularité isolée conduit à le représenter par une intégrale de contour

$$\frac{1}{2i\pi}\int f(x)\,dx,$$

qui à son tour peut servir de définition étendue : cette notion intervient, comme on sait, dans le calcul des intégrales définies; l'auteur en donne de nombreux exemples. Signalons aussi l'application (Cauchy) aux équations linéaires à coefficients constants, aux équations linéaires considérées par Laplace, à l'équation de

Bessel. Le Chapitre se termine par quelques indications relatives aux fonctions analytiques de plusieurs variables.

Le suivant, qui est placé sous le nom de Weierstrass, n'est pas consacré à la conception célèbre de la fonction analytique comme ensemble de séries de puissances, conception que M. Fouët avait développée dans la première Partie de ses *Leçons* : il se rapporte aux fonctions entières et aux fonctions méromorphes. Toutefois l'auteur, pour rester fidèle à l'esprit d'une doctrine d'où sont bannies les intégrales, prend soin d'établir, par des considérations où celles-ci n'interviennent pas, la proposition d'après laquelle il y a au moins un point singulier sur la circonférence du cercle de convergence d'une série entière. M. Fouët donne d'ailleurs des indications suffisantes pour que le lecteur reconnaisse comment, dans ce domaine, la doctrine de Weierstrass se suffit à elle-même; mais n'y a-t-il pas quelque abus à mettre sous le nom de l'illustre géomètre un théorème comme celui-ci « *Dans tout domaine borné, une fonction entière n'a qu'un nombre fini de racines* », alors que l'intégrale de Cauchy fournit, pour un domaine donné où une fonction est holomorphe, le nombre même de ses racines? Quoi qu'il en soit, c'est au théorème de Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires, et à la notion de genre que l'auteur s'attache d'abord : la notion de genre est rattachée à celle de l'exposant de convergence d'une suite; l'auteur montre, d'après M. Borel et M. Levi-Civita, comment sont liés l'ordre de grandeur d'une fonction et le nombre de ses zéros. Les fonctions $\sin x$, $\Gamma(x)$, $\zeta(x)$ fournissent des applications naturelles du théorème de Weierstrass. Il développe ensuite la représentation des fonctions méromorphes, soit comme quotient de fonctions entières, soit comme somme de séries de fractions rationnelles, puis la représentation des fonctions uniformes à singularités dénombrables. Un important paragraphe concerne l'exposition, d'après Weierstrass, de la divisibilité des séries entières à plusieurs variables, ainsi que la classification des singularités des fonctions uniformes.

Le dernier Chapitre des *Leçons* de M. Fouët est intitulé : *Théorie des fonctions au point de vue de Riemann*. La conception de la surface à plusieurs feuillets, le rôle qu'elle peut tenir dans la théorie des fonctions algébriques et abéliennes, ont

été indiqués dans la première Partie des *Leçons* : c'est en réalité aux fonctions harmoniques et à la représentation conforme qu'est consacré ce dernier Chapitre. L'auteur commence par montrer le rôle de la formule de Green et des intégrales de Poisson, et la façon dont les propriétés fondamentales des fonctions harmoniques peuvent s'en déduire. Il montre ensuite le lien de ces fonctions avec les fonctions analytiques et comment sont liés aussi le problème de Dirichlet et le problème de la représentation conforme d'une aire sur une autre aire. Signalons les quelques pages relatives aux recherches de M. Poincaré sur la possibilité de substituer à une relation analytique entre deux variables des expressions de ces deux variables en fonction uniforme d'un paramètre.

L'auteur termine ce Chapitre en donnant l'expression, due à Weierstrass, des coordonnées d'un point quelconque d'une surface minima et en indiquant diverses applications des fonctions analytiques à la théorie mathématique de l'électricité et à diverses questions d'Hydrodynamique.

Les *Leçons* de M. Fouet, par l'importance des sujets qui y sont exposés d'une façon suggestive et lucide, par le nombre des renseignements qu'on y trouve, ne pourront manquer de rendre aux étudiants d'excellents services. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RUTHERFORD (E.). — *Radio-activity*. In-8°, 410 p. Cambridge University Press. London, Clay et Sons.

THOMSON (J.-J.). — *Electricity and matter*. In-8°, 172 p. avec diagrammes. London, Constable. 5 sh.

D'ADHÉMAR (R.). — *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à trois ou quatre variables indépendantes* (thèse). In-8°, 83 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHLÖMILCH (O). — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Teil : Aufgaben aus der Differentialrechnung. Fünfte Auflage bearbeitet von Dr *E. Naetsch*. In-8°, VIII-372 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Cette nouvelle édition de l'excellent Recueil d'exercices de Schlömilch se distingue de la précédente par quelques modifications intéressantes. Le nouvel éditeur, M. Naetsch, a tenu cependant à n'apporter aucun changement essentiel et fondamental à un Ouvrage dont l'utilité et le succès étaient attestés par l'accueil empressé qui avait été fait aux quatre éditions précédentes.

D. J.

QUIDDE (W.). — Ueber Gauss'sche Kreise auf Rotationsflächen. In-8°, 87 pages. Kiel, Schmidt et Klaunig, 1905.

Cette thèse inaugurale, soutenue avec succès devant la Faculté de philosophie de l'Université de Kiel, traite d'une intéressante question de Géométrie infinitésimale. L'auteur y étudie sous le nom de *cercles de Gauss* une classe de lignes que l'on peut tracer sur une surface quelconque.

Qu'entend-on par cercle géodésique tracé sur une surface quelconque? Il est clair que la réponse est pure affaire de définition. Le cercle, dans le plan ou sur la sphère, a plusieurs propriétés que l'on peut étendre à une surface quelconque. Si l'on considère toutes les lignes géodésiques passant par un point et que l'on porte sur toutes ces lignes la même longueur, on obtient, Gauss l'a montré depuis longtemps, une courbe qui est perpendiculaire à

tous ses rayons géodésiques, de même que le cercle plan est perpendiculaire à tous ses rayons. Si le rayon n'est pas trop grand et si la surface n'a pas de singularité, cette courbe est généralement fermée et dépourvue de tout point singulier. Différents géomètres lui ont donné le nom de *cercle géodésique*.

D'autres, au contraire, remarquant que la courbe ainsi définie relève plutôt de la géométrie de situation et ne possède aucune propriété *infinitésimale*, ont préféré réserver le nom de *cercle géodésique*, aux courbes, fermées ou non, dont la courbure géodésique est constante. Ce sont elles qui interviennent lorsqu'on traite sur une surface quelconque le problème de calcul des variations dont l'objet est la détermination de toutes les courbes qui, sous une longueur donnée, limitent l'aire la plus grande possible. Elles sont, en général, distinctes des premières. Cependant, elles les comprennent comme cas particuliers si la surface a sa courbure constante; alors, en effet, la courbe décrite par l'extrémité d'un fil tendu sur la surface et tournant autour de son point d'attache a toujours sa courbure géodésique constante. Il est vrai que la réciproque n'est pas exacte et que, même sur les surfaces à courbure constante positive, il existe des cercles géodésiques de la seconde manière dont les normales géodésiques ne concourent en aucun point. Le fait essentiel est que, si l'on porte sur ces normales géodésiques des longueurs constantes, on obtient encore une courbe parallèle de courbure géodésique constante.

Dans le travail que nous signalons à nos lecteurs M. Quidde s'est adressé aux cercles géodésiques de la première manière qu'il appelle *cercles de Gauss* pour éviter toute confusion; son étude comportait une division toute naturelle : d'abord l'examen des singularités que peuvent présenter les rayons géodésiques et de la figure formée par deux de ces rayons; ensuite l'étude des propriétés et des formes diverses des cercles de Gauss, au moins dans le cas des surfaces de révolution. Cette dernière partie était particulièrement difficile et délicate comme toutes celles qui se rapportent à la géométrie de situation. Nous devons même avouer que certaines démonstrations nous ont complètement échappé. La thèse se termine par quelques applications à des surfaces particulières.

J. G.

LAGALLY (MAX). — UEBER FLÄCHEN MIT SPHÄRISCHEN KRÜMMUNGSLINIEN VOM KUGELGEOMETRISCHEN STANDPUNKT AUS BETRACHTET UND DIE ENTSPRECHENDEN FLÄCHEN DES LINIENRAUMES. In-8°, 87 pages. Munich, F. Straub, 1903.

L'on trouve déjà, dans l'*Analyse* de Monge, des cas particuliers intéressants de surfaces à lignes de courbure planes. Ces exemples élégants ont conduit Ossian Bonnet et J.-A. Serret à se proposer le problème de la détermination de toutes les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, soit dans les deux systèmes, soit dans un système seulement. Les formules de Bonnet et de Serret ont donné lieu à un grand nombre de recherches particulières parmi lesquelles nous nous bornerons à signaler celles de Lemonnier et d'Enneper; mais cette théorie s'est trouvée naturellement rattachée à une étude bien plus générale lorsqu'en 1869 M. Darboux s'est proposé pour la première fois, comme sujet de recherche, la détermination de toutes les surfaces admettant pour leurs lignes de courbure une représentation sphérique donnée *a priori* et d'une manière d'ailleurs quelconque. La solution de ce beau problème peut être abordée par les voies les plus différentes; elle dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre et à deux variables indépendantes. On sait que des études longtemps poursuivies ont conduit M. Darboux à la conclusion suivante :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis, c'est-à-dire où l'équation aux dérivées partielles, dont dépend le problème, peut être intégrée par la méthode de Laplace.

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes sphériques orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.

Il est facile de comprendre comment le problème de Bonnet et de J.-A. Serret se rattache au problème de la représentation sphé-

rique. Si une surface a ses lignes de courbure planes dans un système, les lignes de courbure de ce système auront, pour représentation sphérique, une famille de cercles. Cette proposition et sa réciproque résultent d'un célèbre théorème de Joachimsthal. Pour les surfaces à lignes de courbure sphériques, des considérations, un peu moins simples il est vrai, montrent qu'on les obtiendra, elles aussi, en résolvant d'une manière systématique le problème proposé par M. Darboux. Elles appartiennent toutes aux groupes de surfaces les plus simples parmi ceux auxquels conduit l'application méthodique de la méthode générale.

L'intérêt de toute cette étude s'est beaucoup accru depuis que Lie a fait connaître sa belle transformation qui fait correspondre à la géométrie de la sphère la géométrie de la ligne droite, aux lignes de courbure d'une surface les lignes asymptotiques d'une autre surface, à la représentation sphérique ce que l'on a appelé la *représentation linéaire* et, enfin, aux lignes de courbure sphériques les lignes asymptotiques dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire qui peut varier lorsqu'on passe d'une ligne asymptotique à celle qui la suit.

Ce sont surtout ces rapports entre les deux théories qu'a eus en vue M. Max Lagally lorsqu'il a écrit l'excellent travail qu'il a soutenu comme thèse, en 1903, devant l'Université de Munich. Le but de cette dissertation inaugurale est surtout la détermination et l'étude géométrique de ces surfaces de l'espace réglé auxquelles correspondent les surfaces de l'espace sphérique qui possèdent un système de lignes de courbure sphériques. Laissant de côté les méthodes qui emploient les coordonnées cartésiennes ou tangentielles, l'auteur s'est surtout attaché à considérer la sphère comme élément de l'espace, et il a appliqué à la recherche des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un seul système, la méthode que M. Darboux avait employée au Tome IV de ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (p. 256-266) pour déterminer les surfaces dont *toutes* les lignes de courbure sont sphériques. Les problèmes d'Analyse qu'il a ainsi rencontrés, il les a abordés et résolus avec une réelle élégance et une connaissance précise et complète des propriétés des équations linéaires aux dérivées partielles. Nous citerons, en particulier, la détermina-

tion de toutes les fonctions satisfaisant à l'équation

$$\sum_{1}^{n+1}\left[\int \sigma(u, v)\varphi_i(u)\,du\right]^2 = 0,$$

problème intéressant qui se présentait naturellement dans sa recherche. J. G.

ANDRAE (A.). — Hilfsmittel zu einer allgemeinen Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung. Inaugural-Dissertation. In-4°, 111 pages. Göttingen, W.-Fr. Kaestner, 1903.

L'intéressant travail de M. Andrae sur la solution du problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles du type

$$L(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0,$$

constitue une extension des procédés indiqués récemment par M. Fredholm (1) et M. Hilbert (2) pour la solution du problème de Dirichlet relatif à l'équation $\Delta u = 0$. Le point de départ est dans la considération d'une solution fondamentale de l'équation

$$L(u) = 0$$

de la forme

$$E(x, y; \alpha, \beta) = U(x, y; \alpha, \beta)\log\frac{1}{\rho_{x,y,\alpha,\beta}} + V(x, y; \alpha, \beta),$$

où $\rho_{x,y,\alpha,\beta}$ désigne la distance des deux points (x, y) et (α, β), où U, V sont des fonctions holomorphes dans le même domaine que les fonctions données a, b, c. La première de ces fonctions doit satisfaire à la condition $U(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 1$.

La différentiation ou l'intégration par rapport aux paramètres

---

(1) *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar* (*Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*) (1900).

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1901.

α, β fournissent ensuite d'autres solutions. M. Andrae fait avec soin et un grand souci de la rigueur une étude de ces solutions déduites d'une solution fondamentale, analogue à celle qu'on fait dans la théorie élémentaire du potentiel, en particulier de la continuité, des dérivées premières et secondes des intégrales curvilignes

$$u(x, y) = \int_0^l f_2(s)\, \mathrm{E}(x, y; \xi, \eta)\, ds,$$

$$v(x, y) = \int_0^l f_1(s) \frac{\partial \mathrm{E}(x, y; \xi, \eta)}{\partial n}\, ds$$

et de l'intégrale de surface

$$w(x, y) = \int_0^l \int_\Omega f_1(\xi, \eta)\, \mathrm{E}(x, y; \xi, \eta)\, d\omega$$

Il montre finalement comment les propriétés de ces solutions permettent de construire une solution de l'équation $\mathrm{L}(u) = 0$ qui soit, ainsi que ses dérivées premières, continue à l'intérieur d'un contour fermé S, situé dans le domaine où les coefficients de l'équation sont holomorphes, et qui prenne des valeurs prescrites sur ce contour. J. T.

SEGUIER (J.-A. de). — Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. 1 vol. in-8°, II-176 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

On est émerveillé, en feuilletant ce petit Volume, de la quantité de propositions importantes que l'auteur a su y concentrer. M. de Séguier est de ceux qui se plaisent aux idées générales et abstraites, aussi vides de matière qu'il est possible, et à une expression très condensée de ces idées.

La théorie des groupes est d'ailleurs assez avancée et la fécondité assez certaine pour que les éléments de cette théorie, communs à ses diverses applications, en soient utilement réunis et que ses principes soient étudiés en eux-mêmes, indépendamment de la matière

des applications qu'ils comportent. Le progrès dans l'exposition didactique des diverses branches des Mathématiques a souvent consisté dans une pareille séparation, et l'on a remarqué plus d'une fois que cette séparation même pouvait contribuer à la clarté des démonstrations, où n'entre plus rien de ce qui n'est pas indispensable. Que l'on gagne ainsi en brièveté, c'est ce que le Livre de M. de Séguier suffirait à prouver.

« La notion de groupe apparaissant de plus en plus comme fondamentale en Mathématiques, je n'ai voulu supposer chez le lecteur aucune connaissance théorique préalable. » C'est à peine si M. de Séguier suppose chez son lecteur la notion de nombre naturel, qui se trouve introduite, dès les premières pages, avec celle des nombres transfinis. Les nombres rationnels et irrationnels, les nombres négatifs se trouveront définis, et leurs propriétés essentielles établies, quelques pages plus loin, comme conséquence de la considération d'un système d'équations entre des générateurs, qui définit un groupe. Le lecteur se trouvera assurément très satisfait de voir ces connaissances, qu'on ne lui supposait pas, s'organiser ainsi d'une façon nouvelle, très satisfait du service que lui a rendu l'étude des Mathématiques; elle a suffisamment affiné son intelligence, suffisamment fortifié sa puissance d'attention, pour qu'il lui soit possible de suivre l'enchaînement subtil de raisonnements très abstraits.

Le premier Chapitre contient, outre les généralités et les définitions essentielles, une étude assez approfondie des corps de Galois dénombrables. La notion de *sous-groupe* est introduite dans le Chapitre suivant, qui contient la théorie de la décomposition des groupes. Les groupes abéliens et hamiltoniens sont étudiés dans le Chapitre III. Le Chapitre IV et dernier est consacré aux groupes d'ordre p^n, dont quelques propriétés ont été renvoyées à une Note. Deux autres Notes se rapportent l'une aux groupes de mouvement et, en particulier, aux groupes des polyèdres réguliers, l'autre à la théorie des matrices. J. T.

APPELL (P.). — ÉLÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES INGÉNIEURS ET DES PHYSICIENS. Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures. Deuxième édition. 1 vol. in-8°, 714 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Dans un article publié en 1899 à la page 136 de ce Recueil, nous indiquions comment l'excellent Ouvrage de M. Paul Appell venait combler une lacune en offrant une exposition des principes du Calcul infinitésimal capable de contenter à la fois les théoriciens par sa rigueur et les praticiens par sa simplicité. Le public mathématicien nous a donné raison ; il a fait à l'Ouvrage un accueil qui a rendu promptement nécessaire une nouvelle édition. C'est cette édition que nous avons sous les yeux et où, dit modestement l'auteur, il a été amené à introduire quelques simplifications suggérées par l'expérience de l'enseignement. On sait avec quel succès M. Appell a introduit à la Sorbonne le Cours de Mathématiques à l'usage des ingénieurs et des physiciens. La nouvelle édition de son Ouvrage va devenir un livre de chevet, utile à ses élèves, indispensable à ceux qui n'auront pas la bonne fortune de pouvoir suivre son enseignement. J. G.

CORRESPONDANCE D'HERMITE ET DE STIELTJES, publiée par les soins de *B. Baillaud* et de *H. Bourget*, avec une préface de *Emile Picard*. Tome I. 8 novembre 1882-29 juillet 1889. 1 vol. in-8°, XX-477 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

A l'automne de 1882, un jeune astronome, Thomas Stieltjes, attaché à l'Observatoire de Leyde, adressait à Charles Hermite une lettre relative à une propriété des coefficients de la fonction perturbatrice découverte par Tisserand. Cette Communication, accueillie avec bienveillance par Hermite, insérée par lui dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, de-

venait l'origine d'une longue et intéressante correspondance qui a duré jusqu'à la mort prématurée de Stieltjes, survenue le 31 décembre 1894. C'est cette correspondance dont MM. Baillaud et Bourget publient aujourd'hui le premier Volume, comprenant les 226 premières lettres échangées entre Hermite et Stieltjes de novembre 1882 jusqu'au mois de juillet 1889. Nous savons, d'ailleurs, que le travail se poursuit régulièrement, et bientôt nous aurons la correspondance tout entière que les directeurs de la publication ont eu la bonne fortune de pouvoir restituer presque intégralement. Hermite, qui avait désiré cette publication, qui la considérait comme le témoignage le plus éclatant de l'activité et du talent mathématique de Stieltjes, n'aura pas eu la joie de la voir terminée; mais M. Émile Picard a continué à veiller sur elle, et il a accompagné le premier Volume d'une préface dans laquelle il caractérise avec la justesse la plus heureuse, et la nature de la correspondance elle-même, et les causes qui la rendirent promptement si active.

« Le souci des mêmes problèmes, nous dit-il, une même tournure d'esprit attirèrent Hermite vers Stieltjes, et une vive sympathie s'établit vite entre le jeune débutant et le vétéran de la Science. »

Et plus loin :

« L'affinité mathématique était complète entre ces deux grands esprits. Une grande partie de la correspondance a un caractère arithmétique; c'est le *vir arithmeticus*, comme aurait dit Jacobi, qu'Hermite affectionnait surtout en Stieltjes. Cet arithméticien ne reste pas seulement sur les sommets à contempler les choses de loin et de haut; il descend dans le fond des vallées et y recueille des applications numériques d'où il sait ensuite tirer des remarques générales. Quelle joie ce fut pour Hermite que de rencontrer un correspondant si perspicace s'intéressant aux questions d'approximations, auxquelles il avait lui-même consacré une grande partie de son labeur scientifique, en particulier aux quadratures approchées et aux fractions continues algébriques. On retrouve chez Stieltjes, à l'apogée de son talent, le calculateur

qu'il avait été jadis à l'Observatoire de Leyde; c'est un des côtés de son originalité. »

On ne saurait mieux dire; mais M. Émile Picard ne se borne pas au côté purement mathématique de la correspondance, et c'est avec grande raison qu'il termine par les paroles suivantes :

« La *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* n'intéressera pas seulement les analystes. En même temps que deux géomètres de premier ordre, on voit deux beaux caractères. Quelle simplicité et quelle franchise entre le maître et le disciple, ou plutôt entre les deux amis! Quelle confiance affectueuse chez l'un et chez l'autre! On est réconforté par la nature de ces pages où ne se mêle aucune préoccupation personnelle et où chacun va jusqu'au bout de la pensée. Il semble aussi, et c'est une curieuse impression laissée par ces lettres, que, sous cette forme plus personnelle, le langage abstrait de l'analyse perde de sa sécheresse et que la Mathématique y devienne plus humaine. On n'oubliera pas enfin que c'est à l'amitié développée par cette correspondance que nous devons de pouvoir compter Thomas Stieltjes parmi les géomètres français les plus éminents de la seconde moitié du XIXe siècle. »

La belle préface de M. Émile Picard est suivie d'une Notice sur la vie de Stieltjes où M. Henri Bourget a utilisé les renseignements qui lui ont été fournis par la veuve du regretté géomètre. Cette Notice, plus particulièrement consacrée à l'homme et à sa carrière, vient heureusement compléter celle que nous devons à M. Cosserat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IX, 1895) et où sont analysées d'une manière si pénétrante les différentes publications de Stieltjes.

Telle est cette remarquable publication qui forme un ensemble en quelque sorte unique dans la Science, constituant une magistrale Introduction à l'édition des *Œuvres de Charles Hermite*, qui se publie sous les auspices de l'Académie des Sciences. Avec quelle joie et quel plaisir nous l'avons accueillie, nous qu'Hermite voulait bien honorer de son amitié et qu'il avait associé à ses efforts pour retenir en France Stieltjes, nous n'avons pas besoin de le dire; mais il n'est pas nécessaire d'avoir pénétré dans l'intimité d'Hermite et de Stieltjes pour s'intéresser vivement à leur

correspondance telle qu'elle nous est présentée. Les questions auxquelles elle est consacrée sont de celles dont l'intérêt ne saurait faiblir; et, d'ailleurs, si les géomètres un peu avancés dans la carrière y voient avec intérêt se développer sous l'influence d'Hermite les talents et les connaissances d'un analyste de race, les jeunes géomètres n'auront qu'à suivre la correspondance, la plume à la main; ils y trouveront, semées à profusion, les idées les plus fécondes, les plus originales et le germe des plus importants travaux.

G. D.

VINTÉJOUX (F.). — NOUVELLES TABLES D'INTÉRÊTS COMPOSÉS ET D'ANNUITÉS ET PRÉCIS DE LA THÉORIE ET DE LA PRATIQUE DES OPÉRATIONS FINANCIÈRES A LONG TERME, PARTICULIÈREMENT DES EMPRUNTS. 1 vol. in-8°, XII-226 pages. Paris, A. Hermann, 1905.

Cet excellent Ouvrage se compose de deux Parties distinctes, un texte et deux Tables numériques.

La première Partie forme un traité élémentaire des opérations financières à long terme et plus particulièrement des emprunts. Elle se divise en trois Livres. Le premier contient la résolution algébrique des problèmes qui servent de base aux opérations financières à long terme. L'auteur y expose d'une manière simple et claire la théorie de l'intérêt simple, des intérêts composés, des annuités et de l'amortissement; il termine en donnant quelques notions générales sur la question des assurances sur la vie. A part un article sur la capitalisation continue, qu'un lecteur peu avancé peut, sans inconvénient, laisser de côté, ce premier Livre est accessible à tous ceux qui connaissent le Calcul logarithmique ou qui ont étudié le programme d'enseignement des classes de Mathématiques élémentaires de nos lycées.

Dans le Livre II qui est consacré à la résolution au moyen des Tables numériques des problèmes relatifs aux opérations financières à long terme, M. Vintéjoux reprend la solution des problèmes fondamentaux qu'il a traités par les méthodes de l'Algèbre.

et indique comment on peut les aborder à l'aide des Tables numériques qu'il a rassemblées et calculées. Il montre comment ces Tables peuvent donner la solution des problèmes d'intérêts composés et d'annuités et comment on doit opérer quand on emploie des taux non compris dans les Tables. Il faut alors faire usage, soit de la méthode des parties proportionnelles, soit de méthodes plus exactes d'interpolation, dont l'auteur indique clairement la règle et la pratique, en rejetant, pour le lecteur mathématicien, la théorie dans une des Notes qui terminent ce Livre.

Le texte de l'Ouvrage se termine par un Chapitre étendu relatif aux emprunts. Emprunts d'États, emprunts de villes, de départements, etc., le nombre en est grand aujourd'hui. La forme aussi sous laquelle sont émis les emprunts est infiniment variée. M. Vintéjoux traite successivement des rentes perpétuelles et des conversions, des emprunts à durée limitée et remboursables en une fois à une époque fixée à l'avance, des emprunts à durée limitée et dont le service des intérêts et de l'amortissement est fait en annuités égales et immédiates, des emprunts émis à un prix différent du pair et remboursables par annuités égales, soit au pair, soit au-dessus du pair, des emprunts avec lots, des emprunts dans lesquels l'amortissement ne se fait pas à toutes les échéances des intérêts, etc. Un Chapitre sur les parités termine ce Livre et le texte.

La deuxième Partie renferme cinq Tables d'intérêts composés et d'annuités. Déjà, en 1873, M. Vintéjoux avait publié, en collaboration avec M. J. de Reinach, des Tables semblables. Mais, depuis lors, le taux de l'intérêt a notablement baissé et, d'autre part, l'habitude de capitalisation par semestres et par trimestres s'est généralisée. Les anciennes Tables, qui ne renfermaient pas des taux assez petits et variant par fractions suffisamment faibles, étaient devenues insuffisantes. Il y avait là une lacune qu'il importait de faire disparaître. M. Vintéjoux a adopté une échelle de taux qui varie depuis $\frac{1}{4}$ pour 100 jusqu'à $7\frac{1}{2}$, 8 et même 9 pour 100. Les taux sont espacés de $\frac{1}{8}$ pour 100 depuis $\frac{1}{4}$ pour 100 jusqu'à $3\frac{1}{2}$ pour 100, puis ils varient de $\frac{1}{4}$ pour 100 jusqu'à la limite des taux véritablement usuels. Comme il est naturel, le nombre d'unités de temps auxquels s'étend chaque Table, est plus grand pour les taux les plus faibles, qui correspondent le plus souvent à des

semestres ou à des trimestres pris comme unités de temps. Les cinq Tables donnent :

1° La valeur acquise par 1fr placé à intérêts composés à un taux donné après un certain nombre d'unités de temps;

2° La valeur actuelle de 1fr à recevoir au bout d'un certain nombre d'unités de temps;

3° La valeur acquise à la fin d'un certain nombre d'unités de temps par des placements de 1fr effectués au commencement de chaque unité;

4° La valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1fr payables à la fin de chaque unité de temps pendant ce même nombre d'unités;

5° L'annuité qui amortit un capital de 1fr, à un taux donné au bout d'un certain nombre d'unités de temps.

A ces cinq Tables, très étendues et clairement disposées, l'auteur a ajouté des Tables de mortalité qui résument et mettent en regard les résultats obtenus par neuf Tables différentes, celles de Deparcieux, de Duvillard, des *Assurés français*, des *Rentiers français*, de la *Caisse des retraites en France*, des *vingt Compagnies anglaises*, la *Table américaine*, celle des *vingt-trois Compagnies allemandes*, et, enfin, la *Table de mortalité des pensionnaires civils de l'État français*, dressée par Charlon et Achard.

D'après le compte rendu qui précède, on voit que l'Ouvrage de M. Vintéjoux pourra rendre les plus grands services à tous ceux qui, avec des connaissances mathématiques élémentaires, désirent s'initier à la théorie des opérations financières et aussi à ceux qui ont à pratiquer ces opérations. J. G.

MÉLANGES.

PAUL TANNERY.

Paul Tannery est né à Nantes, le 20 décembre 1843. Il a fait ses études au Lycée du Mans, à partir de la quatrième, puis au Lycée de Caen, où M. Lachelier contribua certainement à lui inspirer le goût de la Philosophie. Il entra en 1861 à l'École Polytechnique, n'ayant encore que dix-sept ans; il en sortit dans le corps des ingénieurs des Manufactures de l'État.

Il était, vers cette époque, assez préoccupé de la *pédagogie* des Mathématiques, sur laquelle il n'a rien publié : on a retrouvé dans ses papiers tout un cours de Mathématiques, qui doit remonter à l'année 1864 ou 1865, où ses tendances à philosopher, son indifférence pour les habitudes reçues, son goût pour les idées générales, se manifestent nettement ([1]).

C'est à cette époque aussi qu'il se mit à étudier le *Cours de Philosophie positive* d'Auguste Comte : cette étude a eu, sur la direction de ses travaux, une influence décisive. Il répétait volontiers qu'il s'était mis à étudier l'histoire des Sciences afin de réaliser une partie de la pensée d'Auguste Comte; personne peut-être ne s'est mieux assimilé cette pensée, qu'il connaissait à fond; mais il avait l'esprit trop libre pour s'affilier à la secte de ceux qui prétendent observer les rites de la religion positive, ou pour se mettre à la suite de quelque hérésiarque du positivisme. Il se regardait, cependant, comme un disciple spirituel du maître et affirmait

([1]) Dans la préface de ses *Notions de Mathématiques*, auxquelles Paul Tannery a collaboré pour la partie historique, M. Jules Tannery a fait allusion à cette période de la vie de son frère : il se rappelle très bien avoir eu ce *cours* entre les mains en 1866 et en avoir tiré grand parti.

parfois, non sans une pointe de paradoxe, qu'il était le dernier tenant de la doctrine des *trois états*.

Successivement élève-ingénieur à l'École d'application des Tabacs, sous-ingénieur de la Manufacture des Tabacs de Lille, puis sous-chef du Bureau des Manufactures de l'État au Ministère des finances, il était à Paris au moment du siège : il commanda, comme capitaine, la 2e batterie à pied du corps franc d'artillerie (service des mitrailleuses). Il garda toute sa vie le goût des choses militaires; en 1894, il fut nommé lieutenant-colonel d'artillerie dans l'armée territoriale.

Après la Commune, il alla à Bergerac, pour diriger, dans la région, la construction des magasins de tabacs en feuilles : il y tomba gravement malade; la convalescence fut longue; il en occupa les loisirs en se perfectionnant dans l'étude du latin et du grec, où sa maîtrise devint bientôt complète. Au reste, il n'avait jamais négligé cette étude, bien qu'il ait été élevé sous cette *bifurcation*, dont on a dit tant de mal avant de la rétablir. Dans les années précédentes, il avait appris l'hébreu : on a retrouvé dans ses papiers la traduction d'une bonne partie de la Bible.

A partir de ce moment, il fait deux parts dans sa vie : il consacre ses journées à son métier, qu'il aimait beaucoup. Ingénieur à Bordeaux, au Havre, au Service de l'expertise, directeur à Tonneins, à Bordeaux, chef de bureau au Ministère, directeur à Pantin (1894), il sut partout se faire estimer et aimer du personnel ouvrier, qui appréciait sa droiture, sa bonté, sa façon de concilier les intérêts opposés.

Il donne ses soirées à l'étude. C'est entre 8h du soir et 1h du matin, à côté d'une femme qui a vécu de lui et pour lui, qu'il a accumulé tant de Travaux si profonds et si divers. Ces heures-là ont été heureuses et fécondes.

Sa production, depuis 1876 jusqu'à sa mort, est vraiment extraordinaire. La plupart de ses recherches concernent l'histoire des Sciences et de la Philosophie pendant l'Antiquité, le Moyen-Age, le XVIe et le XVIIe siècles. Mais que de points de détail il a dû élucider, sur les sujets les plus différents, que d'idées il a su éclairer de la vraie lumière du passé, grâce à une connaissance approfondie de ce passé, à un travail et à une patience inlassables, à une conscience scrupuleuse, à une mémoire extraordinaire par

son étendue et sa sûreté, à une habitude de ne se fier qu'à ce qu'il avait vu lui-même, à une liberté de jugement que ne troublaient jamais les opinions reçues, et qu'il devait peut-être en partie à son éducation scientifique, si différente de celle qu'ont reçue la plupart des érudits! Les innombrables Notes qu'il a laissées font voir à nu, pour ce qui regarde l'histoire des Mathématiques, sa façon de travailler; il s'efforçait vraiment de repasser par les états de pensée de ceux dont il étudiait les écrits, de raisonner et de calculer comme eux.

Il fut l'un des premiers, en France, à appliquer à l'étude de la Philosophie ancienne une méthode à la fois historique et concrète. Jusque-là, l'histoire de la Philosophie consistait à dérouler une sorte d'enchaînement métaphysique des systèmes, à introduire dans la série chronologique la nécessité d'une déduction purement conceptuelle. Le grand Ouvrage de Ed. Zeller, qui dominait alors tout cet ordre d'études, n'était pas autre chose, avec tout l'appareil érudit et savant qui le fondait, qu'un immense système d'interprétation constructive. Il s'agissait, à présent, d'atteindre, sous ce décor, la réalité historique, de saisir les systèmes philosophiques, les systèmes scientifiques, les parties les plus fragmentaires de la pensée et de la croyance d'une époque, dans leur racine réelle, de les voir naître des conditions d'existence de l'époque, cadres sociaux, coutume, tradition, technique, vie pratique, etc., de restituer les doctrines d'une époque dans la vérité de leur sens historique, de leur attribuer, non pas uniquement la valeur que ces doctrines ont pour nous et pour l'histoire de la pensée, mais la valeur exacte qu'elles possédaient pour les hommes qui les créaient, qui y croyaient, qui en vivaient.

Cette dislocation des constructions traditionnelles où on logeait et où l'on adorait une antiquité de convention, cet effort pour voir dans les penseurs de l'Antiquité, à travers la légende, des hommes réels, obéissant aux nécessités physiques et morales de leur temps, et travaillant pour les besoins moraux et intellectuels des hommes de leur temps, ce vigoureux essai d'application d'une méthode réaliste et vraiment historique furent menés très énergiquement en Allemagne par quelques hommes qui s'insurgèrent contre l'autorité de Zeller et des systèmes analogues au sien, surtout par Teichmüller. Paul Tannery donna, de son côté, et d'une manière

indépendante, une impulsion analogue à ces études : ses premiers travaux sur les doctrines mathématiques de Platon, qui parurent dans les premiers numéros de la *Revue philosophique*, datent d'un moment où il ne connaissait pas encore les travaux de Teichmüller, qu'ensuite il fit connaître en France et qu'il fortifia de ses propres découvertes. Une partie seulement de ses monographies historiques et critiques passa dans son Volume *Pour l'histoire de la science hellène*.

Les études historiques ne furent qu'une partie de son activité philosophique. Il semble qu'il ait eu de très bonne heure la préoccupation d'une théorie philosophique de la connaissance mathématique, préoccupation qui se mêlait à cette recherche de la meilleure manière d'enseigner dont on a parlé plus haut. A une époque (1879) où ces études n'existaient pas encore en France, et où peu d'hommes possédaient à la fois des connaissances philosophiques et la science mathématique nécessaires, il écrivait déjà, dans la *Revue philosophique*, à propos des livres de Schmitz-Dumont, des articles qui étaient une grande nouveauté en France. Il ne cessa de porter sur ces questions un effort de plus en plus conscient et lucide. Il y apporta les mêmes habitudes et les mêmes exigences d'esprit que dans ses études historiques : le souci de la réalité psychologique, des opérations vivantes dont les notions mathématiques sont le résidu, le souci de l'explication véritable, de l'explication réaliste et concrète.

Il n'est pas temps de dresser la liste complète de ses publications, qui devra être revisée par des savants très divers : ceux-ci seront assurément heureux d'honorer la mémoire de l'ami qu'ils ont perdu, et dont les connaissances, par leur étendue, causaient d'autant plus d'admiration que chacun savait, pour le domaine particulier qu'il cultivait lui-même, combien elles étaient sûres et profondes.

Nous nous contenterons d'indiquer ici les principaux recueils où sont répandus ses articles, les livres publiés à part, les éditions savantes qu'il a publiées ou auxquelles il a collaboré.

Les articles sont ou des articles originaux ou des comptes rendus : mais on aurait peut-être tort de distinguer les uns des autres ; s'il rendait compte d'un livre de science ou d'histoire, Paul Tannery profitait très souvent de l'occasion qui lui était offerte pour exposer

ses vues personnelles, soit sur le sujet qu'avait traité l'auteur, soit sur quelque sujet connexe.

L'un des premiers articles qu'il ait publiés est « le nombre nuptial dans Platon »; il a paru dans la *Revue philosophique* en 1876; une « Note sur le système astronomique d'Eudoxe », publiée dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* est de la même date; on relève, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* un article intitulé « A quelle époque vivait Diophante? » qui est de 1879. Déjà, dans ces courtes Notes, on reconnaît cette ingéniosité, cette sagacité, cette sûreté dans la critique, que l'on devait admirer dans toute son œuvre : ces quelques pages ont, de suite, vivement frappé les connaisseurs, plus nombreux à l'étranger, à vrai dire, que dans notre pays.

A partir de ce moment, les Notes, les Analyses, les Mémoires se multiplient [1]. Nous évaluons à peu près à *quatre cents* les articles publiés dans les divers recueils cités en Note et nous croyons être plutôt au-dessous de la vérité.

Voici maintenant les titres des Ouvrages séparés :

Pour l'histoire de la science Hellène (de Thalès à Empédocle). Alcan, 1887.

La Géométrie grecque; comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons; essai critique. Première partie : Histoire générale de la Géométrie élémentaire. Gauthier-Villars, 1893.

Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne. Gauthier-Villars, 1893.

---

[1] On les trouvera dans la *Revue philosophique*, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux,* dans l'*Archiv für Geschichte der Philosophie,* dans la *Revue archéologique,* dans la *Bibliotheca mathematica,* dans la *Revue de Métaphysique et de Morale,* dans la *Revue critique,* dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* dans la *Revue de Philologie,* dans la *Revue de Philosophie,* dans la *Revue des études grecques,* dans les *Notices et Extraits des manuscrits* de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, dans les *Annales de Philosophie chrétienne,* dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* dans les *Archives des Missions,* dans la *Revue de synthèse historique,* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, dans le *Journal des Savants*, dans la *Grande Encyclopédie.* Les lecteurs de la *Revue générale* n'ont pas oublié le bel article sur Galilée et les principes de la Dynamique.

La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri, étudiée pour l'histoire des Mathématiques. Gauthier-Villars, 1893.

Diophanti alexandrini opera omnia (texte et traduction latine, commentaires anciens, etc.), t. I et II. Teubner, 1893-1895.

Œuvres de Fermat (en collaboration avec M. Ch. Henry), t. I, II, III. Gauthier-Villars, 1891, 1894, 1896.

Œuvres de Descartes (en collaboration avec M. Ch. Adam), L. Cerf, t. I, ..., VII, IX; 1894, ..., 1904.

Il ne faut oublier ni les Chapitres sur l'Histoire des Sciences publiés dans l'*Histoire générale* de MM. Lavisse et Rambaud, ni le Volume (A. Colin) qui résume les travaux de la 5e section du Congrès international d'Histoire tenu à Paris en 1900 (1), ni les notions historiques ajoutées aux *Notions de Mathématiques* de M. Jules Tannery (Delagrave, 1903), ni les Notes historiques très nombreuses ajoutées au premier article de l'édition française de l'*Encyclopédie mathématique*.

Beaucoup de travaux restent interrompus : Un quatrième Volume devait s'ajouter aux Œuvres de Fermat, contenant de nombreuses pièces inédites, extrêmement intéressantes pour l'histoire des idées à cette époque. Paul Tannery regardait ce Volume comme fait : les documents étaient réunis, ils étaient classés dans son esprit, il savait comment les mettre en œuvre; mais un autre que lui ne pourra, sans beaucoup de travail, tirer parti de ces documents. En tout cas, les trois Volumes parus constituent le monument auquel Fermat avait droit.

La publication des Œuvres de Descartes est très avancée; M. Ch. Adam, par cela même qu'il avait longtemps travaillé avec Paul Tannery, était devenu un de ses amis les plus chauds : il mettra assurément une grande piété à tirer des Notes manuscrites qu'a laissées son collaborateur tout ce qu'elles contiennent. On peut compter que l'édition nationale des Œuvres de Descartes sera menée à bonne fin.

Quelques textes anciens paraissent prêts pour l'impression : la maison Teubner a déjà offert de s'en charger. Paul Tannery laisse

(1) Un Volume analogue, relatif au récent Congrès de Genève (Philosophie), est tout prêt. Il contiendra une Notice biographique plus étendue que celle-ci.

assez de savants amis pour que ce qu'il peut rester à faire soit fait parfaitement.

Contentons-nous de signaler une traduction complète d'Euclide.

Paul Tannery, malgré les sollicitations de ses amis, s'était longtemps refusé à publier un Livre d'ensemble, un Livre *élémentaire* dans le vrai sens du mot; il s'y était décidé depuis un an et avait promis ce Livre à la maison Armand Colin. C'est par excès de scrupules qu'il ne s'était pas mis plus tôt à cette tâche, qui, en réalité, l'attirait et le passionnait. Il allait sortir de ces questions particulières qui n'avaient qu'en apparence absorbé son activité scientifique : il était de ceux qui pensent que les faits ne valent que par leur enchaînement, mais qu'avant d'essayer de les réunir, de les éclairer les uns par les autres, il faut les connaître à fond, être assuré de sa propre méthode et de son propre jugement, par le long usage qu'on a fait de l'une et de l'autre, par l'unanime approbation de ceux qui savent. Jusqu'où allait cette approbation, il l'avait appris par les témoignages qu'il avait recueillis aux récents Congrès de Rome, de Heidelberg, de Genève. Il pouvait, doublement sûr de lui, développer, en toute confiance, les idées générales qu'il avait mûries lentement. Il se réjouissait de ce travail, qui s'accomplissait jour par jour dans sa pensée; il avait trouvé un titre, un peu ambitieux, qui amusait sa modestie. Cela devait s'appeler : *Discours sur l'histoire générale des Sciences.*

Le plan, qui était grandiose, n'a été réalisé que dans son esprit et il ne reste que deux ou trois Chapitres de ce *Discours*. Quand se retrouvera-t-il un homme pour essayer de l'écrire?

Paul Tannery était connu et admiré de tous les savants étrangers; en France, il était apprécié à sa valeur par ceux dont le jugement importe; on ne peut s'attendre à ce que des travaux comme les siens fassent connaître leur auteur à la foule, et même aux ministres; on ne peut demander, à celui qui accumule de pareils travaux, de cultiver ces relations qui procurent une notoriété temporaire. Cependant, la part de gloire à laquelle il avait droit lui venait : le Collège de France, l'Académie des Sciences l'avaient désigné en première ligne pour occuper cette chaire d'histoire générale des Sciences que l'on avait créée pour M. Pierre Laffitte : ses Travaux, la doctrine même qui les avait inspirés semblaient devoir l'y mener naturellement. La porte de cette maison, où ce-

pendant il avait enseigné pendant cinq ans (1892-1896), dans la chaire de Philosophie grecque et latine, comme remplaçant de M. Ch. Lévêque, lui fut fermée.

Il essaya de se consoler en préparant ce Livre qui devait contenir la substance de ce qu'il comptait enseigner; il était plein de vie et d'activité pendant les vacances, il tomba malade au commencement d'octobre, il est mort le 27 novembre 1904.

(*Revue générale des Sciences*, 15 février 1905.)

SUR LES SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. GASTON DARBOUX.

1. On sait que si l'on considère, sur une surface quelconque, les courbes telles que la somme ou la différence des normales géodésiques abaissées d'un de leurs points sur deux courbes fixes (C) et (C_1) soit constante, ces courbes forment sur la surface un système orthogonal dont les propriétés se rapprochent de celles des ellipses et des hyperboles homofocales dans le plan. M. Weingarten, qui a envisagé pour la première fois d'une manière générale ces systèmes orthogonaux, a montré que, si l'on prend pour courbes coordonnées les deux familles de courbes qui les composent, l'élément linéaire de la surface sera réductible à la forme

$$ds^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} \tag{1}$$

où ω est une fonction quelconque de u et de v. On sait que cette forme est caractéristique. Toutes les fois qu'on l'aura obtenue d'une manière quelconque, les courbes coordonnées seront des ellipses et des hyperboles géodésiques. Par suite, dès que l'on connaîtra sur une surface quelconque les lignes géodésiques, on saura, par cela même, ramener de toutes les manières possibles l'élément linéaire de cette surface à la forme (1).

2. Appliquant cette proposition générale à la sphère, M. Weingarten en a déduit la détermination d'une classe nouvelle de surfaces dont les rayons de courbure sont liés par la relation

$$\frac{R - R'}{a} = \sin \frac{R + R'}{a}. \tag{2}$$

Cette relation est, à la vérité, peu intéressante en elle-même; mais en considérant, au lieu de ces surfaces, les deux nappes de leurs développées qui, d'après le second théorème de M. Weingarten, sont applicables sur des surfaces de révolution, j'ai remarqué que, si l'on ne se refuse pas à employer en géométrie des surfaces imaginaires, les développées des surfaces transcendantes considérées seront applicables sur le paraboloïde de révolution défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = 4az. \tag{3}$$

de sorte que l'on saura ainsi déterminer toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

3. Pour obtenir ces surfaces qui résultent de la déformation du paraboloïde, je me suis appuyé dans mes *Leçons sur la théorie des surfaces* (Troisième Partie, p. 363) sur une propriété géométrique relative à la famille de lignes géodésiques qui correspond aux lignes de courbure de la développante. Je vais montrer ici que les calculs deviennent beaucoup plus simples et plus élégants si l'on s'appuie sur une autre propriété géométrique de ces surfaces qui se trouve démontrée aussi dans mes *Leçons*.

Considérons sur la sphère (S) *deux courbes quelconques* (C) *et* (C_1). *Si, d'un point* M *de la sphère, on abaisse des grands cercles* MP, MP_1, *normaux sur* (C) *et sur* (C_1) : 1° *au point correspondant de la surface cherchée* (Σ) *la normale sera parallèle à l'une des bissectrices de l'angle* PMP_1 ; 2° *lorsque le point* M *se déplacera sur l'un des grands cercles* MP *ou* MP_1, *le point correspondant de la surface* (Σ) *décrira une ligne asymptotique de cette surface* [1].

[1] *Leçons*, t. III, p. 362.

4. D'après cela, soient

$$(4)\qquad \begin{cases} fx + f_1 y + f_2 z = 0, \\ \varphi x + \varphi_1 y + \varphi_2 z = 0 \end{cases}$$

les équations des deux grands cercles MP, MP_1; f, f_1, f_2 sont des fonctions d'un paramètre α que l'on peut supposer assujetties à vérifier l'équation

$$(5)\qquad f^2 - f_1^2 + f_2^2 = 1$$

et, de même φ, φ_1, φ_2 sont des fonctions d'un paramètre β qu'on peut assujettir à la relation analogue

$$(6)\qquad \varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

Avec ces hypothèses, il est clair que les paramètres directeurs des deux bissectrices de l'angle PMP_1 en M seront, pour l'une,

$$f + \varphi, \quad f_1 + \varphi_1, \quad f_2 + \varphi_2,$$

et pour l'autre,

$$f - \varphi, \quad f_1 - \varphi_1, \quad f_2 - \varphi_2.$$

Ainsi, on peut traduire analytiquement la propriété géométrique énoncée plus haut en disant que, pour la surface cherchée (Σ) les paramètres directeurs de la normale sont

$$f(\alpha) \pm \varphi(\beta), \qquad f_1(\alpha \pm \varphi_1(\beta), \qquad f_2(\alpha) \pm \varphi_2(\beta),$$

α et β étant les paramètres des asymptotiques. Prenons, pour fixer les idées, le signe $+$; nous retrouverons la seconde hypothèse en changeant les signes des trois fonctions φ.

En se rappelant les résultats relatifs aux formules de M. Lelieuvre, on voit immédiatement que les trois fonctions

$$(7)\qquad \theta_i = \lambda[f_i(\alpha) + \varphi_i(\beta)], \qquad i = 0, 1, 2$$

où λ est une fonction inconnue, devront satisfaire toutes les trois à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = K\theta$$

On sera ainsi conduit à trois équations qui seront comprises dans le type suivant :

$$(f_i + \varphi_i)\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - K\lambda\right) + f_i' \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \varphi_i' \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0.$$

Le déterminant

$$|f_i + \varphi_i, \quad f_i', \quad \varphi_i'| \quad i = 0, 1, 2$$

ne saurait être nul ; le lecteur le démontrera aisément. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - K\lambda = 0,$$

ce qui donne

$$K = 0, \qquad \lambda = \text{const.}$$

5. Alors, en portant les valeurs (7) des θ_i dans les formules de M. Lelieuvre, on trouve les équations

$$(8)\quad \begin{cases} x = \lambda^2 \int (f_1 - \varphi_1)(df_2 - d\varphi_2) - (f_2 + \varphi_2)(df_1 - d\varphi_1), \\ y = \lambda^2 \int (f_2 + \varphi_2)(df - d\varphi) - (f - \varphi)(df_2 - d\varphi_2), \\ z = \lambda^2 \int (f + \varphi)(df_1 - d\varphi_1) - (f_1 - \varphi_1)(df - d\varphi), \end{cases}$$

que l'on peut, en intégrant partiellement, mettre encore sous la forme

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{x}{\lambda^2} = \varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 + \int (f_1\,df_2 - f_2\,df_1) - \int (\varphi_1\,d\varphi_2 - \varphi_2\,d\varphi_1), \\ \frac{y}{\lambda^2} = \varphi_2 f - \varphi f_2 + \int (f_2\,df - f\,df_2) - \int (\varphi_2\,d\varphi - \varphi\,d\varphi_2), \\ \frac{z}{\lambda^2} = \varphi f_1 - \varphi_1 f + \int (f\,df_1 - f_1\,df) - \int (\varphi\,d\varphi_1 - \varphi_1\,d\varphi). \end{cases}$$

Telles sont les formules qui définissent la surface (Σ). Si l'on veut avoir la surface (Σ') qui correspond au changement de signe

des fonctions φ, on aura

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{x'}{\lambda^2} = \varphi_2 f_1 - \varphi_1 f_2 + \displaystyle\int (f_1 df_2 - f_2 df_1) - \int (\varphi_1 d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi_2), \\ \dfrac{y'}{\lambda^2} = \varphi f_2 - \varphi_2 f + \displaystyle\int (f_2 df - f\, df_2) - \int (\varphi_2 d\varphi - \varphi\, d\varphi_2), \\ \dfrac{z'}{\lambda^2} = \varphi_1 f - \varphi f_1 + \displaystyle\int (f\, df_1 - f_1 df) - \int (\varphi\, d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi), \end{cases}$$

et les intégrales devront être prises avec la même détermination dans les formules (9) et (10) afin que la ligne joignant les points correspondants des deux surfaces soit parallèle à la normale en M à la sphère.

6. Si l'on pose

$$(11)\qquad H = f\varphi + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2,$$

les cosinus directeurs de cette normale en M auront les valeurs suivantes :

$$(12)\qquad \gamma = \frac{\varphi_1 f_2 - f_1\varphi_2}{\sqrt{1 - H^2}}, \qquad \gamma_1 = \frac{\varphi_2 f - \varphi f_2}{\sqrt{1 - H^2}}, \qquad \gamma_2 = \frac{\varphi f_1 - f\varphi_1}{\sqrt{1 - H^2}}.$$

De même, les cosinus directeurs des normales aux surfaces (Σ), (Σ') seront, pour (Σ) :

$$(13)\qquad c = \frac{\varphi + f}{\sqrt{2 + 2H}}, \qquad c_1 = \frac{\varphi_1 + f_1}{\sqrt{2 + 2H}}, \qquad c_2 = \frac{\varphi_2 + f_2}{\sqrt{2 + 2H}},$$

et pour (Σ') :

$$(14)\qquad c' = \frac{f - \varphi}{\sqrt{2 - 2H}}, \qquad c'_1 = \frac{f_1 - \varphi_1}{\sqrt{2 - 2H}}, \qquad c'_2 = \frac{f_2 - \varphi_2}{\sqrt{2 - 2H}}.$$

7. Au moyen de la fonction H, que nous venons d'introduire, on peut obtenir sans difficulté l'élément linéaire des surfaces (Σ) et (Σ'). On a, par exemple, pour (Σ),

$$\frac{1}{\lambda^4} ds^2 = \Sigma(f_i - \varphi_i)^2 \Sigma(df_i - d\varphi_i)^2 - [\Sigma(f_i - \varphi_i)(d\varphi_i - df_i)]^2,$$

et, si l'on suppose que l'on a choisi α et β de telle manière que

l'on ait

$$f'^2 + f_1'^2 + f_2'^2 = 1 \tag{15}$$

et

$$\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = 1, \tag{16}$$

il viendra

$$\frac{1}{\lambda^4} ds^2 = (2 + 2H)\left(d\alpha^2 + d\beta^2 - 2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} d\alpha\, d\beta\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial\alpha} d\alpha - \frac{\partial H}{\partial\beta} d\beta\right)^2. \tag{17}$$

On trouverait de même pour la surface (Σ') l'expression

$$\frac{1}{\lambda^4} ds'^2 = (2 - 2H)\left(d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} d\alpha\, d\beta\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial\alpha} d\alpha - \frac{\partial H}{\partial\beta} d\beta\right)^2, \tag{18}$$

qui s'obtient en changeant simplement le signe de H.

Citons encore la formule

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 4\lambda^4(1 - H^2) \tag{19}$$

qui fait connaître la distance des points correspondants de (Σ) et de (Σ').

8. La fonction H, qui joue un si grand rôle dans les formules précédentes, satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre qu'il est aisé de former. Considérons la matrice

$$\begin{matrix} f - \varphi & f_1 - \varphi_1 & f_2 + \varphi_2 \\ f - \varphi & f_1 - \varphi_1 & f_2 - \varphi_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ \varphi' & \varphi_1' & \varphi_2' \end{matrix}$$

qui a plus de lignes que de colonnes. D'après le théorème de Cauchy, le déterminant obtenu en l'élevant au carré sera nul. On aura donc, en calculant ce déterminant,

$$\Omega = \begin{vmatrix} 2 + 2H & 0 & \frac{\partial H}{\partial\alpha} & \frac{\partial H}{\partial\beta} \\ 0 & 2 - 2H & -\frac{\partial H}{\partial\alpha} & \frac{\partial H}{\partial\beta} \\ \frac{\partial H}{\partial\alpha} & -\frac{\partial H}{\partial\alpha} & 1 & \frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} \\ \frac{\partial H}{\partial\beta} & \frac{\partial H}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

C'est l'équation du second ordre qu'il s'agissait d'établir.

On peut la former par une autre méthode qui nous conduira à des identités dont nous aurons à faire usage.

Posons

$$(21)\qquad \Theta = \begin{vmatrix} f & \varphi & f' \\ f_1 & \varphi_1 & f'_1 \\ f_2 & \varphi_2 & f'_2 \end{vmatrix}, \qquad \Theta_1 = \begin{vmatrix} f & \varphi & \varphi' \\ f_1 & \varphi_1 & \varphi'_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \varphi'_2 \end{vmatrix}.$$

En faisant le carré et le produit de Θ et de Θ_1, on trouvera

$$(22)\qquad \Theta^2 = \begin{vmatrix} 1 & H & 0 \\ H & 1 & \dfrac{\partial H}{\partial \alpha} \\ 0 & \dfrac{\partial H}{\partial \alpha} & 1 \end{vmatrix} = 1 - H^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)^2,$$

et de même

$$(23)\qquad \Theta_1^2 = 1 - H^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$(24)\qquad \Theta\Theta_1 = (1 - H^2)\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha\, \partial \beta} + H\frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial \beta},$$

et ces identités entraînent évidemment l'équation

$$(25)\qquad \left[(1 - H^2)\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha\, \partial \beta} - H\frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial \beta}\right]^2 = \left[1 - H^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)^2\right]\left[1 - H^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)^2\right],$$

à laquelle doit satisfaire H. Il est aisé de reconnaître qu'elle est identique à l'équation (20).

9. La théorie générale nous fait prévoir que, sur les surfaces (Σ), (Σ'), l'équation

$$H = \text{const.}$$

définit une famille de surfaces parallèles, et même que l'élément linéaire de la surface (Σ), par exemple, est réductible à la forme

$$\frac{ds^2}{\rho^2} = \frac{1 - H}{1 + H}\, dH^2 + (1 - H)\, du^2.$$

Et, en effet, si l'on forme la différence

$$\frac{ds^2}{\lambda^2} - \frac{1+H}{1-H}\,dH^2,$$

on trouve, en tenant compte des formules (22), (23), (24),

$$(26)\qquad \frac{1}{\lambda^4}\,ds^2 = \frac{1+H}{1-H}\,dH^2 - \frac{2}{1-H}\,(\Theta\,d\alpha - \Theta_1\,d\beta)^2.$$

D'autre part, à l'aide des mêmes formules, on vérifie aisément que l'expression

$$\frac{\Theta\,d\alpha - \Theta_1\,d\beta}{1-H}$$

est une différentielle exacte. On peut donc poser

$$(27)\qquad \frac{\Theta\,d\alpha - \Theta_1\,d\beta}{1-H} = du,$$

de sorte que l'élément linéaire de la surface (Σ) sera donné sous la forme réduite

$$(28)\qquad \frac{1}{\lambda^4}\,ds^2 = \frac{1-H}{1-H}\,dH^2 - 2(1+H)\,du^2.$$

Pour la surface (Σ') il faudra changer le signe des trois fonctions φ, ce qui change le signe de H et de Θ. On pourra donc ici poser

$$(29)\qquad \frac{\Theta\,d\alpha - \Theta_1\,d\beta}{1+H} = dv,$$

et l'on aura, pour l'élément linéaire de (Σ'), l'expression

$$(30)\qquad \frac{1}{\lambda^4}\,ds^2 = \frac{1-H}{1+H}\,dH^2 + 2(1+H)\,dv^2.$$

Ces expressions des éléments linéaires conviennent bien à des surfaces applicables sur le paraboloïde

$$(31)\qquad x^2 - y^2 = 8i\lambda^2 z.$$

On trouvera, d'autre part, en cherchant l'élément linéaire de la sphère lieu du point M,

$$d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2 = d\sigma^2 = \frac{\Theta^2\,d\alpha^2 + \Theta_1^2\,d\beta^2 - 2H\Theta\Theta_1\,d\alpha\,d\beta}{(1-H^2)^2}$$

ou encore

$$d\tau^2 = \frac{du^2}{2+2\mathrm{H}} - \frac{dv^2}{2-2\mathrm{H}}. \tag{32}$$

10. Il est inutile d'insister. A l'aide des méthodes que nous avons données dans nos *Leçons* (IVe Partie, p. 29) on pourra entreprendre toutes les recherches sur les surfaces (Σ), (Σ'). Par exemple, les lignes de courbure de la surface (Σ) seront définies par l'équation différentielle

$$\left[2-2\mathrm{H}-\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha}\right)^2\right]d\alpha^2 - \left[2+2\mathrm{H}-\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \beta}\right)^2\right]d\beta^2. \tag{33}$$

Le produit des rayons de courbure aura pour expression

$$\mathrm{RR}' = -4(1-\mathrm{H})\lambda^2. \tag{34}$$

On passera à la surface (Σ') en changeant le signe de H.

11. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la réalité ou l'imaginarité des fonctions f_i, φ_k ou, ce qui est la même chose, des courbes (K), (K_1) décrites sur la sphère par les points (f, f_1, f_2) et $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ qui sont les pôles des grands cercles définis par les équations (4). Si ces fonctions sont réelles, il est clair que les surfaces (Σ), (Σ_1) auront leurs lignes asymptotiques réelles et, par suite, ne pourront être applicables sur un paraboloïde réel de révolution. C'est ce que confirment les formules (34) et (31).

Mais il n'en sera plus de même si les courbes (K) et (K_1) sont imaginaires. Et dans ce cas nous allons voir que les surfaces (Σ), (Σ_1) peuvent rester réelles pourvu que les courbes (K) et (K_1) soient imaginaires conjuguées.

12. Prenons donc pour φ, φ_1, φ_2 des fonctions imaginaires conjuguées de f, f_1, f_2 et donnons à β une valeur imaginaire conjuguée de α. La fonction H définie par l'équation (11) sera évidemment réelle et positive, et l'identité

$$2\mathrm{H} - 2 = -(f-\varphi)^2 - (f_1-\varphi_1)^2 - (f_2-\varphi_2)^2$$

prouve même qu'*elle sera supérieure à* 1. Le point M de la sphère, dont les coordonnées sont définies par les formules (12) ou les équations (4), sera évidemment réel. Quant aux surfaces (Σ), (Σ'), les formules (9) et (10) montrent clairement que les facteurs de λ^2 dans les expressions des coordonnées sont des imaginaires pures et, par conséquent, que *les deux surfaces seront réelles si l'on prend pour* λ^2 *une imaginaire pure*. Il suffira donc de poser, par exemple, τ étant réelle,

$$\lambda^2 = \frac{i\tau}{2}, \tag{35}$$

pour avoir des surfaces réelles, applicables toutes les deux sur le paraboloïde réel

$$x^2 - y^2 = 4\tau z. \tag{36}$$

Mais il y a une distinction essentielle à faire entre les deux surfaces.

13. Pour l'établir, remarquons qu'ici les déterminants Θ, Θ_1 ne seront plus réels. Mais il résulte de leurs expressions mêmes que les produits

$$i\Theta \quad \text{et} \quad i\Theta_1$$

se changent l'un dans l'autre quand on change i en $-i$ et, par suite, sont imaginaires conjugués. Donc, d'après les formules (29) et (27) les différentielles $i\,dv$ et du sont réelles; et, par conséquent, si l'on remplace v par iV et u par U, les fonctions U et V seront toutes deux réelles. Les expressions des éléments linéaires des surfaces (Σ) et (Σ') prendront la forme

$$ds^2 = \frac{\tau^2}{4}\frac{H-1}{H-1}dH^2 + \frac{H-1}{2}\tau^2 dU^2, \tag{37}$$

$$ds'^2 = \frac{\tau^2}{4}\frac{H-1}{H-1}dH^2 + \frac{H-1}{2}\tau^2 dV^2, \tag{38}$$

où *tout est réel*.

14. Pour obtenir le paraboloïde sur lequel elles sont applicables, il faut, en désignant par z, ρ et ω les coordonnées semi-polaires

d'un point, prendre pour le premier élément

$$(39)\qquad z = \frac{\tau}{2}(\mathrm{H}-1), \qquad \rho = \tau\sqrt{2\mathrm{H}-2}, \qquad \omega = \frac{\mathrm{U}}{2},$$

et pour le second

$$(40)\qquad z = -\frac{\tau}{2}(\mathrm{H}-1), \qquad \rho = \tau i\sqrt{2\mathrm{H}+2}, \qquad \omega = \frac{\mathrm{V}i}{2}.$$

Ces deux systèmes de formules montrent que la surface (Σ) est applicable *réellement* sur la partie réelle du paraboloïde

$$x^2 + y^2 = 4\tau z,$$

tandis que la surface (Σ') est applicable sur une partie imaginaire du paraboloïde, celle dont les points se projetteraient sur l'axe à gauche du plan directeur et pour laquelle les angles polaires ω seraient des imaginaires pures.

Si donc on veut se borner à des surfaces réelles applicables sur les parties réelles du paraboloïde, il faudra négliger les surfaces (Σ').

Ces surfaces sont bien applicables sur le paraboloïde réel; mais elles correspondent à une région entièrement imaginaire, dont toutefois l'élément linéaire est resté entièrement réel. C'est là un fait qui se représente, comme on sait, dans d'autres parties de la théorie de la déformation.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Die vier Gauss'chen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren 1. *u.* 2. *Grades.* (1799-1849). Herausgeg. von E. Netto. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, n° 14.) 2. Aufl. In-8°, 82 p. avec 1 planche. Leipzig, Engelmann.

Fischer (Vict.). — *Vektordifferentiation und Vektorintegration.* Gr. in-8°, v-82 p., avec 20 fig. Leipzig, Barth. 3 m.

Lemaire (G.). — *Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de Géométrie.* In-8°, 227 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

Maly (F.). — *Grundriss der Mediationsrechnung.* In-8°, XII-174. Graz, Styria. 10 m.

Mitteilungen *der mathematischen Gesellschaft in Hamburg.* T. IV, 4e livraison avec 2 planches. Leipzig, Teubner. 1 m. 60 pf.

Natorp (Paul). — *Logik (Grundlegung und log. Aufbau der Mathematik und mathemat. Naturwissenschaft) in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen.* In-8°, 57 p. Marburg, Elwert. 1 m.; cart. 1 m. 20 pf.

Serret (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential und Integral-Rechnung.* Deutsch. bearb. von Axel Harnack. 2e édition publiée par G. Bohlmann et E. Zermelo. T. III, 2e et dernière livraison. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 3 m.

Astronomisch-geodätische *Arbeiten I. Ordnung. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Greenwich i. J.* 1903. II-77 p. (*Veröffentlichungen der königl., preussischen geodätischen Instituts.* Neue Folge. N° 15). Gr. in-4°. Berlin, Stankiewicz. 5 m.

Encyclopädie *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* V. Bd. *Physik.* Red. von A. Sommerfeld. 2. Tl. 1. Heft. Gr. in-8°, 280 p. Leipzig, Teubner. 8 m.

Grassmann (Herm.). — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* Auf Veranlassg. der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgeg. von Fr. Engel. II. Bd. 1. Tl. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 16 m.

Contenu : Die Abhandlungen zur Geometrie u. Analysis. X-452 p. avec 45 fig.

Nouvelles *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques* (division centésimale du quadrant). Gr. in-8°, 223 p. Paris, Gauthier-Villars. Cart. 3 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (E.). — SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ANALYSE ET SES RAPPORTS AVEC DIVERSES SCIENCES. Conférences faites en Amérique. 1 vol. in-8°, 167 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Les lecteurs du *Bulletin* ont admiré récemment la belle conférence que M. Picard a faite au Congrès de Saint-Louis, sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences (1). Ils n'ont assurément pas oublié non plus celles qu'avait faites le même auteur, en 1899, à l'Université Clark, et qui ont paru l'année suivante dans la *Revue générale des Sciences* (2). Ils seront heureux de retrouver, dans un volume élégant, les quatre beaux discours de M. Picard, qui arrivent à l'éloquence par la hauteur des vues, la richesse des développements, l'intérêt et la variété des rapprochements, par la façon aussi dont l'orateur domine toujours son sujet. Voici les quelques mots qu'il a mis en tête :

« Je réunis ici les conférences que j'ai faites en Amérique, en 1899 et en 1904. Les premières traitent du développement de l'Analyse pendant le XIXe siècle; en même temps qu'elles ont un caractère historique, elles montrent les voies nouvelles où la Science tend à s'engager. Dans la quatrième conférence il est question surtout des relations de l'Analyse avec la Géométrie, la Mécanique et la Physique mathématique, et l'on insiste sur l'influence que ces dernières sciences ont eu sur son développement. Aucunes modifications n'ont été introduites dans le texte; j'ai ajouté seulement quelques notes contenant des indications bibliographiques. »

J. T.

(1) T. XXVIII, p. 267.
(2) (30 janvier, 15 mars et 30 avril.)

BAIRE (R.). — THÉORIE DES NOMBRES IRRATIONNELS, DES LIMITES ET DE LA CONTINUITÉ. 1 vol. in-8 ; 59 pages. Paris, Vuibert et Nony, 1905.

Ce petit Volume, où sont exposés en moins de soixante pages, et d'une façon aussi rigoureuse qu'il est possible, les concepts fondamentaux sur lesquels repose toute exposition vraiment scientifique de l'Analyse, est le résultat d'une réflexion très profonde : l'auteur est de ceux qui vont au fond de leur pensée, qui ne s'en laissent pas distraire par les habitudes reçues et qui parviennent à la condenser dans des formules très brèves. Son travail rendra assurément service dans l'enseignement, soit aux maîtres, soit aux élèves et l'on peut le recommander aux uns comme aux autres : il s'adresse à ceux qui ont le temps de réfléchir, qui ne se contentent point d'à peu près.

M. Baire adopte la définition, classique depuis M. Dedekind, des nombres irrationnels par une *coupure* faite dans l'ensemble des nombres rationnels. Cette définition lui permet de définir les mots « plus grand » et « plus petit », de montrer que l'ensemble des nombres réels est bien ordonné, de définir ensuite les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble. Jusqu'ici il n'y a, dans son exposition, rien d'essentiellement nouveau : car, si l'on rejette souvent les dernières notions après la théorie des opérations fondamentales effectuées sur les nombres irrationnels, il n'est personne, parmi ceux qui ont réfléchi sur ce sujet, qui n'ait aperçu la possibilité de rapprocher ces notions de la définition des nombres irrationnels; je me rappelle que M. Amigues, alors qu'il était professeur de mathématiques spéciales à Marseille, a proposé de les prendre comme point de départ de la théorie des opérations fondamentales. Il n'est sans doute pas le seul.

Un point où M. Baire commence à se séparer des habitudes consiste dans la définition qu'il adopte pour la limite d'une suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

« On dit qu'une telle suite a pour limite le nombre λ si, quels que soient les nombres λ' et λ'' satisfaisant aux conditions

$\lambda' < \lambda < \lambda''$, il y a un entier p tel que, pour $n > p$, on ait $\lambda' < u_n < \lambda''$. » Il introduit de suite la notion de *plus grande limite* et de *plus petite limite*. La condition pour qu'il y ait une limite, au sens ordinaire du mot, est que cette plus grande limite et cette plus petite limite coïncident.

Ceci acquis, M. Baire fait, parmi les quatre opérations fondamentales, une place spéciale à la différence : « La notion de différence, dit-il, est la forme précise de la notion vague de rapprochement, de voisinage, qui domine nécessairement toute étude où il s'agit du continu ; or le rôle des nombres irrationnels est précisément de servir à construire le continu, en comblant les lacunes que présente l'ensemble des nombres rationnels. » Il y a là, ce me semble, une vue très juste et il est incontestable que l'acquisition de la notion de différence donne au langage une commodité qu'il n'a pas autrement, et que cette commodité même amène à juger que, de cette façon, les idées s'enchaînent plus aisément. M. Baire a, en particulier, tout ce qu'il lui faut pour établir le théorème de Cauchy qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite ait une limite.

« J'estime enfin, dit-il un peu plus loin, qu'il n'y a pas intérêt à ajourner la définition d'un mot, lorsqu'on se sert déjà depuis longtemps de la chose que ce mot représente ; c'est pourquoi j'introduis le plus tôt possible les notions de fonction et de continuité. La notion de fonction est déjà impliquée dans la notion d'opération, et rien n'oblige de considérer les fonctions d'une seule variable comme plus simples que les fonctions de plusieurs variables ; c'est plutôt le contraire qui est vrai, car la première fonction que chacun a vue, c'est la somme de deux nombres entiers. »

Tout cela est vrai, et il est vrai aussi que les définitions des opérations fondamentales, celles des radicaux et même de la fonction exponentielle, se trouvent, grâce aux idées générales introduites par l'auteur, réunies en un bloc, au lieu d'exiger un raisonnement spécial pour chaque règle ; mais, bien qu'il y ait, dans ce mode d'exposition, un progrès incontestable et que le gain, pour ce qui concerne la brièveté, soit de toute évidence, l'introduction immédiate d'idées aussi générales que celles de fonction et de con-

tinuité n'est pas sans m'inquiéter un peu : c'est précisément parce qu'on se sert *depuis longtemps de la chose*, que l'idée et le mot deviennent parfaitement clairs ; pendant combien de temps faut-il s'être familiarisé avec la chose pour s'assimiler pleinement l'idée et le mot dont elle est le signe, jusqu'où faut-il reculer l'introduction du mot? Ce sont là, à coup sûr, des questions de mesure et de tact chez celui qui enseigne : M. Baire peut, d'ailleurs, répondre que son Livre ne s'adresse pas à des enfants qui commencent l'étude de l'Arithmétique. Des observations analogues, qui ne sont même pas des réserves, s'appliqueraient au bénéfice de la brièveté.

On répétait volontiers, il y a bientôt quarante ans, une phrase que l'on prêtait à Liouville, et d'après laquelle les démonstrations courtes avaient un avantage incontestable, celui de leur brièveté, tandis que les démonstrations longues pouvaient avoir un intérêt, par elles-mêmes, indépendamment de ce qu'elles tendent à prouver. Je me suis laissé aller à rappeler cette phrase et je m'aperçois qu'elle ne s'applique guère à mon sujet, car, dans ces démonstrations « spéciales pour chaque règle », il n'y a qu'un petit nombre d'idées, toujours les mêmes, qui sont précisément celles que M. Baire met en évidence, et, ainsi, ce dernier a bien le droit de trouver fastidieuse la répétition, cinq ou six fois renouvelée, sous des formes à peine différentes, de ces mêmes idées, et de juger qu'il vaut mieux les mettre en avant. Cela, toutefois, n'est pas certain, parce que, d'une part, les idées s'enfoncent et s'éclairent par la répétition, et que l'étudiant, dans l'esprit duquel elles ont fini par pénétrer, s'aperçoit bien qu'il y a répétition, et que les idées sont toujours les mêmes : elles arrivent à se condenser, et c'est là le point essentiel : la brièveté dans les mots et dans l'exposition a son mérite ; toute exposition, si longue qu'elle soit, qui devient brève dans l'esprit de celui qui se l'est assimilée, peut être regardée comme bonne. Ici encore, c'est une question de mesure et d'expérience. L'expérience réussit ici ou là, ou ne réussit pas, suivant le maître ou les élèves ; j'ajoute même qu'elle ne donne pas les mêmes résultats d'une génération à une autre, parce que la conviction des maîtres et la préparation antérieure des élèves n'est pas la même.

Quoi qu'il en soit, M. Baire caractérise parfaitement sa mé-

thode d'exposition en disant qu'il s'est efforcé d'ordonner les différentes matières de façon à éviter les redites et à n'utiliser, autant que possible, comme propositions intermédiaires, que des théorèmes ayant leur place marquée en Mathématiques.

Tout auteur est libre de limiter son sujet : je suis presque disposé à regretter que M. Baire n'ait pas fait, dans son exposition, une petite place à la notion de *point d'accumulation,* que je ne puis m'empêcher de trouver tout aussi fondamentale et primitive que celle de limite d'une suite et qui même, à ce qui me semble, éclaire cette dernière idée. Mais les choses s'enchaînent si bien, dans cette exposition, qu'il est peut-être préférable de n'en point troubler l'ordre. J. T.

CESARO (E.). — Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der infinitesimal Rechnung mit zahlreichen Uebungsbeispielen. 1 vol. in-8°, 894 pages, Leipzig, Teubner, 1904.

Le lecteur français se rendra un compte assez exact des matières traitées dans cet excellent *Lehrbuch* en se reportant au programme actuel de la classe de Mathématiques spéciales, pour l'Algèbre et l'Analyse : la coïncidence est assez naturelle, parce que l'étude de ces matières constitue une étape nécessaire, soit pour ceux qui veulent pousser plus loin l'étude des Mathématiques, soit pour ceux qui veulent entrer dans une carrière où ils auront à appliquer les Mathématiques : elles sont pour les uns et pour les autres un fond commun, auquel on peut bien ajouter ou retrancher un peu, qu'on ne peut pas beaucoup changer et il importe assez peu qu'elles soient enseignées au lycée ou à l'Université.

Le Livre de M. Cesàro est conçu dans un esprit *un peu* plus élevé que nos programmes. D'une part les démonstrations des propositions fondamentales de la théorie des fonctions sont exposées avec une entière rigueur et, pour atteindre cette rigueur, l'auteur a développé la théorie des nombres irrationnels : la notion de limite est exposée avec tous les détails utiles : presque partout,

l'auteur va un peu plus loin que nos programmes. D'autre part, il n'a pas sacrifié, comme on l'a fait chez nous, les éléments de ces théories qui, comme les propositions fondamentales concernant les formes quadratiques, ou les équations algébriques ont figuré jadis dans nos programmes, qui pourront bien y rentrer quelque jour. Dans ces conditions, on ne s'étonnera nullement de la grosseur de son volume : il contient réellement les matières que doit posséder, non pas seulement un mathématicien, mais quelqu'un qui, au XXe siècle, a reçu une bonne instruction mathématique. L'exposition est claire, concise, attrayante, et l'on peut, sans crainte, recommander ce *Lehrbuch* aux étudiants.

L'auteur avait parfaitement le droit de signaler, dans le titre de son Livre, les nombreux exemples et exercices qui s'y trouvent : ils sont vraiment très nombreux et j'ajoute qu'ils sont bien choisis et intéressants. J. T.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk*. Tome I, premier Volume : ARITHMÉTIQUE, rédigée dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer*. Fascicule I, in-8° de 160 pages. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, [illegible] 1904.

Nous n'avons pas à rappeler ici ce qu'est l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, ni les services qu'elle rend déjà. L'édition française n'en sera pas une traduction. Sans doute, le texte allemand en constituera le fond; mais l'exposition sera modifiée, dans le sens de nos habitudes.

En outre, il y aura une véritable collaboration entre les auteurs des articles allemands et ceux des exposés français : le nouveau [illegible] résultera d'une part d'un échange de vues entre tous les inte- des élève[illegible] d'autre part, des additions introduites soit par les pre- Quoi qu[illegible]rs, soit par les seconds, soit même par d'autres savants

particulièrement compétents qui voudront bien apporter leur concours à une œuvre qui, tout en conservant sa marque d'origine, tend à devenir, sous la direction des Académies qui l'ont fondée, une œuvre internationale. Les additions des nouveaux collaborateurs seront placées entre astériques.

L'édition française est divisée, comme l'édition allemande, en sept Tomes. Chaque Tome de l'édition française comprendra trois ou quatre Volumes, dont chacun se rapportera à une branche spéciale : ces Volumes paraîtront simultanément, afin que la publication ne soit pas arrêtée, si quelque article se trouve en retard. Les listes d'Ouvrages à consulter, les Tables et les Index seront réunis à la fin de chaque Volume, de manière à faciliter les recherches.

Le Tome I est sous presse; le premier Volume du Tome I est consacré à l'Arithmétique, c'est-à-dire à l'étude du nombre rationnel ou irrationnel, réel ou imaginaire, des nombres formés avec n unités, des combinaisons, des déterminants, des fractions continues, des séries, des produits infinis ou des déterminants infinis à éléments numériques, des ensembles, des groupes discontinus.

Le premier fascicule a paru : il contient un exposé des fondements de l'Arithmétique, d'après le texte allemand de H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk, un exposé de l'Analyse combinatoire et de la théorie des déterminants, d'après le texte allemand de E. Netto, par H. Vogt, le commencement de l'exposé de la théorie des nombres irrationnels et des limites, d'après le texte allemand d'A. Pringsheim, par J. Molk.

Le deuxième Volume est consacré à l'Algèbre, c'est-à-dire à l'étude des fonctions rationnelles, des formes algébriques, de l'élimination, des invariants, de la résolution des équations, tant au point de vue théorique qu'au point de vue numérique, des groupes finis de substitutions linéaires.

Le troisième Volume est consacré à la théorie des nombres; elle comprend les propriétés des nombres établies sans faire usage de l'Analyse, la théorie des formes arithmétiques, les propositions qui ont un caractère transcendant, la division du cercle, les idéaux, la multiplication complexe, etc. Le premier fascicule paraîtra incessamment.

Le quatrième Volume contient la théorie des probabilités, le calcul des différences, l'interpolation, la théorie des erreurs, la statistique, la théorie des assurances, les calculs numériques, la nomographie, les applications des mathématiques à l'économie politique, enfin une théorie de quelques jeux. Le premier fascicule paraîtra dans le courant de l'année.

Paul Tannery avait promis son concours pour les questions historiques : il s'est effectivement occupé du premier fascicule.

Le Tome II (Analyse) est en préparation.

Le Tome III sera consacré à la Géométrie.

Les trois premiers Tomes, publiés dans l'édition allemande par F. Meyer et H. Burkhardt, seront, dans l'édition française, publiés par les soins de J. Molk.

Les Tomes IV, V et VI (Mécanique, Physique, Géodésie, Physique du Globe, Astronomie) publiés, dans l'édition allemande, par F. Klein, C. Müller, A. Sommerfield, E. Wiechert, Ph. Furtwängler, Ch. Schwarzschild, seront, dans l'édition française, publiés sous la direction scientifique de P. Appell, A. Potier, Ch. Lallemand, H. Andoyer.

Plusieurs articles du Tome IV sont déjà distribués. Afin d'assurer l'unité du plan, l'uniformité des notations, la bonne confection des Index, M. Molk gardera la direction générale des Tomes qui se rapportent aux mathématiques appliquées.

Les Académies, sous les auspices desquelles est publiée l'Encyclopédie, étudient la confection d'un septième Tome qui sera consacré aux questions d'ordre philosophique, historique, didactique, etc.

Cette œuvre immense sera menée à bonne fin : les difficultés qu'elle présentait avaient de quoi faire reculer les hommes de peu de foi; mais les mathématiciens les plus illustres de notre époque ont senti la nécessité de fournir à leurs successeurs l'instrument de travail qui leur avait fait défaut : l'entreprise n'a rencontré partout que des bonnes volontés; c'est grâce au concours de ces bonnes volontés qu'elle s'achèvera. Les particuliers et les États manqueraient à leur devoir s'ils n'en assuraient pas le succès. A coup sûr, la reconnaissance de plusieurs générations de travail-

leurs est due à tous les savants qui collaborent à l'Encyclopédie : il est juste d'associer à leurs noms ceux des deux éditeurs, MM. Teubner et Gauthier-Villars. J. T.

NETTO (E.). ELEMENTARE ALGEBRA. AKADEMISCHE VORLESUNGEN FÜR STUDIERENDE DER ERSTEN SEMESTER. 1 vol. in-8°; VIII-198 pages; Leipzig, Teubner, 1904.

Ce petit Livre résume des leçons que M. Netto fait régulièrement, à l'Université de Giessen, pour les étudiants qui commencent leurs études mathématiques, ou pour ceux qui, désirant se tourner d'un autre côté que les mathématiques, savent cependant qu'il ne faut pas les ignorer et veulent connaître la nature des problèmes qu'elles traitent. Pour les uns, ce cours sera une introduction; il initiera les autres à quelques méthodes et à quelques notations essentielles et peut-être leur donnera-t-il quelquefois le regret de ne pas poursuivre l'étude de sujets aussi intéressants et aussi bien présentés.

A propos des choses les plus simples, au lieu de s'attarder à des détails sans intérêt, M. Netto oriente toujours le lecteur vers les méthodes générales.

Il va de soi qu'il présentera la résolution des équations du premier degré à une ou deux inconnues de façon à préparer la théorie des déterminants.

A propos de l'équation $x^2 = A$, il enseigne la règle de l'extraction de la racine carrée, la méthode d'approximation de Newton, les fractions continues; à propos de l'équation du second degré, il enseigne les fonctions symétriques, la transformation, les nombres complexes. L'intérêt de ces nombres apparaît de suite dans l'étude de l'équation binome. Les leçons se terminent par la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Partout la méthode est la même : mettre en lumière, dans chaque problème particulier, ce qu'il y a de général dans la façon dont on le résout. C'est juste le contraire du procédé bien connu qui con-

siste à rétrécir les éléments, à s'y enfermer, à refuser obstinément de se servir d'autre chose que de ce qui se trouve dans le petit cercle que l'on a tracé arbitrairement autour de soi. J. T.

PIONCHON (J.). — Grandeurs géométriques. 1 vol. in-8°, 128 pages. Paris, Gauthier-Villars; Grenoble, Gratier et Ray, 1903.

C'est un Volume d'une collection considérable dont M. Pionchon, directeur de l'Institut électrotechnique de l'Université de Grenoble, entreprend la publication sous le titre général : *Bibliothèque de l'élève ingénieur*. Cette collection sera divisée en cinq sections : Mathématiques, Mécanique, Physique industrielle, Économie industrielle.

Le présent Volume a pour but d'expliquer au lecteur comment on mesure les diverses grandeurs géométriques : longueurs, aires, angles, etc. L'exposition y est élémentaire, claire, précise et cependant philosophique. J. T.

MÉLANGES.

SUR L'EXISTENCE D'UN ELLIPSOIDE D'ABSORPTION DANS TOUT CRISTAL TRANSLUCIDE, MÊME SANS PLAN DE SYMÉTRIE NI AXE PRINCIPAL, ET SUR LA CONSTRUCTION DES RAYONS LUMINEUX DANS LES MILIEUX OPAQUES;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE : I. Équations du mouvement vibratoire de l'éther dans tout corps homogène translucide et coefficient de l'absorption qu'y éprouve un système d'ondes planes, latéralement indéfinies. — II. Construction des rayons lumineux quand les ondes planes ne sont plus latéralement indéfinies, dans le corps homogène, supposé encore translucide ou même opaque. — III. Absorption des rayons lumineux par un cristal translucide.

I. *Équations du mouvement vibratoire de l'éther dans tout corps homogène translucide et coefficient de l'absorption qu'y éprouve un système d'ondes planes, latéralement indéfinies.*

1. L'ensemble des faits optiques tend à montrer que la résistance opposée par les molécules pondérables d'un corps aux déplacements vibratoires ξ, η, ζ de son éther est analogue à celle qu'éprouve un fluide, de la part de petits solides massifs s'y trouvant entièrement immergés, à exécuter de *brèves* oscillations. Cette résistance comprend d'abord une partie principale, fonction linéaire des accélérations vibratoires ξ'', η'', ζ'' et pourvue d'un potentiel, c'est-à-dire égale, suivant chaque axe coordonné, à la dérivée, par rapport à l'accélération correspondante ξ'', ou η'', ou ζ'', d'un polynome

homogène du second degré en ξ'', η'', ζ''. Mais elle comprend en outre (par l'effet des frottements, s'il s'agit d'un fluide) une petite partie, fonction linéaire des vitesses ξ', η', ζ' à coefficients largement dépendants de la période vibratoire, et toujours décomposable en deux résistances distinctes, comme on peut voir par les pages 602 à 604 du Tome II de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière:* l'une admet un potentiel, ou égale, suivant chaque axe, la dérivée, par rapport à la vitesse correspondante ξ', η' ou ζ', d'un polynome homogène du second degré, que nous écrirons, à un facteur constant près,

$$a\xi'^2 + b'\eta'^2 + c'\zeta'^2,$$

en choisissant comme axes coordonnés ses *axes principaux,* dont la propriété caractéristique est d'y faire disparaître les rectangles $\eta'\zeta'$, $\zeta'\xi'$, $\xi'\eta'$; l'autre partie, dissymétrique et dont rien jusqu'à présent ne prouve l'existence effective [1], a ses trois composantes, sauf encore un facteur constant, de la forme

$$f\eta' - e\zeta', \quad d\zeta' - f\xi', \quad e\xi' - d\eta'.$$

Les équations du mouvement vibratoire de l'éther sont alors, quand on néglige les dispersion et polarisation rotatoire ordinaires [2],

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\xi''}{a^2} + F\eta' - E\zeta' - f\eta' + e\zeta' = a\xi - \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx},\\ &F\xi' - \frac{\eta''}{b^2} + D\zeta' - d\zeta' + f\xi' = b\eta - \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy},\\ &E\xi' + D\eta' + \frac{\zeta''}{c^2} + e\xi' - d\eta' = c\zeta' - \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{aligned}\right.$$

où Δ_2, θ désignent respectivement le symbole $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$

---

(1) Si ce n'est dans les corps soumis à l'influence d'un aimant, les actions productrices de la polarisation rotatoire magnétique y sont (à très peu près) *analytiquement* réductibles à cette forme.

(2) Ou, du moins, cette dernière; car les termes de dispersion reviennent, très sensiblement, à introduire, dans les constantes a, b, c, D, E, F ci-après, de petites parties fonctions de la période vibratoire.

et la dilatation cubique $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$; a^2, b^2, c^2, trois constantes positives; enfin D, E, F (à un facteur constant près), les trois coefficients des termes en $\eta''\zeta''$, $\zeta''\xi''$, $\xi''\eta''$ dans le potentiel de la partie principale des résistances.

2. Si l'on fait abstraction de la petite partie des résistances représentée par les trois dérivées du trinome $a'\xi'^2 + b'\eta'^2 + c'\zeta'^2$, le milieu est *transparent*, c'est-à-dire susceptible de propager des ondes planes exprimées par les parties réelles des formules symboliques

$$(2) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (L', M', N')\, e^{k(t - lx - my - nz)\sqrt{-1}},$$

avec k, l, m, n réels et constants, mais L', M', N' seulement constants. En effet, la substitution de ces valeurs de ξ, η, ζ dans les équations (1) du mouvement donne, en L', M', N', les trois équations homogènes du premier degré

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi L' + \chi M' + \psi N' = 0, \\ \varphi_1 L' + \chi_1 M' + \psi_1 N' = 0, \\ \varphi_2 L' + \chi_2 M' + \psi_2 N' = 0, \end{cases}$$

dont les neuf coefficients φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, ψ_2 ont les expressions

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi = U + l^2, & \chi = F + lm - \frac{f}{k}\sqrt{-1}, & \psi = E + nl - \frac{e}{k}\sqrt{-1}, \\ \varphi_1 = F + lm + \frac{f}{k}\sqrt{-1}, & \chi_1 = V + m^2, & \psi_1 = D + mn - \frac{d}{k}\sqrt{-1}, \\ \varphi_2 = E + nl - \frac{e}{k}\sqrt{-1}, & \chi_2 = D + mn + \frac{d}{k}\sqrt{-1}, & \psi_2 = W + n^2, \end{cases}$$

U, V, W désignant les trois différences

$$(5) \qquad (U, V, W) = \frac{1}{(a^2, b^2, c^2)} - (l^2 + m^2 + n^2).$$

Or il suffit de former, même sans le développer, le déterminant des neuf éléments φ, χ, ψ, ..., ψ_2, pour reconnaître que ses six termes sont, quatre, réels et, deux, conjugués ou à somme réelle; de sorte que l'annulation obligée de ce déterminant, pour rendre compatible le système (3), donne en l, m, n une équation de

forme réelle, définissant, comme on sait, pour chaque direction de la normale aux ondes planes $t - lx - my - nz = \text{const.}$, la vitesse ω de propagation, inverse de $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. D'ailleurs, au moins dans le cas, seul effectif, de d, e, f nuls ou très petits, les valeurs en résultant pour ω sont réelles; car ce sont celles qu'on doit à Fresnel, au changement près entraîné par l'orientation, ici différente, des x, y, z, qui n'est généralement pas celle des *axes* du potentiel de la partie principale des résistances. Ainsi la transparence du milieu, quand on annule a', b' et c', est bien établie [1].

3. Si, justement, la partie principale des résistances avait ses axes de symétrie en coïncidence avec ceux des x, y, z, qui sont les axes principaux des petites résistances en ξ', η', ζ' pourvues d'un potentiel, l'on aurait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$; et les expressions (4) de φ, χ, ψ, ..., ψ_2 se réduiraient à celles, (27), que j'ai étudiées, comme principale application, dans ma *Théorie générale de la translucidité* (même t. II, p. 611 à 618). Or les constantes D, E, F n'empêchent pas, dans (4), les quantités imaginaires φ_1, φ_2, χ_2 et χ, ψ, ψ_1 d'être respectivement conjuguées, ni de garder leurs dérivées en l, m, n. Par suite, *uniquement basés sur ces deux circonstances* quant aux six fonctions φ_1, φ_2,

---

[1] Il n'est pas impossible que les circonstances productrices des petites résistances en ξ', η', ζ' donnent lieu également à des résistances du même ordre, dépourvues de potentiel, en ξ'', η'', ζ''. Alors les deux constantes D, dans (1) et (4), prendraient des formes respectives comme $D + D_1$, $D - D_1$; et, de même, E, F deviendraient $E + E_1$, $F + F_1$, avec D_1, E_1, F_1 très petits comme d, e, f. Le déterminant, dans lequel φ_1, φ_2, χ_2 ne seraient plus rigoureusement conjugués à χ, ψ, ψ_1, acquerrait donc des termes imaginaires, où figureraient les produits de D_1, E_1, F_1 par d, e, f. Mais ces produits seraient négligeables, comme étant au moins du second ordre de petitesse; et l'équation en l, m, n continuerait à avoir forme réelle.

Toutefois, une étude que j'ai faite au Tome II cité (p. 413 à 429) montre qu'il résulterait, en général, de cette absence de potentiel pour les petites résistances en ξ'', η'', ζ'' ainsi ajoutées, des valeurs légèrement imaginaires de la vitesse ω de propagation (inverse de $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$) et, par suite, une imperfection de la transparence et une graduelle extinction du mouvement vibratoire, *pour les ondes planes les plus voisines*, en direction, *des plans cycliques de l'ellipsoïde dit d'élasticité*, ou des plans singuliers tangents à l'onde courbe de Fresnel sur tout un cercle de contact. Cette sorte d'absorption, spéciale à certaines ondes, ne me paraît pas avoir encore été étudiée

petites pa-ix autres ondes, pour lesquelles la transparence subsiste ait tant qu'on

χ_2 et χ, ψ, ψ_1), les raisonnements qui, à l'endroit cité (p. 615), m'ont conduit presque sans calcul au coefficient de *l'extinction*, par la distance croissante u à un plan fixe, qu'éprouvent les ondes dès qu'on introduit les petites résistances en ξ', η', ζ' pourvues d'un potentiel, subsisteront sans aucune complication, ni modification. Dans l'exponentielle e^{-fu} qui affecte alors l'amplitude des déplacements ξ, η, ζ *effectifs*, le coefficient f est donc donné par la formule (39) (p. 618). Et l'on a, par exemple,

$$(6) \qquad f = \frac{r}{\cos V} \frac{a'\mathcal{M}.\xi^2 - b'\mathcal{M}.\eta^2 - c'\mathcal{M}.\zeta^2}{\mathcal{M}(\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)},$$

où r désigne la vitesse de propagation du rayon lumineux corrélatif aux ondes, et supposé obtenu dans l'hypothèse de la transparence ou de a', b', c' nuls, V l'angle de ce rayon avec la normale à la *face d'entrée* de la lumière incidente dans le corps translucide (c'est-à-dire avec le sens suivant lequel se fait l'extinction quand l'illumination est uniforme sur toute la face d'entrée, supposée même indéfinie), enfin, où $\mathcal{M}.\xi'^2$, $\mathcal{M}.\eta'^2$, $\mathcal{M}.\zeta'^2$ sont les moyennes des valeurs que prennent, durant une période, les trois carrés ξ'^2, η'^2, ζ'^2 des vitesses vibratoires d'un atome quelconque d'éther.

Comme, en réalité, les coefficients d, e, f de dissymétrie sont

---

pourrait négliger les résistances en a, b, c, la mise en compte de celles-ci les affecterait d'un coefficient d'absorption ou d'extinction dont la valeur, calculée d'après la méthode générale suivie ci-après et indiquée aux pages 612 et 613 du même Tome II, serait, par la simple raison de continuité, très peu différente de celle que nous obtiendrons aux numéros suivants en supposant nuls D_1, E_1, F_1.

Contrairement à ce qui arrive ainsi pour D_1, E_1, F_1, les coefficients de dissymétrie d, e, f peuvent cesser d'être très petits, sans rendre imaginaires certaines vitesses ω de propagation ni, par suite, nuire alors à la transparence. Cela résulte de la même étude rappelée ici, où il suffit de remplacer, vu (4), D_1, E_1, F_1 par $-\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}$ (d, e, f), ou, par suite, de changer, dans le déterminant, les signes des carrés et produits de ces coefficients D_1, E_1, F_1. Alors, tandis qu'avec leurs signes primitifs, ces carrés et produits avaient pour effet de réduire la somme des deux racines ω^2 possibles pour les ondes d'une même direction, sans changer leur produit, et, par conséquent, de rapprocher ces deux racines de l'égalité, les changements de signe en question accroîtront cette somme et aussi, par suite, la différence des deux racines; ce qui écartera, pour elles, la possibilité de devenir égales et, à plus forte raison, imaginaires.

ou nuls, ou insensibles, L', M', N' peuvent être supposés réels ou avoir, du moins, leurs rapports réels. Alors les trajectoires deviennent rectilignes, et ξ', η', ζ' sont proportionnels aux cosinus directeurs l', m', n' de la vibration. La formule (6) se réduit donc à

$$f = \frac{f}{\cos V}(a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2). \tag{7}$$

4. Dans les expériences optiques, les ondes planes seront, non plus latéralement indéfinies, mais limitées, assez étendues néanmoins, en général, pour se comporter à peu près, dans le voisinage d'un point éclairé quelconque, comme si elles étaient latéralement indéfinies tout autour, ou pour ne pas donner de phénomènes notables de diffraction. Bref, elles constitueront un *pinceau lumineux,* lieu de *rayons* parallèles suivant le sens où le mouvement vibratoire se transmettra le plus loin. Cette direction ne pourra, vu la quasi-transparence admise, qu'être voisine de celle des rayons, de longueur indéfinie, existant dans le cas de a', b', c' nuls, direction qu'on sait être donnée, à partir d'un point quelconque, par la droite qui le joint au point de contact de l'enveloppe d'ondes planes fictives, censées issues ensemble, dans tous les sens, du point en question, avec l'une d'entre elles, savoir, celle qui est parallèle aux ondes planes proposées.

Le physicien évaluera naturellement suivant cette direction privilégiée, c'est-à-dire *le long même du rayon ou pinceau lumineux*, la distance du point quelconque (x, y, z) de son trajet dans le milieu translucide, au plan de la face d'entrée. Appelons δ la distance *ainsi évaluée,* ou dont u sera la projection sur la normale à cette face; et comme l'angle du rayon lumineux effectif avec la normale u différera très peu de V, l'on aura sensiblement $u = \delta \cos V$. L'exponentielle e^{-fu} deviendra donc

$$e^{-f\cos V.\delta};$$

et, si l'on admet que cette exponentielle continue, malgré la limitation latérale des ondes, à exprimer proportionnellement l'amplitude approchée des mouvements vibratoires, c'est *le produit* $f \cos V$ qui *sera, toujours pour l'amplitude, le coefficient d'extinction ou d'absorption à considérer dans la pratique.*

II. *Construction des rayons lumineux quand les ondes planes ne sont plus latéralement indéfinies, dans le corps homogène, supposé encore translucide ou même opaque.*

5. Mais il convient justement de reconnaître d'une manière précise, avant d'aller plus loin, que des ondes limitées comme il vient d'être dit se transmettront bien, avec l'affaiblissement indiqué par l'exponentielle e^{-fu}, suivant une direction très peu différente de celle des rayons construits dans l'hypothèse de la transparence ou de a', b', c' nuls.

Les mouvements seront supposés, encore, partout pendulaires, et, dans le milieu transparent extérieur, dus à des ondes planes incidentes, de propagation uniforme, ayant leur amplitude très graduellement variable d'un point à l'autre de la face d'entrée, sur laquelle cette amplitude sera donnée arbitrairement. Dès lors, les déplacements ξ, η, ζ dans le milieu translucide, partout réglés sensiblement de manière à constituer un ou plusieurs systèmes d'ondes planes, auront dans chacun de ces systèmes, aussitôt après l'entrée, leurs propres amplitudes, la direction de leurs ondes et les retards de phase de celles-ci sur les mouvements incidents, calculables par la théorie de la réflexion et de la réfraction, qui y donnera, pour chaque système d'ondes planes réfractées, une amplitude partout proportionnelle à celle des ondes incidentes, mais une direction d'ondes, et un retard de phase à la surface, constants.

Nous aurons à étudier la progression, dans le milieu translucide, de l'un quelconque de ces systèmes d'ondes réfractées.

6. Pour les ondes planes indéfinies, d'amplitude et à propagation uniformes, considérées d'abord, les déplacements pendulaires effectifs étaient (comme je l'ai démontré dans le même t. II, p. 493) les parties réelles de déplacements symboliques de la forme

$$(8) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (L', M', N')e^{(\lambda' - L'x - M'y - N'z)\sqrt{-1}},$$

avec L, M, N, L', M', N' constantes imaginaires, dont les trois premières exprimaient la *propagation* par leurs parties réelles l, m, n et l'*extinction* par leurs parties imaginaires. Les rapports mutuels des parties réelles de L, M, N s'y trouvaient, et seront toujours, *imposés* par la direction constante, *donnée ou obtenue*, mais pouvant être quelconque, des ondes planes; et, ceux des parties imaginaires, également par la direction, donnée tout aussi arbitrairement, de la face d'entrée de la lumière dans le corps translucide. Et quant aux deux paramètres distincts qui subsistaient dans L, M, N à part ces deux sortes de rapports, savoir, la vitesse de propagation ω pour la partie réelle et le coefficient f d'extinction pour la partie imaginaire, on sait que les trois équations du mouvement, virtuellement dédoublées en six par la séparation du réel d'avec l'imaginaire, les ont déterminés, en même temps que les (quatre) rapports mutuels tant des parties réelles que des parties imaginaires de L', M', N'. Il ne subsistait ainsi de *disponible*, dans les ξ, η, ζ symboliques, et, par suite, il n'y aura de *variable entre de larges limites*, maintenant que nos ondes ne seront plus indéfinies ou d'amplitude partout uniforme, qu'un facteur, I, commun à L', M', N' et de la forme $e^{j\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire comprenant un *coefficient arbitraire*, e^i, *d'amplitude*, avec une *constante de phase* j, arbitraire aussi : L', M', N' étaient donc rigoureusement, et seront, maintenant, d'une manière approchée, les produits de I par trois polynomes λ, μ, ν (déterminants mineurs) en φ, χ, ψ, ..., ψ_2 ou, par suite, en L, M, N et même, sensiblement, en l, m, n, comme on voit par les pages 612 à 615 du Tome II cité.

Même si le corps est très opaque (et non plus translucide), mais encore homogène, ou ayant son éther toujours régi par trois équations linéaires aux dérivées partielles de ξ, η, ζ en t, x, y, z et à coefficients constants, la substitution des valeurs (8) dans ces équations donnera trois relations dans le genre de (3), avec φ, χ, ψ, ..., ψ_2 fonctions entières de L, M, N, relations astreintes à avoir leur déterminant, qui est un certain polynome F(L, M, N), égal à zéro. Comme les directions imposées des ondes et de la face d'entrée ne laissent de disponibles, dans L, M, N, que la vitesse ω de propagation et le coefficient f d'extinction, cette équation F(L, M, N) = 0, dédoublée par la séparation du réel d'avec

l'imaginaire, déterminera tout à la fois ω et f. Après quoi, deux des équations (3), devenues ainsi compatibles avec la troisième, feront connaître trois polynomes (déterminants mineurs) λ, μ, ν, en φ, χ, ψ, ..., ψ_2 et, par suite, en L, M, N, dont L', M', N' seront les produits par une même constante imaginaire I [1].

7. Maintenant que nos ondes à vibrations pendulaires, ondes encore planes et de direction imposée, ne sont plus d'amplitude uniforme sur les plans $u =$ const. parallèles à la face d'entrée, les déplacements ξ, η, ζ continuent-ils à être les parties réelles de solutions symboliques de la forme (8)? Pour le reconnaître, observons que chacun des déplacements *effectifs* ξ, η, ζ n'a pas cessé d'admettre des formules comme

$$(9)\quad \begin{cases} e^{-fu}[\mathrm{A}\cos k(t - lx - my - nz) + \mathrm{B}\sin k(t - lx - my - nz)] \\ \text{ou} \\ \mathrm{C}e^{-fu}\cos[\mathrm{D} + k(t - lx - my - nz)]. \end{cases}$$

avec k, l, m, n, f les mêmes que pour les précédentes ondes indéfinies, mais avec A, B, C, D fonctions continues *très lentement variables* de x, y, z (et non plus constantes), astreintes d'ailleurs à vérifier les trois équations indéfinies linéaires du mouvement. Or, le temps t n'entrant pas explicitement dans ces équations,

---

[1] Toutefois, les formules (8) supposent le coefficient effectif U d'amplitude, qui est fonction de la distance u à la face d'entrée, de la forme simple e^{-fu}. Or la démonstration de celle-ci, telle qu'elle est indiquée à la page 363 citée, ne s'étendrait pas à des milieux *opaques* dont l'éther aurait ses équations de mouvement d'un ordre *supérieur au sixième* quant aux dérivations de ξ, η, ζ en x, y, z : hypothèse, il est vrai, bien invraisemblable. Mais cette démonstration s'applique jusqu'au sixième ordre.

En effet, si les six premières dérivées de U en u sont désignées par U', U'', U''', U^IV, U^V, U^VI, les trois équations de mouvement données, dédoublées par l'égalité séparée, dans les deux membres, des coefficients du cosinus et du sinus en t qui y figureront, donnera, en U, U', ..., U^VI, six équations linéaires, homogènes et à coefficients constants. Or, en tirant U^VI de l'une d'elles et substituant sa valeur dans les cinq autres, il viendra cinq équations analogues en U, U', .., U^V. Puis l'élimination de U^V en donnera, de même, quatre du quatrième ordre; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation unique du premier ordre, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{U}' - f\mathrm{U} = 0$, ayant bien pour intégrale $\mathrm{U} = \mathrm{C}e^{-fu}$, ou $\mathrm{U} = e^{-fu}$, avec un *coefficient d'extinction f fonction rationnelle* de k, l, m, n, A, B, ..., et des coefficients des équations données.

l'on en aura une nouvelle solution par un déplacement $\frac{\pi}{2k}$, vers le passé, de l'origine des temps, qui remplacera le terme kt par $kt - \frac{\pi}{2}$. Cette nouvelle solution réelle sera donc, encore pour ξ, η ou ζ,

$$Ce^{-kt}\sin[D + k(t - lx - my - nz)];$$

et, multipliée par $\sqrt{-1}$, puis ajoutée à la précédente (9), elle donnera, toujours pour ξ, η ou ζ, la solution symbolique

$$Ce^{D\sqrt{-1}}e^{-kt}e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}},$$

revenant bien, si l'on appelle L′, M′ ou N′ le produit $Ce^{D\sqrt{-1}}$, à prendre, conformément à (8), $(L', M', N')\, e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}$ pour les trois fonctions ξ, η, ζ, avec L, M, N identiques à leurs valeurs précédemment obtenues.

Ainsi *la seule particularité distinguant nos ondes latéralement limitées d'ondes indéfinies, consistera en ce que* L′, M′, N′, *au lieu d'être des constantes, seront trois fonctions de x, y, z à variations très lentes, régies par les trois équations du mouvement*. Enfin, comme ces fonctions L′, M′, N′ devenaient dans les ondes latéralement indéfinies, et sous la condition $F(L, M, N) = 0$, les trois produits des polynomes λ, μ, ν en L, M, N par une même quantité I alors indépendante de x, y, z, elles ne pourront, dans nos ondes limitées, différer des trois produits, par λ, μ, ν, d'une fonction I de x, y, z très lentement variable, que par de petits écarts, s'annulant avec les dérivées de I en x, y, z et, dès lors, naturellement supposables de l'ordre de ces dérivées de I [1].

Or celles-ci, que nous écrirons $\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$, ne varieront que *sur des étendues fort grandes* (par rapport à la longueur d'onde) *de quantités comparables à elles-mêmes;* de sorte que leurs propres dérivées en x, y, z seront d'un ordre de petitesse supérieur et négligeables relativement. Donc *on regardera comme des constantes, à côté de* L′, M′, N′, I, *les dérivées* $\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$ *ou encore leurs rap-*

---

[1] L'un des trois écarts pourrait même être annulé, si on le désirait; car rien n'empêche d'appeler I, par exemple, le quotient de L′ par λ.

ports, $\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$, *à* I; et *les propres dérivées de* L′, M′, N′ *en* x, y, z *égaleront les produits respectifs de* λ, μ, ν *par* $\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$.

8. Dès lors les dérivations en t, x, y, z des expressions (8) de ξ, η, ζ, à effectuer dans les trois équations linéaires du mouvement, se feront avec la plus grande facilité; car elles reviendront évidemment à multiplier la quantité différentiée par les facteurs respectifs *constants*

$$k\sqrt{-1},\quad -kL\sqrt{-1}+\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial x},\quad -kM\sqrt{-1}+\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial y},\quad -kN\sqrt{-1}+\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial z},$$

ou par $-k\sqrt{-1}$ et, respectivement,

$$-1,\quad L-\frac{\sqrt{-1}}{kI}\frac{\partial I}{\partial x},\quad M-\frac{\sqrt{-1}}{kI}\frac{\partial I}{\partial y},\quad N-\frac{\sqrt{-1}}{kI}\frac{\partial I}{\partial z}.$$

Or les trois dernières de ces expressions sont L, M, N accrues de quantités extrêmement petites *assimilables à des différentielles*, c'est-à-dire ayant leurs carrés et produits négligeables. Donc les équations du mouvement prendront la forme (3), mais où, dans les polynomes $\varphi, \chi, \psi, \ldots, \psi_2$ en L, M, N du cas des ondes indéfinies, chaque paramètre L, M, N se trouvera ainsi accru de la *différentielle* correspondante $\frac{\sqrt{-1}}{kI}\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$. Le déterminant du système (3), astreint toujours à s'annuler, deviendra, de la sorte,

$$F(L, M, N)+\frac{\sqrt{-1}}{kI}\left(\frac{dF}{dL}\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{dF}{dM}\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{dF}{dN}\frac{\partial I}{\partial z}\right);$$

et, comme les constantes L, M, N auront déjà été choisies de manière à donner $F(L, M, N)=0$, la fonction I, à variations lentes, de x, y, z, se trouvera régie par l'équation

$$\frac{1}{I}\left(\frac{dF}{dL}\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{dF}{dM}\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{dF}{dN}\frac{\partial I}{\partial z}\right)=0. \tag{10}$$

Mais elle pourra, à cette condition près qui rendra compatibles les équations (3), être quelconque. Car celles des relations (3) qui, dans le cas I = const., avaient donné les coefficients L′, M′, N

proportionnels aux trois polynomes λ, μ, ν en L, M, N, assureront à ces coefficients des rapports, *variables*, toujours peu différents de ceux-là, ou revenant pratiquement au même pour le physicien, et grâce auxquels les trois équations du mouvement seront satisfaites. Ces rapports seront, en effet, ceux mêmes des polynomes λ, μ, ν, où L, M, N se trouveraient accrus, respectivement, des trois quantités très petites $\frac{\sqrt{-1}}{\lambda I}\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$.

Ainsi la fonction I n'est astreinte qu'à vérifier la relation (10).

Pour y séparer le réel d'avec l'imaginaire, appelons :

P, Q, R les parties réelles et $\sqrt{-1}(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ les parties imaginaires

des trois dérivées partielles $\frac{dF}{d(L, M, N)}$, qui sont des polynomes par rapport à L, M, N et aux coefficients des équations données du mouvement; et observons, d'autre part, que, I ayant la forme $e^{i+j\sqrt{-1}}$, les trois quotients $\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$ sont

$$\frac{\partial i}{\partial(x, y, z)} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial j}{\partial(x, y, z)}.$$

Le dédoublement de (10) donnera

$$P\frac{\partial i}{\partial x} + Q\frac{\partial i}{\partial y} + R\frac{\partial i}{\partial z} = \mathfrak{P}\frac{\partial j}{\partial x} + \mathfrak{Q}\frac{\partial j}{\partial y} + \mathfrak{R}\frac{\partial j}{\partial z},$$

$$P\frac{\partial j}{\partial x} + Q\frac{\partial j}{\partial y} + R\frac{\partial j}{\partial z} = -\left(\mathfrak{P}\frac{\partial i}{\partial x} + \mathfrak{Q}\frac{\partial i}{\partial y} + \mathfrak{R}\frac{\partial i}{\partial z}\right),$$

ou bien, en divisant par $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$, appelant

$$(11) \qquad K \text{ le radical } \sqrt{\frac{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{R}^2}{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

et traçant, à partir du point (x, y, z), suivant les deux directions respectives *constantes* (P, Q, R), $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$, deux chemins infiniment petits ∂s, $\partial s'$, le long desquels i et j auront de petites dérivées $\frac{\partial(i, j)}{(\partial s, \partial s')}$,

$$(12) \qquad \frac{\partial i}{\partial s} = K\frac{\partial j}{\partial s'}, \qquad \frac{\partial j}{\partial s} = -K\frac{\partial i}{\partial s'}.$$

9. Cela posé, coupons par les plans parallèles aux deux directions (P, Q, R), ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$) la face d'entrée, dans le corps opaque, de la lumière incidente: et, dans l'un quelconque de ces plans, prenons pour axe des Y la section obtenue, en lui associant un axe des X normal, dirigé vers l'intérieur du corps opaque. Si α, α' sont les deux angles aigus (positifs du côté des Y positifs, négatifs de l'autre côté) faits avec l'axe des X positifs par les deux directions (P, Q, R), ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$), l'on aura évidemment, dans tout le plan des XY, les formules symboliques de différentiation

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial s} = (\cos\alpha)\frac{\partial}{\partial X} - (\sin\alpha)\frac{\partial}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial}{\partial s'} = (\cos\alpha')\frac{\partial}{\partial X} - (\sin\alpha')\frac{\partial}{\partial Y};$$

et les relations (12) deviendront

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial X}\cos\alpha - K\dfrac{\partial j}{\partial X}\cos\alpha' = -\dfrac{\partial i}{\partial Y}\sin\alpha + K\dfrac{\partial j}{\partial Y}\sin\alpha', \\[2ex] K\dfrac{\partial i}{\partial X}\cos\alpha' - \dfrac{\partial j}{\partial X}\cos\alpha = -K\dfrac{\partial i}{\partial Y}\sin\alpha' - \dfrac{\partial j}{\partial Y}\sin\alpha. \end{cases}$$

On voit qu'elles déterminent partout $\frac{\partial(i, j)}{\partial X}$ en fonction des $\frac{\partial(i, j)}{\partial Y}$, et qu'elles feront, par conséquent, connaître i, j de proche en proche, à partir de la face d'entrée $X = 0$ où le coefficient d'amplitude e^i est arbitrairement donné pour toutes les valeurs de Y et où la *constante j de phase* est, de même, connue. L'intégration des deux équations simultanées (14) complétera donc la résolution du problème des mouvements vibratoires produits dans l'éther du corps opaque, où il ne restait justement à obtenir d'important que la fonction imaginaire I.

10. Le coefficient e^i d'amplitude offre un intérêt particulier, puisque son carré sera partout, abstraction faite de celui de l'exponentielle e^{-fu} mesurant *l'absorption* en quelque sorte *normale*, proportionnel à l'intensité de l'éclairement. Et l'on pourra, pour cette raison, appeler *rayons lumineux* les lignes du plan le long desquelles les valeurs de i se transmettront, ou dont l'équation sera $i =$ constante.

Il y a donc lieu de formuler à part les lois qui régissent i.

Et, d'abord, au départ de la face d'entrée où s'annule la dérivée

de j en Y, l'élimination de $\frac{dj}{dX}$ entre les deux équations (14) donne

$$(15)\qquad (\text{pour } X = 0)\qquad \frac{\partial i}{\partial X} + \frac{\cos\alpha\sin\alpha + K^2\cos\alpha'\sin\alpha'}{\cos^2\alpha + K^2\cos^2\alpha'}\frac{\partial i}{\partial Y} = 0.$$

Or, si l'on appelle ρ, *dans le plan des* XY, *l'angle de réfraction,* les deux cosinus directeurs du rayon lumineux y seront $\cos\rho$, $\sin\rho$; et l'on aura

$$(\text{pour } X = 0)\qquad \frac{\partial i}{\partial X}\cos\rho + \frac{\partial i}{\partial Y}\sin\rho = 0,$$

c'est-à-dire, par comparaison à (15),

$$(16)\qquad \operatorname{tang}\rho = \frac{1 + K^2\dfrac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha}}{1 + K^2\dfrac{\cos^2\alpha'}{\cos^2\alpha}}\operatorname{tang}\alpha,$$

formule qui déterminera l'angle ρ de réfraction.

Grâce à ce que le coefficient d'amplitude e^i est connu sur toute la face d'entrée $X = 0$, et à la relation (15) qui y fournira $\frac{\partial i}{\partial X}$, l'on aura, sur cette face, toutes les *données initiales* nécessaires pour déterminer i à l'intérieur du corps opaque, pourvu qu'on puisse former une équation linéaire aux dérivées partielles secondes de i en X et en Y. Or une telle équation résulte précisément de l'élimination de j entre les deux équations (14). Résolvons, en effet, celles-ci par rapport à $\frac{\partial j}{\partial(X, Y)}$; ce qui donne

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial X} &= \frac{\sin 2\alpha + K^2\sin 2\alpha'}{2K\sin(\alpha - \alpha')}\frac{\partial i}{\partial X} + \frac{\sin^2\alpha + K^2\sin^2\alpha'}{K\sin(\alpha - \alpha')}\frac{\partial i}{\partial Y},\\ -\frac{\partial j}{\partial Y} &= \frac{\cos^2\alpha - K^2\cos^2\alpha'}{K\sin(\alpha - \alpha')}\frac{\partial i}{\partial X} + \frac{\sin 2\alpha + K^2\sin 2\alpha'}{2K\sin(\alpha - \alpha')}\frac{\partial i}{\partial Y}.\end{aligned}\right.$$

Puis, différentiant la première en Y et la seconde en X, exprimons que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 j}{\partial X\,\partial Y}$ sont égales. L'équation du second ordre ainsi obtenue pour régir le coefficient e^i d'amplitude sera

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\cos^2\alpha + K^2\cos^2\alpha')\frac{\partial^2 i}{\partial X^2}\\ &\quad + (\sin 2\alpha + K^2\sin 2\alpha')\frac{\partial^2 i}{\partial X\,\partial Y} + (\sin^2\alpha + K^2\sin^2\alpha')\frac{\partial^2 i}{\partial Y^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

ou, sous une forme plus condensée, et vu les formules (13),

$$\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} + K^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s'^2} = 0. \tag{19}$$

Celle-ci aurait été obtenue plus rapidement, en observant que les formules symboliques (13) sont à coefficients constants; de sorte que les équations (12), écrites

$$K \frac{\partial j}{\partial s'} = \frac{\partial i}{\partial s}, \qquad -K \frac{\partial j}{\partial s} = K^2 \frac{\partial i}{\partial s'},$$

puis différentiées, la première, en s, la seconde, en s', donnent pour $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial j}{\partial s'}$ et pour $\frac{\partial}{\partial s'}\frac{\partial j}{\partial s}$ la même quantité; d'où résulte, par addition, l'élimination de cette valeur commune [1].

L'on aurait de même

$$\frac{\partial^2 j}{\partial s^2} + K^2 \frac{\partial^2 j}{\partial s'^2} = 0. \tag{19 bis}$$

III. — *Absorption des rayons lumineux par un cristal translucide.*

11. Le corps est *transparent*, quand des valeurs réelles, l, m, n, de L, M, N, ayant entre elles les rapports des cosinus directeurs donnés de la normale aux ondes planes, vérifient l'équation $F(L, M, N) = 0$, dès lors susceptible d'être débarrassée du symbole $\sqrt{-1}$. On voit qu'alors la fonction F, après suppression (s'il y a lieu) de ses facteurs constants imaginaires, a ses dérivées partielles, elles-mêmes, de forme réelle, pourvu que, du moins, L,

---

[1] On peut voir, aux pages 584 à 587 du Tome II cité plus haut, l'application, à un corps *isotrope*, de cette théorie générale des rayons lumineux dans les milieux opaques homogènes. Comme l'équation en L, M, N se réduit alors à $L^2 + M^2 + N^2 = \text{const.}$, le plan des XY est celui d'incidence et les deux directions (P, Q, R), ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$) sont celles des deux normales respectives aux ondes réfractées et à la face d'entrée. Les rayons lumineux, devenus obliques aux ondes, et plus ou moins courbes suivant la manière dont varie v avec Y pour $X = 0$, se trouvent, dès l'entrée, rejetés sensiblement vers la normale à la surface, c'est-à-dire vers l'axe des X positifs, et d'autant plus, en général, que la période vibratoire est plus longue. La dispersion correspondante est ainsi *anomale*.

M, N continuent à être réels quand leurs rapports diffèrent très peu des proposés. Et l'on peut prendre

$$(P, Q, R) = \frac{dF(l, m, n)}{d(l, m, n)}, \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}) = 0; \qquad \text{d'où} \qquad K = 0.$$

Les équations (12) deviennent

$$\frac{\partial i, j)}{\partial s} = 0.$$

Donc les rayons lumineux $i =$ const. se confondent avec les droites dont la direction a ses cosinus caractéristiques proportionnels aux trois dérivées partielles $\frac{dF(l, m, n)}{d(l, m, n)}$. Or cette direction est précisément celle que donne la construction d'Huygens ou de Fresnel, et que l'on obtient en joignant l'origine au point de contact de l'onde plane $lx + my + nz = 1$, partie de cette origine depuis l'unité de temps, avec l'enveloppe de toutes les ondes planes analogues, censées orientées suivant tous les sens (l, m, n).

12. Mais supposons le corps seulement *translucide*. C'est dire que de petites parties purement imaginaires, ou ayant $\sqrt{-1}$ en facteur, et qu'on peut appeler ∂L, ∂M, ∂N, ont besoin d'être adjointes à l, m, n pour donner $F(l - \partial L, m - \partial M, n + \partial N) = 0$. Cela arrive principalement, comme on voit par les pages 611 à 613 du Tome II cité, à raison de très petites parties imaginaires acquises, *dans les cas étudiés de vibrations pendulaires*, par les coefficients physiques des équations de mouvement *propres aux milieux transparents*. Les trois fonctions $\sqrt{-1}\,(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ sont donc alors les *très petits accroissements linéaires*, évaluables à la manière de différentielles totales, éprouvés par P, Q, R, quand ces coefficients physiques et l, m, n reçoivent leurs faibles variations, *purement imaginaires*, dont on néglige les carrés et produits. Ainsi, $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{R}^2$ et, par suite, K^2 y sont négligeables *du second ordre;* ce qui réduit l'équation (19) à $\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} = 0$, ou oblige à faire constante, le long de la direction (P, Q, R), la dérivée première $\frac{\partial i}{\partial s}$. Or la condition (15), spéciale à $X = 0$, est réduite

elle-même à

$$(\text{pour } X = 0) \qquad \frac{\partial i}{\partial X}\cos\alpha + \frac{\partial i}{\partial Y}\sin\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial i}{\partial s} = 0.$$

Donc, *les rayons lumineux* $i = \text{const.}$ *sont alors (aux écarts près négligés du second ordre) identiques aux droites, de direction* (P, Q, R), *données par la construction d'Huygens, pour le corps censé transparent ou défini en supprimant les petites parties imaginaires des coefficients physiques, c'est-à-dire en négligeant l'absorption* [1].

13. L'équation $F(L, M, N) = 0$ a de même, comme on sait, son premier membre réductible à une fonction réelle, $\bar{\mathcal{F}}(l, m, n)$, accrue d'une *différentielle*, entièrement imaginaire, obtenue en complétant les parties réelles des coefficients physiques relatifs au milieu transparent par leurs très petites parties imaginaires et l, m, n par ∂L, ∂M, ∂N. Donc la séparation du réel d'avec l'imaginaire y fournit d'abord l'équation $\bar{\mathcal{F}}(l, m, n) = 0$, laquelle fera connaître la même vitesse ω de propagation que dans le milieu rendu transparent par la suppression des petites parties imaginaires des coefficients, et, en outre, une équation formée en annulant une différentielle totale de $\bar{\mathcal{F}}(l, m, n)$ où figureront linéairement ces petites

---

[1] L'équation (19 *bis*) se trouve également réduite, par la suppression du terme en K^2, à $\frac{\partial^2 j}{\partial s^2} = 0$; ce qui rend, le long de chaque rayon $f\,\partial s$ (ou $i = \text{const.}$), la dérivée $\frac{\partial j}{\partial s}$ invariable et lui attribue sa valeur au départ, relative à $X = 0$. Calculons celle-ci par la seconde équation (14), où $\frac{\partial i}{\partial X}$ vaudra, d'après (15), $\frac{\partial i}{\partial Y}\tang\alpha$, et où $\frac{\partial j}{\partial Y}$ sera zéro. Il viendra presque immédiatement

$$(\text{pour } X = 0) \qquad \frac{dj}{dX} = K\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\cos^2\alpha}\frac{\partial i}{\partial Y};$$

après quoi, la première équation (14) se trouvera satisfaite à des termes près en K^2. Ainsi, le long de chaque rayon lumineux, la *constante* j *de phase* croît uniformément, par unité du chemin $f\,\partial s$ parcouru, de la petite quantité $\frac{\partial j}{\partial s}$, ou $\frac{\partial j}{\partial X}\cos\alpha$, égale à $K\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\cos\alpha}\frac{\partial i}{\partial Y}$, *considérée au départ du rayon* sur la face d'entrée, et variable d'un rayon à l'autre avec le mode de distribution des amplitudes e^i sur cette face.

parties, avec les trois termes $\frac{d\bar{x}}{dl}\partial L$, $\frac{d\bar{x}}{dm}\partial M$, $\frac{d\bar{x}}{dn}\partial N$. C'est celle-ci qui aura donné le coefficient f d'extinction calculé au paragraphe I et qui devient, comme on a vu (n° 4), $f\cos V$ quand on mesure suivant le sens des rayons lumineux les distances δ parcourues.

On voit ainsi que le *coefficient d'extinction obtenu se trouvera applicable aux ondes latéralement limitées comme aux ondes indéfinies.*

La formule (7) donnera sa valeur :

$$f\cos V = r(a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2). \tag{20}$$

14. Rappelons qu'un corps quelconque est assez peu biréfringent pour qu'on puisse y supposer pareille, avec quelque approximation, la vitesse r de tous les rayons lumineux d'*égale période;* et prenons, à partir de l'origine, suivant la direction (l', m', n') de la vibration, une droite égale à $\sqrt{\frac{r}{f\cos V}}$, sensiblement proportionnelle, par conséquent, à l'inverse de la racine carrée du coefficient correspondant $f\cos V$ d'absorption. Le lieu de l'extrémité (X, Y, Z) de cette droite sera *l'ellipsoïde d'absorption* de Mallard

$$a'X^2 - b'Y^2 - c'Z^2 = 1. \tag{21}$$

L'ellipsoïde d'absorption paraît donc bien exister, non seulement, comme l'admettent les physiciens, dans les cristaux ayant trois plans rectangulaires de symétrie, ou encore des axes égaux régulièrement répartis autour d'un axe principal, mais aussi dans ceux des deux derniers systèmes cristallins, à plan de symétrie unique, ou même sans plan de symétrie et à axes tous obliques [1].

15. L'ellipsoïde (21) permettra de calculer l'absorption, dans

---

[1] Des observations soignées de M. Camichel (*Étude expérimentale sur l'absorption de la lumière par les cristaux*, aux *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. V, p. 433 à 499, août 1895) et d'autres, de M. Carvallo, avec calculs théoriques étendus (*Absorption de la lumière par les cristaux*, aux mêmes *Annales*, janvier 1896; *voir* surtout les nos 18 et 25 à 28), ont porté sur divers cristaux, mais, en particulier, sur l'épidote, cristal à un seul plan de symétrie; et elles ont montré que les anomalies dues à la variation de r (ou à

l'hypothèse $r = \text{const.}$, avec toute l'approximation désirable en pratique, eu égard aux inévitables défauts d'homogénéité des corps translucides. Il n'est pas indifférent toutefois, au point de vue théorique, de mettre en compte les variations de r. Pour y arriver à la formule la plus belle, à la fois exacte et très simple, nous évaluerons le trajet δ, dans le corps translucide, du rayon lumineux expérimenté, par le temps t qu'emploie la lumière à le parcourir, quotient du chemin δ par la vitesse r du rayon. L'exponentielle $e^{-f\cos V.\delta}$ devenant ainsi $e^{-fr\cos V.t}$, c'est le produit $fr\cos V$ qui exprimera le *coefficient d'extinction* ou *d'absorption*. Nous appellerons $\mathfrak{f}$ ce nouveau coefficient; en sorte que la formule (20) donnera

$$\mathfrak{f} = r^2(a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2). \tag{22}$$

Or, soient : l'_1, m'_1, n'_1 les cosinus directeurs, *par rapport aux axes de l'onde courbe de Fresnel*, de la projection du rayon r de cette onde sur le plan tangent mené à l'extrémité du même rayon; ω la perpendiculaire tirée du centre de l'onde courbe au même plan tangent et ε son petit angle avec le rayon r; enfin, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ les cosinus directeurs, encore par rapport aux axes de l'onde courbe, de la vibration qui, perpendiculaire au rayon r dans le plan de r et de ω, fait également l'angle ε avec la projection (l'_1, m'_1, n'_1). On sait, par une propriété caractéristique de l'ellipsoïde inverse (dit *d'élasticité*), que

$$\omega^2 = a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2; \tag{23}$$

---

d'autres causes, inconnues) y étaient insensibles, beaucoup plus faibles, par conséquent, que ne semblaient l'indiquer les expériences antérieures sur l'épidote, dues, notamment, à W. Ramsay.

M. Carvallo en déduit (n° 18 de son Mémoire), par un calcul de deuxième approximation où interviennent les petites variations de r ou de ω dans le plan de symétrie, que les deux directions d'ondes donnant la plus forte et la plus faible absorption, au lieu d'être rigoureusement perpendiculaires, y présenteraient, pour les radiations d'une des périodes expérimentées, une obliquité mutuelle de 1°40 environ, que rend insensible l'imparfaite détermination pratique de la situation des maxima et minima. Cette inclinaison mutuelle, des *ondes* à absorption respectivement maximum et minimum, diffère, d'ailleurs, quelque peu de celle des deux directions (l', m', n') correspondantes, qui égale, elle-même, celle des deux rayons lumineux constitués par ces ondes (à raison de la perpendicularité constante de la vibration au rayon, dans le plan de symétrie considéré).

et, d'autre part, les cosinus directeurs de la vibration étant proportionnels à $a^2 l'_1$, $b^2 m'_1$, $c^2 n'_1$, l'on a aussi

$$(\mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}') = \frac{(a^2 l'_1, b^2 m'_1, c^2 n'_1)}{\sqrt{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}};$$

d'où

$$(24) \qquad \cos\varepsilon = \mathfrak{l}' l_1 + \mathfrak{m}' m'_1 + \mathfrak{n}' n_1 = \frac{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}{\sqrt{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}}.$$

L'inverse du rayon r, $\frac{\cos\varepsilon}{\omega}$, aura donc pour carré

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2},$$

ou bien, en substituant à l'_1, m'_1, n'_1, dans cette formule homogène du degré zéro en l'_1, m'_1, n'_1, les quotients respectifs, proportionnels, de $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ par a^2, b^2, c^2,

$$(25) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}.$$

Ainsi, *le carré r^2 d'un rayon quelconque de l'onde de Fresnel a pour inverse une fonction linéaire des trois carrés $\mathfrak{l}'^2$, $\mathfrak{m}'^2$, $\mathfrak{n}'^2$, des cosinus directeurs de la vibration correspondante.*

Eliminons r^2, par (25), de l'expression (22) du coefficient $\mathfrak{f}$ d'absorption; et il viendra

$$(26) \qquad \mathfrak{f} = \frac{a^2 l'^2 + b^2 m'^2 + c^2 n'^2}{\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}}.$$

Le coefficient $\mathfrak{f}$ d'absorption est donc *une fonction rationnelle et homogène, du degré zéro, à numérateur et dénominateur linéaires, des six carrés l'^2, m'^2, n'^2, $\mathfrak{l}'^2$, $\mathfrak{m}'^2$, $\mathfrak{n}'^2$ des cosinus directeurs de la vibration, par rapport aux axes tant de l'ellipsoïde d'absorption que de l'onde courbe de Fresnel.*

16. Cette expression peut, à raison de la petitesse des différences relatives existant, dans les corps, entre a, b et c, être remplacée par une autre seulement approchée, mais *entière*. Dans

l'identité classique

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)$$
$$=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2,$$

faisons

$$\alpha=a\mathfrak{l}'',\qquad \beta=b\mathfrak{m}',\qquad \gamma=c\mathfrak{n}',$$
$$\alpha'=\frac{\mathfrak{l}''}{a},\qquad \beta'=\frac{\mathfrak{m}'}{b},\qquad \gamma'=\frac{\mathfrak{n}'}{c}.$$

Le premier terme du second membre vaudra 1; et les trois derniers, devenus $\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2\mathfrak{m}'^2\mathfrak{n}'^2$, ..., seront négligeables, comme étant du second ordre. L'on aura donc

$$(a^2\mathfrak{l}''^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)\left(\frac{\mathfrak{l}''^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}\right)=1;$$

ce qui permettra bien de donner à l'expression (26) de $\mathfrak{f}$ la forme *entière,* très approchée,

$$(27)\qquad \mathfrak{f}=(a^2\mathfrak{l}''^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)(a'l'^2+b'm'^2+c'n'^2).$$

17. On voit, par les formules (25) et (26), combien était juste le double et merveilleux pressentiment de Fresnel, qui voulait que la vitesse de propagation et l'absorption dépendissent *uniquement,* dans chaque corps homogène, *de la direction des vibrations.* Les mêmes formules montrent aussi que le choix, comme variables, des cosinus directeurs de la vibration, rend extrêmement simples certaines relations fondamentales de l'Optique [1].

---

[1] Ce Mémoire a été résumé dans trois Notes des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXL, 13 février, 6 mars et 27 mars 1905, p. 401, 622 et 825). Trois jours après la présentation de la première de ces Notes, j'ai reçu de la Sorbonne une thèse manuscrite de M. Stoenesco, actuellement docteur ès sciences mathématiques, où la formule (7) se trouvait établie, sous une autre forme et par une tout autre voie, pour les corps pourvus d'un plan de symétrie. J'observerai, en terminant, que les coefficients de résistance a', b', c', desquels résulte l'absorption, figurent, dans les équations (1) du mouvement, comme étant les sommes pures et simples de leurs valeurs pour les diverses molécules pondérables disséminées au sein de l'unité de volume d'éther, et relativement aux axes principaux de leur ensemble, conformément à une idée que des observations très étendues ont suggérée à M. Henri Becquerel.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Scott (R.-F.). — *Theory of determinants and their applications.* 2e édit. In-8°, 300 p. London, Clayf. 9 sh.

Stokes (Sir G.-G.). — *Mathematical and physical Papers.* Vol. IV. In-8°. London, Clay. 15 sh.

Sturm (C.). — *Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen* (1835), traduit et publié par Alfr. Loewy. In-8°, 66 p. (Ostwald's Klassiker d. exakten Wissensch. N° 143.) Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m. 20 pf.

Kepler (Joh.). — *Dioptrik od. Schilderung der Folgen, die sich aus der unlängst gemachten Erfindung der Fernrohre f. das Sehen u. die sichtbaren Gegenstände ergeben* (1611). Traduit et publié par Ferd. Plehn. In-8°, 114 p. avec 43 fig. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. N° 144.) Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m.

Lorenz (Hans). — *Lehrbuch der technischen Physik.* 2. Bd. Technische Wärmelehre. Gr. in-8°, XIX-545 p. avec 136 fig. München, Oldenbourg. 13 m.; relié 14 m.

Ahrens (W.). — *Scherz u. Ernst in der Mathematik. Geflügelte u. ungeflügelte Worte.* Gr. in-8°, X-522. Leipzig, Teubner. Relié, 8 m.

Dumas (G.). — *Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné* (thèse). In-4°, 79 p. Paris, Rousset.

Fouet (E.-A.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* 2e partie. In-8°, XI-300 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Jordan (W.). — *Handbuch der Vermessungskunde.* 1. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 5e édition, publiée par C. Reinhertz. 2e livr. avec fig. Stuttgart, Metzler. 6 m. 60 pf.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STOLZ (O.) et GMEINER (A.). EINLEITUNG IN DIE FUNKTIONENLEHRE. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der *Theoretischen Arithmetik* nicht berücksichtigten Abschnitte der *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, von O. STOLZ. In 2 Abteilungen. I. Abteilung, mit 10 figuren im text. 1 vol. in-8°, VI-294 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Cette *Introduction à la théorie des fonctions* forme le quatorzième Volume de cette intéressante collection de livres classiques relatifs aux Mathématiques et à leurs applications que publie la maison Teubner qui, lorsqu'elle sera complète, constituera un très utile complément à l'Encyclopédie des Mathématiques. Elle est d'ailleurs, pour une bonne part, une réédition de divers Chapitres de l'*Allgemeine Arithmetik* de M. O. Stolz.

La première Partie, seule parue, contient les sujets suivants :

Fonctions réelles d'une variable réelle. Fonctions réelles de deux ou plusieurs variables réelles. Les fonctions rationnelles entières. Les séries de puissances entières.

La seconde Partie contiendra les sujets suivants :

Critères de convergence et de divergence pour les séries infinies. Concept de la fonction analytique monogène d'une variable d'après Weierstrass. Fonctions circulaires. Produits infinis. Fractions continues finies et infinies.

Il est assez inutile d'insister sur les qualités de ce Livre ; le nom des auteurs suffit : on y retrouvera cet extrême souci de la rigueur, de la précision et de la correction du langage auquel ils ont habitué leurs lecteurs. Je signalerai le grand nombre d'exemples vraiment simples et intéressants que l'on trouvera soit dans le texte de leur Livre, soit dans les exercices : ces exemples sont aussi bien

choisis que possible pour faire comprendre le sens et la portée des propositions générales, pour éclairer les faits saillants, pour reposer l'esprit des abstractions et des généralités. En outre, les renseignements historiques et bibliographiques abondent.

J. T.

FUHRMANN (A.). — Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Uebungsbuch und Literaturnachweis für Studirende der Mathematik, Physik, Technik u.s.w. Erster Teil : *Aufgaben aus der analytischer Statik fester Korper*, mit 34 figuren; dritte Auflage. 1 vol. in-8°, XII-206 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Le recueil de problèmes de M. Furhmann sur la Mécanique est bien connu : il a rendu de grands services à plusieurs générations d'étudiants. Cette troisième édition en rendra plus encore, puisque l'auteur l'a perfectionnée et accrue. Les accroissements porteront principalement sur la seconde Partie : celle-ci, toutefois, s'est augmentée de près de 70 pages; mais l'auteur a tenu à lui conserver son caractère, et à ne demander à ses lecteurs que des connaissances élémentaires en Analyse et cela restreint naturellement le champ des applications. Ce caractère correspond à l'habitude, encore très répandue, de commencer par la Statique l'enseignement de la Mécanique. J. T.

MORS (E.-P.). — Valeur approximative d'une intégrale définie. In-4°, VIII-195 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

De tout temps, les géomètres se sont attachés à découvrir ou à perfectionner les méthodes qui servent à calculer les aires des figures limitées par des lignes courbes. Sans remonter aux

recherches d'Archimède et des géomètres anciens sur la quadrature du cercle, de la parabole, de l'ellipse, il nous suffira de rappeler qu'on voit apparaître les noms des plus grands géomètres dans l'histoire des découvertes relatives à la quadrature approchée des espaces curvilignes ou, ce qui est la même chose, dans l'évaluation approchée des intégrales définies. C'est Newton qui, le premier, dans une lettre écrite à Leibniz en 1676 sur l'intégration par séries, donne une méthode générale et féconde, bientôt développée par Cotes et par Stirling. Euler, Maclaurin, Simpson ne tardent pas à étudier cette belle question et font connaître des formules dans lesquelles l'aire d'un segment de courbe plane est exprimée par des formules où figurent les valeurs d'un nombre plus ou moins grand d'ordonnées, toutes également espacées. Toutes ces formules rentrent dans le type suivant :

$$S = H(B_1 y_1 + B_2 y_2 + \ldots + B_n y_n),$$

où $B_1 \ldots B_n$ sont des coefficients numériques, où H est la largeur du segment à mesurer et où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des valeurs d'ordonnées correspondant à des abscisses en progression arithmétique. Elles donnent la valeur exacte de l'aire quand la courbe est une parabole du $n-1^{\text{ième}}$ ou du $n^{\text{ième}}$ degré au plus; et il est facile dans tous les cas d'évaluer l'erreur commise lorsque la valeur de y est développée en série.

Dans un Mémoire publié en 1814, Gauss introduisit une notion nouvelle, qui devait donner un nouveau développement à cette théorie. Supposant que les ordonnées $y_1, y_2, \ldots y_n$ n'étaient pas également espacées, il se proposa de déterminer les abscisses correspondantes à ces ordonnées par la condition que l'approximation de la formule fût aussi grande que possible et il résolut cette question par une méthode d'induction généralisée qui le conduisit à des résultats d'une extrême élégance et d'une grande simplicité théorique. Ce travail de Gauss, qui a donné lieu à un beau Mémoire de Jacobi où la méthode d'approximation est ramenée aux principes les plus simples, a été l'origine d'un grand nombre de travaux. On a supposé, par exemple, que quelques-unes des abscisses étaient données ou imposées par la nature de la question, et l'on a essayé de déterminer les autres de manière à rendre aussi grande que possible l'approximation de la formule. Tchebychef,

dont l'esprit si ingénieux et si puissant s'attachait avant tout à résoudre d'une manière approchée même les problèmes susceptibles d'une solution exacte et précise, a apporté dans la question un point de vue nouveau en s'attachant à déterminer les abscisses des ordonnées, non pas de manière à augmenter l'approximation, mais de manière à simplifier le calcul des coefficients B_i, qu'il suppose tous égaux, et Hermite l'a suivi dans cette voie.

Dans l'Ouvrage, ou plutôt dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Mors s'est attaché surtout au côté pratique des recherches précédentes. C'est ainsi par exemple que, dans l'exposition de la méthode de Gauss, il ne se préoccupe même pas de démontrer que les valeurs des abscisses sont réelles. En revanche, pour chaque méthode, les calculs et les applications sont poussés aussi loin qu'il est nécessaire. Pour la méthode de Newton-Cotes, les formules sont données jusqu'au cas où l'on emploie treize ordonnées. Pour celle de Maclaurin, où la courbe est toujours partagée en segments égaux, mais où l'on prend les ordonnées des milieux de ces segments, les calculs et les formules de corrections sont développés jusqu'au cas de dix ordonnées. C'est à ce même chiffre qu'il s'arrête pour la méthode proprement dite de Gauss. Il développe également les calculs pour la méthode de Lobatto, où l'on suppose données les ordonnées extrêmes et l'ordonnée moyenne, en se proposant de déterminer les autres abscisses de la manière la plus avantageuse, et aussi pour une modification ingénieuse qu'il fait subir à la méthode de Gauss.

L'Ouvrage se termine par un exposé historique très intéressant où l'auteur expose et critique les différentes recherches faites depuis la plus haute antiquité sur les méthodes d'approximation.

D. J.

SAUERBECK (P.). — EINLEITUNG IN DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE DER HÖHEREN ALGEBRAISCHEN KURVEN NACH DEN METHODEN VON JEAN-PAUL DE GUA DE MALVES. EIN BEITRAG ZUR KURVENDISKUSSION. 1 vol. in-8°, VI-166 pages. Leipzig, Teubner.

On peut regarder l'intéressant essai de M. Sauerbeck à la fois comme un travail historique et comme un livre d'enseignement.

Au point de vue historique, il met en évidence l'importance des recherches de l'abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712-1786), et la valeur de ses *Usages de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections des lignes géométriques de tous les ordres* (1740).

Ce livre, paraît-il, ressemble fort, par l'extérieur, à un livre de messe. M. Sauerbeck insinue que cette ressemblance pourrait bien avoir été voulue; mais il ne nous dit pas à quelle intention.

Quoi qu'il en soit, de Gua y fait preuve d'un rare talent; les pensées originales, les remarques fines y abondent; le jugement de M. Sauerbeck ne paraît nullement exagéré, quand on a parcouru le livre où il a reproduit, dans le langage et avec les notations modernes, une bonne partie de l'Œuvre de de Gua, dont il semble que l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer ait trop fait oublier les mérites. M. Sauerbeck, sur plus d'un point important, en particulier sur l'usage du triangle algébrique ou analytique pour la recherche des premiers termes des développements en série, fait ressortir la priorité de de Gua.

La première Partie est un résumé historique des travaux antérieurs : l'auteur y parle successivement de la *Géometrie* de Descartes, de l'*Emmeratio linearum tertii ordinis* de Newton, de l'*Illustratio tractatus D. Newtonii de emmeratione...* de Stirling, de la *Géométrie* de Maclaurin, de l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, de divers Mémoires de Saurin qui n'ont pas été sans influence sur l'Œuvre de de Gua, du Mémoire de Maupertuis *Sur quelques affections des courbes*, du *Traité des lignes de troisième ordre* de Nicole, de l'*Examen des lignes du quatrième ordre* de l'abbé de Braguelongue, enfin de l'Œuvre même de de Gua.

Une seconde Partie se rapporte à diverses méthodes auxiliaires, tout d'abord à l'élimination.

M. Sauerbeck explique comment procédaient Newton et Leibniz; il semble, d'après ces explications, que le procédé connu sous les noms d'Euler et de Sylvester pourrait être assez justement attribué à Leibniz, au moins dans son principe; de Gua employait la méthode du plus grand commun diviseur.

M. Sauerbeck explique ensuite comment de Gua se servait de son *triangle algébrique* pour trouver les courbes hyperboliques ($x^m y^n = a$), qui représentent approximativement une courbe algébrique dans le voisinage de l'origine, ou d'un point à l'infini.

La troisième Partie, qui est la plus étendue, est intitulée : *Théorie analytique générale des courbes algébriques* d'après le contenu des *Usages de l'Analyse* de de Gua. Les paragraphes les plus importants concernent l'étude d'une courbe autour d'un de ses points, la recherche des asymptotes et de l'allure d'une courbe à l'infini. Notons l'usage que de Gua faisait de la transformation

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}.$$

Cette Partie n'intéresse pas seulement l'histoire : elle peut être lue avec grand profit par les étudiants qui veulent apprendre à discuter une courbe algébrique; j'en dirai autant des nombreux exemples ou exercices que l'auteur traite, dans sa quatrième et dernière Partie, toujours d'après de Gua. J. T.

Œuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par MM. *Ch. Hermite*, *H. Poincaré* et *E. Rouché*, membres de l'Institut. Tome II : Géométrie. In-8°, 715 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

En 1898, notre distingué collaborateur, M. Émile Borel, presque immédiatement après l'apparition du premier Volume des Œuvres de Laguerre, rendait compte de cette publication entreprise sous les auspices de l'Académie des Sciences. Il se plaisait à faire res-

sortir toutes les contributions ingénieuses et élégantes que Laguerre avait apportées à la théorie des équations algébriques, l'esprit d'invention et les vues profondes qu'il avait semées dans ses autres travaux et notamment dans sa lettre à M. Hermite sur le Calcul des Systèmes linéaires, et il émettait en terminant le vif désir de voir paraître sans retard le Tome II, qui devait terminer l'Ouvrage et contenir l'ensemble de travaux relatifs à la Géométrie. Après sept années d'intervalle, ce vœu se trouve enfin exaucé, et tous ceux qui, pour étudier les Œuvres du grand et profond géomètre que fut Laguerre, se trouvaient obligés d'avoir recours à tant de recueils peu répandus où elles étaient pour ainsi dire perdues, auront à leur disposition un Ouvrage élégant, soigneusement composé, où le rapprochement même des Mémoires contribuera à accroître l'intérêt de chacun d'eux. Nous voudrions que l'Académie, dont l'appui a permis de rendre un tel service à la Science et aux géomètres, entreprît la même tâche en ce qui concerne les travaux d'un inventeur ingénieux qui, précisément, fut l'ami de Laguerre. Nous voulons parler de Ribaucour, l'auteur d'une foule de propositions élégantes de géométrie infinitésimale qui protégeront et perpétueront sa mémoire, mais dont les travaux sont pour ainsi dire inconnus, bien qu'il y ait développé un grand nombre de méthodes ou d'idées originales dont il serait possible aujourd'hui encore de tirer grand parti.

Le Volume dont nous avons à rendre compte s'ouvre par trois articles sur la théorie des foyers, publiés en 1853, alors que Laguerre, candidat à l'École Polytechnique, était élève de l'Institution Barbet. Lecteur assidu de la *Géométrie supérieure* de Chasles, le jeune élève avait su y trouver une véritable découverte, que des idées théoriques avaient empêché Chasles de mettre en lumière. L'expression qu'il faisait connaître de l'angle comme logarithme d'un rapport anharmonique permettait de résoudre d'une manière générale le problème de la transformation des relations contenant des angles qui avait été l'objet de tant de recherches depuis Poncelet. Il semble que cette découverte si intéressante aurait dû appeler l'attention sur ce jeune candidat qui annonçait les qualités d'un grand géomètre. Il n'en fut rien malheureusement ; et pendant douze années, après avoir été reçu à l'École Polytechnique, Laguerre, devenu officier d'artillerie, se contenta de s'occuper avec

conscience et dévouement de ses devoirs professionnels; il travailla beaucoup, nous le savons, dans les moments de loisir que lui laissait son service; mais il ne publia rien. Ces douze années ne furent pas perdues pour son instruction et son développement personnel; elles le furent certainement pour ceux qui auraient eu tant à apprendre dans les publications de celui qu'à ses débuts Terquem avait salué du nom de profond analyste. Nommé, vers 1865, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, Laguerre put enfin se livrer à ce qui était sa véritable vocation. Et, à partir de ce moment, ses Mémoires se succédèrent avec une grande régularité. Ce furent d'abord une série de Notes sur les courbes et les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre dont les travaux récents de Moutard et d'autres géomètres venaient de mettre en évidence certaines propriétés fondamentales. Puis, chargé par M. Duruy de faire un cours à la salle Gerson, il y développa ses idées propres sur l'emploi des imaginaires en géométrie dans le plan et dans l'espace. Sa représentation d'un point imaginaire dans le plan par un segment et d'un point imaginaire dans l'espace par un cercle réel n'ont pas attiré autant qu'elles le méritaient l'attention des géomètres. Cela tient sans doute à la complexité même du segment ou du cercle dans l'espace. Sous l'influence des conceptions de Plücker et de Lie, des êtres nouveaux ont été introduits en géométrie; leur étude approfondie exige des notions ou des recherches préliminaires qui n'ont pas encore été entreprises, mais qui le seront certainement dans un avenir peu éloigné.

Nous aimerions à analyser chacun des Mémoires qui sont contenus dans le volume. Nous signalerons une longue suite de recherches sur les normales des courbes et des surfaces du second degré où Laguerre fait connaître un grand nombre de propositions nouvelles et se montre le digne émule de Joachimsthal, une série d'applications de la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions elliptiques à la Géométrie et une suite de travaux sur ce que Laguerre a appelé la *Géométrie de direction* et sur la transformation par semi-droites réciproques. Cette transformation, découverte par Ribaucour, avait été l'objet des travaux de Lie et d'autres géomètres. Laguerre l'a faite sienne, par l'art et la précision avec lesquels il l'a exposée et par les applications qu'il a su en tirer.

On ne saurait trop recommander la lecture de ce recueil des

Œuvres de Laguerre où rien n'est banal, où tout porte la marque de réflexions profondes, où les vues nouvelles abondent, où les applications les plus ingénieuses et les mieux choisies sont de nature à intéresser le lecteur et à lui suggérer l'idée de nouvelles recherches. G. D.

ENCYCLOPÄDIE DER ELEMENTAR-MATHEMATIK EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE, von *H. Weber* und *I. Wellstein*. Erster Band. Elementare Algebra und Analysis. — ENCYCLOPÄDIE DER ELEMENTAREN ALGEBRA UND ANALYSIS, bearbeitet von *H. Weber*. 1 vol. in-8°, XIV-447 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

L'excellent *Traité de Mathématiques élémentaires* du regretté Baltzer, qui a rendu des services si appréciés dans l'enseignement des Mathématiques, se trouvait depuis quelque temps épuisé.

Pour le remplacer, en le mettant au courant des progrès que les Mathématiques ont faits dans ces dernières années, M. Teubner, l'actif éditeur de Leipzig, ne pouvait mieux faire que de s'adresser à des savants tels que MM. Weber et Wellstein.

M. Weber, en particulier, se trouvait admirablement préparé pour la tâche si utile qu'il a acceptée, par les leçons et les conférences pédagogiques que depuis 1888 il n'a cessé d'adjoindre à son enseignement universitaire.

C'est lui qui s'est chargé, dans la nouvelle encyclopédie, du premier volume, qui comprend l'algèbre élémentaire et les éléments de l'analyse. Pour bien faire connaître à nos lecteurs le plan et la portée de la nouvelle publication, il importe que nous commencions par en donner une analyse détaillée.

Le Volume est divisé en trois Livres. Le premier comprend ce que l'auteur appelle *les fondements de l'Arithmétique;* il correspond à peu près à nos Cours d'arithmétique et d'algèbre élémentaire. Après avoir, en effet, dans un premier Chapitre un peu abstrait pour de jeunes élèves, mais qu'on pourra passer sans inconvénient dans une première lecture, donné les notions de

nombre : nombre ordinal, nombre cardinal, numération, l'auteur aborde les trois premières opérations en rattachant à la théorie de la soustraction l'introduction des nombres négatifs. Après avoir développé rapidement ce qui concerne la division, la divisibilité, le plus petit commun multiple, les fractions ordinaires et les fractions décimales, il aborde les nombres irrationnels qu'il définit par la notion de coupure. Puis viennent les rapports et les proportions, les puissances et les logarithmes, les équations du premier degré, les équations quadratiques et les nombres imaginaires, les permutations et les combinaisons avec ou sans répétition, le binome de Newton, les progressions arithmétique et géométrique, les intérêts composés et les annuités. Ce premier Livre comprend 185 pages.

Avec le deuxième Livre commence ce que l'auteur appelle l'*Algèbre*. Les matières qui le composent correspondent à notre Cours de Mathématiques spéciales, mais à un Cours qui ne serait pas amputé comme le nôtre l'a été dans ces derniers temps. On y trouve la théorie des équations algébriques, le théorème fondamental sur l'existence des racines, le théorème de Sturm, la théorie des fonctions symétriques, la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, celle de deux équations du second degré à deux inconnues, c'est-à-dire, des questions qui figurent aussi dans beaucoup d'autres Livres élémentaires; mais on y rencontre aussi des développements qui sont beaucoup moins répandus et où d'ailleurs M. Weber apporte souvent, comme il fallait s'y attendre, une note personnelle : la résolution des équations indéterminées du premier degré, quelques équations indéterminées du second degré, les éléments de la théorie des nombres : théorème de Wilson, résidus quadratiques, triangles rectangles en nombres entiers, décomposition de nombres en sommes de deux carrés, décomposition des grands nombres en facteurs, nombres parfaits. Un Chapitre est consacré aux fractions continues, un autre traite de la division du cercle et de l'inscription du polygone régulier de 17 côtés. Le Livre se termine enfin par un Chapitre où l'auteur démontre l'impossibilité de résoudre certains problèmes : par exemple, une équation cubique ne peut se résoudre par des extractions de radicaux carrés, l'équation du cinquième degré n'est pas en général résoluble par radicaux. Il y a dans ces développements

de quoi intéresser un élève bien doué, de quoi permettre à un Maître d'étendre et de vivifier son enseignement.

Le troisième Livre est consacré à l'*Analyse*. M. Weber y définit les séries d'une manière générale; il y donne la définition et les propriétés de e, fait connaître les principales règles de convergence, étudie en particulier les séries ordonnées suivant les puissances d'une variable, à propos desquelles il donne le célèbre théorème d'Abel, la notion du cercle de convergence, etc. Après ces propositions générales, il établit par des procédés élémentaires les développements en série de e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Un Chapitre spécial est consacré à la série du binome $(1+z)^\mu$ où, au début tout au moins, μ n'est soumis à aucune restriction et peut être complexe comme z l'est dans la suite entière de l'exposition.

Comme conséquence de cette recherche générale, l'auteur développe en série $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$ et même il donne la somme de certaines séries trigonométriques simples, et met sur elles en évidence les propriétés de discontinuité signalées pour la première fois par Fourier.

Le Chapitre qui suit est consacré aux produits infinis, dont les règles de convergence sont établies; $\sin x$ et $\cos x$ sont développés en produits infinis. M. Weber introduit les nombres de Bernoulli en les exprimant à l'aide des sommes

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n} + \ldots,$$

que ces développements en produits permettent de calculer. A cette occasion il donne, en employant la méthode de J.-A. Serret, l'évaluation approchée de

$$1.2.3\ldots n,$$

lorsque n est très grand.

Cette partie de l'Ouvrage se rapproche à bien des égards, par la nature des sujets et par celle des démonstrations, du Traité d'*Analyse algébrique* que Cauchy écrivait, il y a près d'un siècle. Mais ce que Cauchy n'aurait pu écrire, c'est le dernier Chapitre où M. Weber a exposé les résultats des belles découvertes d'Hermite et de M. Lindemann sur la transcendance des nombres e et π. Inu-

tile de dire, après les développements qui précèdent, que l'exposition de M. Weber est affranchie de toute considération de calcul intégral. Elle se rattache à celle qui a été donnée par MM. Hurwitz et Gordan. Exposée avec toute la netteté et toute la supériorité qu'on doit attendre de M. Weber, nous devons avouer que cette démonstration élémentaire ne nous a jamais satisfait. Malgré tous les artifices d'exposition, on ne peut y faire apparaître les vrais principes qui dominent la matière, les raisons cachées qui ont assuré le succès de la recherche. Il faut convenir d'ailleurs que l'importance du résultat justifie, dans l'espèce, une marche et une démonstration qui ne sont pas pleinement éclairées. Quoi qu'il en soit, ce dernier Chapitre termine dignement le premier Volume de l'*Encyclopédie élémentaire* dont M. Weber a tenu à se charger.

D'après le compte rendu qui précède, on voit que l'Ouvrage n'est pas à proprement parler un livre de classe, mais qu'il s'adresse avant tout aux élèves les plus avancés, à ceux qui, ayant du goût pour les Mathématiques, désireront aller au delà de ce qu'on leur enseigne et étendre leurs études élémentaires. Il pourra convenir aussi aux professeurs, qui y trouveront condensées, sous un petit volume, bien des notions nouvelles grâce auxquelles ils pourront renouveler leur enseignement et le rendre plus profond.

Dans ces derniers temps et sous l'action de causes diverses, toutes les barrières qui séparaient les Mathématiques élémentaires des Mathématiques supérieures ont disparu ou se sont beaucoup affaiblies. En Géométrie surtout, mais aussi en Arithmétique et en Algèbre, se pose aujourd'hui la question de savoir où commence le domaine des Mathématiques supérieures, où finit celui des Mathématiques élémentaires. L'ancien temps, où le professeur de Philosophie était chargé aussi d'enseigner les Mathématiques et la Physique, semble près de renaître. Platon voulait que tout philosophe fût géomètre; on demandera bientôt que tout géomètre soit philosophe (et ce ne sera peut-être pas un mal pour la Philosophie). Toutes les notions sur le nombre, soit ordinal, soit cardinal, soit rationnel, soit incommensurable, soit positif, soit négatif, soit réel, soit imaginaire, sont sans cesse reprises et approfondies. On nous a appris que, jusqu'à présent, nous avions tout à fait ignoré, ou du moins que nous avions compris de travers, ce que

c'est que la surface d'un polygone ou le volume d'un polyèdre. Semblable au microscope qui fait découvrir des abîmes de complication dans l'eau le plus claire, la Science mathématique a repris et approfondi les notions qui paraissaient jusqu'ici le plus simples et le mieux établies. Ce n'est pas nous qui nous en plaindrons et nous nous garderons de nous élever contre des recherches si légitimes. Après avoir tout troublé et tout mis en question, ces investigations arriveront, nous en sommes convaincus, à tout simplifier et tout éclaircir. Lagrange, qui plaçait la série de Taylor à la base de son exposition de Calcul infinitésimal, devinait peut-être qu'un jour viendrait où la démonstration de cette série fondamentale se ferait avec une généralité et une simplicité de moyens qui ne laisseraient plus aucune prise aux objections des plus difficiles. Mais comme toutes ces spéculations nouvelles, toutes ces dissertations philosophiques s'attaquent par leur nature même aux notions qui sont à la base même de l'enseignement, les professeurs ont été fatalement conduits à se demander si elles devaient être introduites dans l'enseignement. Doit-on tout dire? Doit-on ne rien cacher? Telle est la question pédagogique qui s'est trouvée posée avec une acuité qu'on n'avait jamais connue. A cette première question la réponse était facile. Mais une autre question connexe a été posée en même temps et l'on s'est demandé quelles devaient être dorénavant, en Mathématiques, les limites de l'enseignement élémentaire. Sur ce point, nous sommes de l'avis de M. Weber. En se plaçant à un point de vue strictement scientifique, il paraît impossible de définir d'une manière précise le domaine des Mathématiques élémentaires. C'est par des raisons d'ordre pédagogique qu'il faut se décider. Le but et les fins de l'enseignement, les qualités des élèves, les dispositions et les tendances des professeurs; tout alors doit entrer en ligne de compte et il est clair que l'enseignement des mêmes matières ne doit pas, dans un lycée, être conçu de la même manière que dans une école primaire supérieure ou dans une école d'arts et métiers.

Dans ces derniers temps, ces graves questions d'organisation de l'enseignement scientifique ont été l'objet d'un examen approfondi; et partout, en France, en Angleterre, en Allemagne, on s'est arrêté à peu près aux mêmes conclusions. On s'est attaché à rendre

moins historique et moins livresque l'enseignement de la Physique, de la Chimie et des autres Sciences expérimentales. On a recommandé aux professeurs de mettre les élèves en contact avec les objets, les produits ou les instruments, de les exercer aussi à quelques manipulations ou opérations élémentaires. En Mathématiques, on a chez nous écarté, d'une manière peut-être trop complète et trop résolue, toutes les subtilités relatives à ces difficultés dont les élèves ne se préoccupent nullement, qu'ils ne peuvent même apercevoir que sur l'insistance du maître et quelquefois au prix de ses plus grands efforts. Surtout l'on a franchement introduit la méthode infinitésimale, que l'on n'admettait jusque-là qu'à contre-cœur et à une dose infiniment trop limitée. Chargé des intérêts des Sciences au Conseil supérieur de l'Instruction publique, nous avons non seulement approuvé, mais même provoqué la plupart de ces changements. Nous les croyons bons, ils répondent aux tendances qui s'étaient manifestées de toutes parts ; mais nous devons avouer que l'approbation de toutes ces modifications n'a pas été unanime. Hermite, dont les avis méritaient tant d'attention, et avec qui nous en avons souvent causé, les désapprouvait d'une manière complète. Il pensait que, pour le développement de l'esprit, mieux vaut exercer l'élève sur des sujets bien limités que de lui donner d'avance accès dans un cercle qu'il ne pourra parcourir dans toute son étendue, et de lui fournir des notions nécessairement fragmentaires et incomplètes sur des méthodes qu'il sera appelé plus tard à envisager dans toute leur ampleur. Là-dessus, on pourrait disserter à l'infini ; nous nous contenterons de dire en terminant qu'Hermite aurait certainement approuvé le Volume de M. Weber d'où la notion infinitésimale de dérivée est entièrement bannie et où l'auteur s'est proposé comme but de fortifier l'esprit et les aptitudes mathématiques des bons élèves par l'étude des éléments de la théorie des nombres et de quelques questions bien choisies d'Algèbre supérieure et d'Analyse algébrique.

G. D.

REICHEL (O.). — Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. 1 vol. in-8°. VII-111 pages.

L'auteur a écrit ce petit Livre pour ceux de ses auditeurs qui veulent approfondir certains sujets essentiels qu'il ne pouvait développer entièrement dans son enseignement oral. Il y traite de la notion de fonction, des nombres irrationnels, de la définition de la fonction exponentielle, des opérations les plus simples sur les vecteurs, des fonctions trigonométriques. Pour les nombres irrationnels, l'auteur adopte, à très peu près, le point de vue de M. Méray. Les nombres négatifs et les nombres imaginaires sont définis d'une façon purement formelle; on discutera longtemps sur les avantages et les inconvénients de cette façon de faire. Au reste, le souci de présenter les choses avec rigueur et précision est manifeste. Les applications numériques sont traitées avec grand soin. J. T.

BOLTZMANN (L.). — Leçons sur la théorie des gaz (2e Partie). Traduction française par *A. Gallotti* et *H. Bénard*, avec une Introduction et des Notes de *M. Brillouin*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

La première Partie de cet Ouvrage a été analysée dans le *Bulletin* (t. XXVI, p. 32). Sauf ce qui concerne l'établissement et les conséquences de la formule si féconde due au génie de Van der Waals, la seconde Partie est à peu près composée des contributions personnelles les plus importantes de l'auteur à la théorie dynamique des gaz. Quelques-unes remontent loin : la loi célèbre de Maxwell-Boltzmann, loi de l'équipartition moyenne de l'énergie entre les divers degrés de liberté d'un système de points matériels, a été énoncée dans toute sa généralité par Boltzmann en 1868. Les discussions qu'elle a suscitées sont loin d'être apai-

sées, si l'on en juge par l'ampleur de la Bibliographie ajoutée par M. Brillouin, rien que pour l'intervalle 1894-1902. Tout n'est peut-être pas inébranlable dans l'œuvre, mais l'ensemble n'en constitue pas moins une contribution remarquable à un sujet dans lequel la rigueur mathématique coûte cher, si cher qu'il faut bien quelquefois s'en passer pour pouvoir avancer. Le défaut de rigueur le plus fréquent consiste à calculer comme si le nombre des molécules était infini : à raisonner, par exemple, comme si un élément de volume *infiniment petit* contenait un *très grand* nombre de molécules ayant leurs paramètres compris dans un champ de variations *infiniment petit*. Mais il n'en peut être autrement sous peine de renoncer à se servir d'un seul signe d'intégration ou d'une seule différentielle. Il faut seulement faire la part, s'il y a lieu, dans les résultats, des hypothèses inexactes, avouées ou non, introduites en route pour cause d'intégration. D'ailleurs, le plus souvent, les approximations de ce genre ne peuvent troubler le physicien qui, impuissant à enfermer moins de 10^7 molécules à la fois dans une cage cubique de 1^{mm} de côté, aux pressions les plus réduites qu'il puisse réaliser, n'est pas gêné par les discontinuités dues à l'influence personnelle de chacune des molécules, à plus forte raison quand il y en a 10^{16} dans le même volume sous la pression atmosphérique.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés à l'établissement de l'équation caractéristique des gaz due à Van der Waals

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{rT}{v - b}.$$

Les molécules restent des sphères élastiques indéformables, mais leur volume $\frac{b}{4}$ n'est plus supposé négligeable comparé au volume v du gaz; toutefois, on néglige dans les raisonnements des termes de l'ordre de $\frac{b^2}{v^2}$.

D'autre part, les molécules s'attirent mutuellement suivant une force centrale définie par une fonction de forces $\chi(r)$: c'est la *force de cohésion* de Van der Waals, lentement décroissante quand la distance croît, encore sensible à des distances grandes par rapport aux distances moyennes qui séparent deux molécules voisines, mais négligeable aux distances observables. La méthode

statistique, si souvent employée dans cet Ouvrage pour dénombrer des chocs de molécules, montre qu'il en résulte, pour les molécules situées contre la paroi du vase, une *pression intérieure* proportionnelle au carré de la densité. Van der Waals avait obtenu ce résultat par une autre méthode tout à fait analogue à celle que Laplace et Poisson ont employée pour établir les équations de la capillarité. La valeur du coefficient a est donnée par

$$a = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} r\rho(r)\,dr$$

Suit la discussion complète de l'équation de Van der Waals sous la forme réduite, c'est-à-dire en prenant les valeurs critiques pour unités respectives de volume, de pression et de température. Le sujet est à présent classique, grâce à l'intérêt que présente l'interprétation expérimentale correspondant à chaque tronçon des isothermes pour lesquelles les trois racines de l'équation en v sont réelles, grâce aussi au nombre considérable de travaux théoriques et expérimentaux sur les conséquences de la loi des états correspondants. D'ailleurs, l'exposé élémentaire de Boltzmann serait difficilement surpassé, mais on remarquera, une fois pour toutes, qu'il a exclu de son Livre, sauf de rares exceptions, toute comparaison avec l'expérience. Il est donc bien inutile de chercher ici, par exemple, même les plus importants des résultats expérimentaux relatifs à la valeur réelle de la loi de Van der Waals ou des lois analogues; c'est là une simple constatation, et non un reproche, car il est bien évident que le caractère du Livre eût été très différent si l'auteur n'était resté sur un terrain purement théorique; le lecteur peut du reste toujours aller chercher ailleurs les données numériques relatives aux propriétés des gaz.

Les Chapitres III et IV constituent une partie importante du deuxième Volume; ils conduisent à la loi déjà mentionnée de l'équipartition de l'énergie. Pour représenter avec plus de vraisemblance la constitution des molécules, dont la Chimie et l'analyse spectrale nous révèlent la complexité, on les regardera désormais comme dépendant d'un nombre fini de *coordonnées généralisées* $p_1, \ldots, p_\mu$. La force vive L étant une fonction quadratique des dérivées de ces μ paramètres par rapport au temps,

la transformation de Poisson et de Hamilton permet de regarder L comme fonction des p et des q définis par

$$q_i = \frac{\partial L}{\partial p_i}.$$

Les 2μ grandeurs p et q sont fonctions de leurs 2μ valeurs initiales $P_1, \ldots, Q_\mu$ et du temps. A l'aide du théorème de Jacobi sur les déterminants fonctionnels et des équations canoniques de Lagrange, on démontre le théorème de Liouville

$$\int dp_1 \ldots dq_\mu = \int dP_1 \ldots dQ_\mu,$$

les intégrales étant étendues à des champs infiniment petits d'ordre 2μ *qui se correspondent*. Ce théorème, appliqué d'abord par Boltzmann en 1868, puis par Maxwell, à l'étude générale de l'évolution d'un groupe de systèmes mécaniques, a aussi servi à Jacobi pour démontrer son théorème du dernier multiplicateur.

Si l'on a un nombre considérable de systèmes conservatifs, ayant tous même énergie totale, la répartition des états sera stationnaire si le nombre

$$f(p_1, \ldots, q_\mu)\, dp_1 \ldots dq_\mu$$

des systèmes ayant leurs variables comprises entre les limites

$$p_1 \text{ et } p_1 + dp_1, \ldots, q_\mu \text{ et } q_\mu + dq_\mu$$

est indépendant du temps. Le cas le plus simple d'une telle répartition est défini par

$$f = \frac{C}{p_1},$$

C étant une constante.

C'est la répartition *ergodique* adoptée par Boltzmann comme image d'un gaz. Cette distribution admise, le théorème de l'équipartition de la force vive moyenne entre les divers *momentoïdes* en découle. Les μ momentoïdes sont des variables r, substituées aux variables q par une substitution linéaire de module égal à l'unité, telle que la forme quadratique L soit exprimée par une somme de μ carrés tous positifs.

Dans le cas particulier où l'énergie potentielle est, elle aussi,

une forme quadratique des coordonnées p, la même démonstration montre que l'énergie potentielle moyenne et l'énergie cinétique moyenne sont égales : l'énergie totale est alors égale à 2μ fois la portion de la force vive due à chaque momentoïde.

Les momentoïdes de Boltzmann jouent, en somme, pour les gaz à molécules complexes, le même rôle que les trois composantes de la vitesse pour les gaz composés de sphères élastiques étudiés dans la première Partie. La distribution des vitesses de Maxwell, généralisée, s'exprime par la formule

$$dN_1 = A_1 e^{-2hE_1} \int dp_1 \ldots dq_\mu,$$

h désignant une constante qui ne dépend que de la température, c'est-à-dire qui est la même pour les diverses espèces de molécules de plusieurs gaz mélangés ou en équilibre thermique, et E_1 désignant l'énergie totale, constante entre deux chocs, en y comprenant la fonction de forces des actions intérieures à la molécule et même celle des forces extérieures. Le théorème de Liouville montre qu'une telle distribution des vitesses, comme celle de Maxwell, est stationnaire, même en tenant compte des collisions.

C'est la valeur expérimentale du rapport γ des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant qui permet de soumettre la loi de l'équipartition de l'énergie à un contrôle rigoureux. Clausius a montré, en effet, que l'on a

$$\gamma = 1 + \frac{2}{\mu(1+\varkappa)},$$

en désignant par $\varkappa$ le rapport de l'énergie intramoléculaire moyenne à la force vive totale de translation de la molécule.

L'accord va de soi pour les molécules manoatomiques (mercure, hélium, néon, argon, krypton, xénon), pour lesquelles γ est égal à $\frac{5}{3}$, mais on n'obtient la valeur $1,4$, trouvée pour les gaz diatomiques, qu'en ôtant certaines libertés à la molécule.

Sans rappeler ici toutes les objections qui ont été élevées contre l'équipartition de l'énergie, on peut se borner à mentionner la discussion qui a eu lieu au Congrès de la *British Association* en 1885. Lord Kelvin est resté adversaire irréconciliable de la loi de Maxwell-Boltzmann ; il a exposé ses griefs sous une forme géomé-

trique très intéressante dans un Appendice de ses *Baltimore Lectures* parues en 1902. M. Brillouin les résume dans une des Notes qu'il a ajoutées à la traduction du Livre de Boltzmann. Comme M. Jeans, M. Brillouin voit la solution du conflit dans les réactions de l'éther : les seules libertés qui doivent entrer en ligne de compte pour l'application de la loi de Boltzmann-Maxwell seraient celles qui ne subissent aucune action appréciable de la part de l'éther.

Le Chapitre V nous ramène à l'équation caractéristique des gaz. Les démonstrations déjà données de la formule de Van der Waals étaient exposées à diverses objections. Le théorème du viriel de Clausius sert de base à une nouvelle démonstration, qui conduit d'ailleurs à la formule de Jäger plutôt qu'à celle de Van der Waals : les termes en $\frac{b}{v}$ coïncident, mais non ceux en $\frac{b^2}{v^2}$. Le calcul du viriel des forces répulsives presque instantanées, par lesquelles on tient compte des collisions, nécessite l'emploi d'une formule établie comme conséquence de la distribution ergodique, ce qui justifie l'ordre suivi.

La même formule sert de base à l'établissement de la loi de variation de la tension de vapeur saturée en fonction de la température et à la théorie de la dissociation des gaz qui fait l'objet du Chapitre VI.

Ici, tout est dû à Boltzmann, et la tentative est des plus intéressantes : la liaison chimique est représentée mécaniquement par la pénétration ou le contact des *domaines sensibles* de deux atomes sphériques, chaque domaine sensible étant localisé et très petit en comparaison du volume de l'atome. Le calcul des probabilités, appliqué aux liaisons chimiques ainsi définies, permet d'édifier la théorie complète de la dissociation, dans le cas le plus général où un mélange de gaz quelconques se dissocie en donnant uniquement des produits gazeux. Les relations trouvées indiquant l'influence de la température et de la pression sur le degré de dissociation, et les valeurs théoriques des chaleurs de dissociation sont comparées aux valeurs expérimentales pour les deux cas très simples de Az^2O^4 dissocié en deux groupes AzO^2, et de I^2 dissocié en deux atomes d'iode. C'est même le seul endroit où Boltzmann ait poussé la vérification numérique jusqu'au bout. Elle est très

bonne et elle a l'intérêt de fournir par surcroît les valeurs des espaces critiques extrêmement inégaux du groupement AzO^2 et de l'atome I. Il serait intéressant de chercher des vérifications dans des cas plus compliqués.

Si le domaine sensible formait un feuillet sphérique concentrique à l'atome, le calcul montre que les molécules diatomiques seraient instables, la plupart se transformant aussitôt en triplets ou en agrégats d'un plus grand nombre d'atomes. On n'aurait donc pas ainsi une image d'un gaz ordinaire à molécules diatomiques parfaitement stables. D'ailleurs, l'image grossière que l'on obtient ainsi d'une liquéfaction n'est pas non plus suffisante : l'hypothèse d'une zone d'attraction limitée à un feuillet sphérique mince, pas plus que la seule loi répulsive en raison inverse de la cinquième puissance de la distance, ne peut conduire à une image acceptable des propriétés d'un gaz liquéfiable, si l'on ne fait intervenir, *en plus,* les forces de percussion.

La distribution des vitesses de Maxwell généralisée est-elle *seule* stationnaire ? La démonstration rigoureuse a été donnée dans le premier Volume pour des molécules monoatomiques rigides à distribution homogène. Boltzmann l'étend à des molécules complexes, dans le cas où l'action mutuelle des molécules n'intéresse qu'un seul atome dans chacune d'elles et dans l'hypothèse de l'isotropie moyenne d'orientation des molécules; mais la démonstration semble manquer encore dans le cas général.

L'auteur revient longuement, dans ce dernier Chapitre, sur la très grave question de l'irréversibilité, déjà discutée dans le premier Volume. Sur ce point-là aussi, bien des choses ont été dites et l'accord est loin d'être établi. M. Brillouin montre une des raisons du malentendu : la méthode statistique nécessite des hypothèses traduisant le problème dynamique de façon inexacte; les dénombrements supposent l'homogénéité de distribution des molécules, dans chaque élément de volume, conservée malgré les chocs et indépendante de la distribution des vitesses. Il est possible, et même certain, que les chocs produisent des écarts momentanés pendant lesquels l'homogénéité va tantôt en croissant, tantôt en décroissant : on en trouvera un exemple frappant dans la Note de M. Brillouin. La méthode statistique, négligeant ces écarts, arrive à fixer, par le théorème du minimum de la quantité

H de Boltzmann, le sens de l'évolution irréversible d'un système dynamique, dans lequel, pourtant, toutes les actions sont réversibles.

Quant au fait réel de l'irréversibilité physique, les échanges avec l'éther permettent probablement seuls de l'expliquer. On connaît l'importance du conflit entre Cinétistes et Energétistes : il est inutile de chercher à le ramener ici, dans une brève analyse, à quelques formules. Boltzmann indique, sans y attacher lui-même beaucoup d'importance, une solution peu banale qui réduit le principe de Carnot à n'être qu'un accident momentané et local; la tendance contraire, c'est-à-dire, en employant le langage de l'auteur, le passage des états dénués d'organisation ou très probables, aux états organisés ou très peu probables, serait observable dans d'autres univers que le nôtre, mais tout aussi accidentelle dans le temps et dans l'espace; de telle sorte qu'aucune irréversibilité moyenne ne subsisterait pour un observateur impartial envisageant l'ensemble de la durée et de l'espace.

Dans sa préface du premier Volume, écrite en 1895, M. Boltzmann déplore le discrédit où sont tombées les théories cinétiques. Il est impossible que l'histoire des progrès de la Physique, pendant ces dernières années, n'ait pas adouci son amertume. On sait comment, par l'étude expérimentale de la conductibilité électrique des gaz, les physiciens de l'école de J.-J. Thomson ont trouvé un ensemble admirablement cohérent, et d'une précision numérique inespérée, de confirmations de la théorie moléculaire ([1]). Mais, en même temps, la complexité du microcosme qu'est la molécule s'accroît d'une façon bien inquiétante pour l'avenir de la méthode statistique. Le mouvement des électrons des deux signes qui la composent et qui gravitent en entraînant leur sillage électromagnétique étend certainement son influence non instantanée mais propagée avec la vitesse de la lumière jusqu'aux électrons de molécules très éloignées; même en dehors des chocs, il est probable qu'il faudra tenir compte de cette action mutuelle à termes périodiques, dont les systèmes newtoniens les plus compliqués n'offrent que des images incomplètes ou inexactes. C'est encore, cepen-

---

([1]) Voir, par exemple, P. Langevin, *La Physique des électrons*, in *Revue générale des Sciences* du 30 mars 1905.

dant, à l'aide des méthodes de dénombrement et de probabilités que l'on peut espérer obtenir quelques résultats simples. Le Livre de M. Boltzmann est un précieux encouragement dans cette voie, qui ne sera d'ailleurs pas sans encombres, si l'on veut conserver quelque précision aux raisonnements. H. B.

HAMEL (G). — Die Lagrange-Euler'schen Gleichungen der Mechanik. 1 vol. in-8°, 57 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

La première Partie du Mémoire de M. Hamel se rapporte à la question suivante :

Quelles équations obtient-on en Mécanique, à la place des équations de Lagrange, lorsqu'on introduit, au lieu des dérivées q'_λ des paramètres $q_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, des sommes linéaires par rapport à ces dérivées ?

Cette question, fort importante en raison de l'application aux systèmes non holonomes, avait été, sans que l'auteur le sût, traitée par M. Boltzmann [1]. Mais la valeur du résultat obtenu, de son côté, par M. G. Hamel, s'augmente de l'intérêt que présente la méthode qui l'y a conduit, méthode qui se relie de la façon la plus intime à la théorie des transformations infinitésimales et des groupes de Lie.

Les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ que l'on substitue aux dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ étant supposées définies par les équations équivalentes

$$q'_\lambda = \sum_\rho \xi_{\rho,\lambda} \omega_\rho, \qquad \omega_\rho = \sum_\lambda \pi_{\rho,\lambda} q'_\lambda \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n),$$

et les variations $\delta\eta_\rho$, correspondant aux variations δq_λ, étant

[1] *Ueber die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nicht-holonome, generalisierte Koordinaten* (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. CXI, 1902).

définies par les égalités

$$(1) \qquad \delta\mathfrak{Z}_\rho = \sum_\rho \pi_{\rho,\lambda}\,\delta q_\lambda,$$

on a tout d'abord

$$(2) \qquad d\delta\mathfrak{Z}_\rho - \delta d\mathfrak{Z}_\rho = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\rho}\,\delta\mathfrak{Z}_\mu\, d\mathfrak{Z}_\nu$$

en posant

$$\beta_{\mu,\nu,\rho} = \sum_{\sigma,\lambda}\left(\frac{\partial\pi_{\rho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial\pi_{\rho,\sigma}}{\partial q_\lambda}\right)\xi_{\mu,\lambda}\,\xi_{\nu,\sigma};$$

l'auteur désigne, d'après M. Heun [1], les équations (2) sous le nom d'*équations de transitivité de Lagrange*.

Dans le cas où les quantités $\mathfrak{Z}_\rho$ sont de véritables coordonnées, on a $d\delta\mathfrak{Z}_\rho = \delta d\mathfrak{Z}_\rho$ et les quantités β sont nulles.

Si, maintenant, on désigne par $\overline{K}$ la force extérieure (considérée comme un vecteur) qui agit sur le point du système que définit le vecteur $\overline{x}$, et si l'on définit les n *forces* Q par la relation

$$\sum_{1}^{n} Q_\lambda\,\delta\mathfrak{Z}_\lambda = S\overline{K}.\delta\overline{x},$$

qui doit être une identité par rapport aux $\delta\mathfrak{Z}_\lambda$, et où, dans le second membre, le symbole S indique une sommation étendue à tous les points du système, tandis que le symbole $\overline{K}.\delta\overline{x}$ désigne le produit intérieur (ou scalaire) des deux valeurs $\overline{K}$ et $\delta\overline{x}$; si, en outre, T est l'énergie cinétique du système, les équations

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{z}_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}, \\ &\frac{d\mathfrak{z}_\lambda}{dt} - \sum_{\mu,\rho} \beta_{\lambda,\mu,\rho}\,\omega_\mu\,\mathfrak{z}_\rho - \sum_\rho \frac{\partial T}{\partial q_\rho}\,\xi_{\lambda,\rho} = Q_\lambda \end{aligned}\right.$$

remplacent les équations de Lagrange; c'est à ces équations (3) que M. Hamel donne le nom de *formules de Lagrange-Euler*: l'introduction du nom d'Euler est justifiée par ce fait que les

---

[1] *Die Bedeutung des d'Alembert'schen Princips für starre Systeme und Gelenkmechanismen* (*Archiv der Mathematik und Physik*, t. III).

équations classiques relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, appartiennent au type (3), les composantes p, q, r tenant la place des quantités ω_λ. A ces trois équations d'Euler se rattachent tout naturellement les trois équations analogues où les quantités ω_λ sont les composantes π, λ, ρ de la vitesse angulaire sur trois axes fixes, et non sur trois axes liés au corps. M. Hamel montre comment se généralisent les relations entre ces deux systèmes d'équations : cette généralisation se présente quand les transformations infinitésimales qui correspondent aux $\delta\mathfrak{Z}_\lambda$ engendrent un groupe fini à n membres. Ce résultat est le point de départ d'une étude de mouvements, à n degrés de liberté, qui sont la généralisation du mouvement d'un corps solide et où s'introduisent des *groupes de rotation* qui généralisent les groupes auxquels ce nom s'applique naturellement dans cette dernière théorie. A ces systèmes mécaniques spéciaux qu'il a ainsi caractérisés et étudiés, M. Hamel donne le nom de *corps solides à n degrés de liberté*. J. T.

MÉLANGES.

SUR L'ÉQUATION $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, z)$;

PAR M. J. CLAIRIN.

Je me propose de montrer que les seules équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, z), \tag{1}$$

auxquelles s'applique la méthode d'intégration de M. Darboux.

sont l'équation de Liouville et les équations linéaires à invariants égaux obtenues par Moutard : le cas où la fonction f ne dépend ni de x, ni de y, a été étudié par Lie [1].

Modifiant un peu les notations de Monge, nous écrirons

$$p_i = \frac{\partial^i z}{\partial x^i}, \qquad q_i = \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

i désignant un nombre entier quelconque; s représentera toujours la dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Les caractéristiques de l'équation (1) forment deux systèmes : l'un de ces systèmes est composé de caractéristiques le long desquelles x conserve une valeur constante, nous l'appellerons *système* (x); pour une raison analogue, l'autre système sera dit *système* (y).

Nous allons d'abord étudier un cas particulier : supposons que le second membre de l'équation donnée contienne seulement z et l'une des variables indépendantes, x par exemple, et cherchons dans quel cas le système (x) de caractéristiques de l'équation

$$s = g(x, z) \tag{2}$$

possède un invariant d'ordre n, $F(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Il faut que les équations

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + g(x, z)\frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{dg}{dx}\frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0$$

admettent une solution commune. Cette solution appartient aussi à l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{d\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)}{dx}\frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)}{dx^{n-1}}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0;$$

quelle que soit la valeur attribuée à la constante λ, F satisfait

[1] *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. VI. L'analyse de Lie a été reproduite par M. Goursat dans ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (t. II, p. 182).

donc à

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \left(g + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{d\left(g - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)}{dx}\frac{\partial F}{\partial p_2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^{i-1}\left(g - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)}{dx^{i-1}}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

c'est-à-dire que F est un invariant pour le système (x) de caractéristiques de l'équation

$$(3) \qquad s = g(x, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Donnons à x et à z deux valeurs particulières x_0, z_0 arbitrairement choisies dans un domaine à l'intérieur duquel la fonction g soit holomorphe et déterminons λ par la condition

$$g(x_0, z_0) + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{z = z_0} = 0;$$

l'équation

$$g(x, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

peut être résolue par rapport à z, son premier membre se réduit identiquement à *zéro* si l'on substitue à z une certaine fonction $\zeta(x)$ holomorphe dans le voisinage de la valeur x_0 de la variable, à moins que

$$\frac{\partial g}{\partial z} - \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

ne s'annule quand on remplace respectivement x et z par x_0 et z_0. Imaginons que cette circonstance ne se présente pas; $\zeta(x)$ satisfait à (3). L'équation auxiliaire de (3) qui définit les solutions infiniment voisines de l'intégrale $\zeta(x)$ peut s'écrire

$$\frac{d^2 z_1}{dx\, dy} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)_{z = \zeta} z_1.$$

D'après les hypothèses faites, le coefficient de z_1 ne s'annule pas identiquement, l'équation auxiliaire est donc une équation linéaire

à invariants égaux non intégrable, ce qui n'est pas compatible avec l'existence d'une combinaison intégrable des équations différentielles d'un des systèmes de caractéristiques de (3). Par conséquent, la fonction F ne peut exister que si $\frac{\partial g}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ se réduit à *zéro* dès que $g + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}$ est nul, ce qui exige que l'on ait

$$g(x, z) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$g(x, z) = X_0(x) e^{X_1(x) z}.$$

Il est inutile de rechercher maintenant à quelles conditions doivent satisfaire X_0 et X_1, ce qui précède suffit pour nous permettre d'aborder l'étude du cas général. Le système (x) de caractéristiques de l'équation

$$(4) \qquad s = f(x, y, z)$$

possède un invariant d'ordre n, $F(x, y, z, p_1, \ldots, p_n)$ si les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + f(x, y, z) \dfrac{\partial F}{\partial p_1} + \dfrac{df}{dx} \dfrac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \dfrac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \dfrac{\partial F}{\partial p_n} = 0 \end{cases}$$

ont une intégrale commune. F satisfera en outre à

$$\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{dx} \frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{dx^{n-1}} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

Donnons à y une valeur particulière y_0, la dernière équation exprime que $F(x, y_0, p_1, \ldots, p_n)$ est un invariant pour le système (x) de caractéristiques de

$$s = \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial z}.$$

En appliquant les résultats établis plus haut on voit que l'on doit

avoir

$$\frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial z} = u(x, y_0) e^{v(x, y_0) z}.$$

En remplaçant y_0 par y et intégrant par rapport à z, il vient, suivant que v est nulle ou différente de zéro,

$$(6) \qquad f(x, y, z) = u(x, y) z + w(x, y),$$

$$(7) \qquad f(x, y, z) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)} e^{v(x, y) z} + w(x, y).$$

Si $f(x, y, z)$ a la forme (6), l'équation (4) est une équation linéaire à invariants égaux ; nous allons montrer que dans le second cas on a l'équation de Liouville. En modifiant un peu les notations on peut écrire l'équation

$$s = u(x, y) e^{v(x, y) z} + w(x, y),$$

si l'on remplace, en outre, z par $z - \frac{\log u(x, y)}{v(x, y)}$, l'équation prend la forme

$$s = e^{v(x, y) z} + w(x, y),$$

w désignant une nouvelle fonction de x et de y.

Dans le premier membre de la dernière équation (5) figure z^{n-1} multiplié par le coefficient $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n-1} p_1^{n-1} e^{vz} \frac{\partial F}{\partial p_n}$: v doit donc se réduire à une fonction Y de la seule variable y. Annulons séparément dans cette même équation le coefficient de e^{Yz} et le terme indépendant de z, il vient

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p_1} + Y p_1 \frac{\partial F}{\partial p_2} + (Y^2 p_1^2 + Y p_2) \frac{\partial F}{\partial p_3} + \ldots \\ &\qquad + (Y^{n-1} p_1^{n-1} + \ldots + Y p_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + w(x, y) \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

Pour montrer que ces équations ne peuvent avoir une solution commune si Y n'est pas une constante, combinons-les par la méthode de Jacobi : l'équation obtenue ne contient que les dérivées de F prises par rapport à $p_2, p_3, \ldots, p_n$, les coefficients sont, comme ceux de (8), des polynomes entiers en $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, les

termes de plus haut degré de ces polynomes ne dépendent que de p_1 et sont, si l'on divise par Y' le premier membre de l'équation trouvée,

$$p_1, \quad 2Yp_1^2, \quad \ldots, \quad (n-1)Y^{n-3}p_1^{n-1}.$$

En combinant la nouvelle équation avec (9) et divisant le résultat obtenu par Y', on trouve une équation de même forme : le premier coefficient ne dépend que de x et de y, dans les autres coefficients les termes de plus haut degré sont

$$2p_1^2, \quad \ldots, \quad (n-1)(n-2)Y^{n-3}p_1^{n-1}.$$

En répétant la même opération, on arrive à former $(n-1)$ équations linéaires par rapport à $\frac{\partial F}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n}$ dont le déterminant n'est pas identiquement nul puisqu'il contient un terme de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en p_1 qui ne peut disparaître. Y' doit donc s'annuler pour que les équations (8) et (9) soient compatibles : Y est une constante que l'on peut supposer égale à l'unité.

Le système à étudier prend alors la forme simple

$$(8') \qquad \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial p_2} + (p_1^2 + p_2)\frac{\partial F}{\partial p_3} + \ldots + (p_1^{n-1} + \ldots)\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

$$(9') \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + w(x, y)\frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

Il n'y a qu'à combiner ces équations comme il a été expliqué plus haut pour trouver

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & w(x, y)\frac{\partial F}{\partial p_2} - \left[2w(x, y)p_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{\partial F}{\partial p_3} + \ldots \\ & \qquad - \left[(n-1)w(x, y)p_1^{n-2} + \ldots\right]\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous avons déjà remarqué que les coefficients sont des polynomes en $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ dans lesquels les termes de plus haut degré sont mis en évidence, mais le degré de l'un quelconque des coefficients de (10) est inférieur d'une unité au degré du coefficient correspondant de (8'). On combinera (8') avec (10), préalablement divisée par $w(x, y)$ que nous supposons non nulle, et l'on continuera ainsi sans jamais rencontrer d'équation qui soit une consé-

quence des équations déjà écrites : finalement on arrive à

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

ce qui indique que (8)′ et (9)′ sont incompatibles.

Lorsque $\varpi(x, y)$ est égale à *zéro*, l'équation considérée se réduit à l'équation de Liouville

$$s = e^z$$

que l'on sait intégrer.

En résumé, il résulte de ce qui précède que, s'il existe une combinaison intégrable des équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques [1] de l'équation

$$s = f(x, y, z),$$

cette équation est une équation linéaire à invariants égaux ou dérive par un changement de variables de l'équation de Liouville. La considération de l'équation auxiliaire rendait presque certain, *a priori*, le fait qu'il ne peut exister une combinaison intégrable pour les équations d'un des systèmes de caractéristiques sans qu'il en soit de même pour l'autre système.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

LAPLACE. — *Œuvres complètes de Laplace*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome XIII, VIII-358 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

[1] Il n'est pas question ici des combinaisons évidentes

$$dx = 0, \quad dy = 0$$

NERNST (W.) u. A. SCHÖNFLIES. — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften.* Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung, m. besond. Berücksichtigg. der Chemie. 4e édition. In-8°, XII-370 p. avec 69 fig. München, Oldenbourg. 11 m.; relié, 12 m. 50 pf.

SCHLŒMILCH'S *Handbuch der Mathematik.* 2. Thl. In-8°, VIII-622 p. avec 94 fig. et 50 pl. Leipzig, Barth. 20 m.; relié, 22 m. 50 pf.

SYLVESTER (J.-J.). — *Collected mathematical Papers.* Vol. I. 1837-1853. In-8°, 622 p. London, Clay. 18 sh.

VIVANTI (G.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations*, professées à l'Université de Messine. Traduites par A. Boulanger. In-8°, VII-301 p. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

BERTRAND (J.) et H. GARCET. — *Traité d'Algèbre.* 18e édit. In-8°, IV-330 p. Paris, Hachette et Cie. 5 fr.

CHREE (C.). — *Enquiri into the nature of the relationship between Sun spot frequency and terrestrial magnetism.* In-4°, 36 p. London, Dulau. 1 sh. 6 d.

CHRISTIE (W.-H.-N.). — *Astrographic Catalogue*, 1900,0. *Greenwich Section* (Decl. + 64° to 90°). Vol. I. Measures of rectangular coordinates and diameters of star images. Decl. + 64° to + 72°. London, Eyre et Sp. 20 sh.

DUMONT (F.). — *Introduction à la Géométrie du troisième ordre.* In-8°, IX-317 p. Annecy, impr. Dépollier et Cie.

ENCYKLOPÆDIE *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* 1. Bd. *Arithmetik u. Algebra*, red. von W.-Fr. Meyer. 8e fascicule. In-8°. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

— 2. Bd. *Analysis*, red. von H. Burkhardt. 1re Partie, 5e fascicule. In-8°, Leipzig, Teubner. 6 m.

GREENHILL (A.-G.). — *Third elliptic integral and ellipsotomic problem.* In-4°. 88 p. London, Dulau. 4 sh.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

POINCARÉ (H.). — LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE. 1 vol. in-12, 284 pages. — LA VALEUR DE LA SCIENCE. 1 vol. in-12, 278 pages. Paris, Ernest Flammarion.

Ces deux Volumes, dont le second vient de paraître, dont le premier date de trois ans à peu près, se complètent l'un l'autre; quelques-uns diront peut-être que le second corrige parfois le premier; je ne crois pas que cela soit vrai; c'est bien toujours la même pensée, parfois plus claire et présentée avec plus de détail; mais l'auteur n'a rien à renier de ce qu'il a écrit, et il peut dire, non sans quelque allégresse « Eh bien, j'avais raison autrefois, et je n'ai pas tort aujourd'hui. »

On s'est parfois effrayé de son scepticisme; il secoue toutes les conventions, bouscule ceux qui dormaient dessus, dans une pose solennelle; il cogne joyeusement sur les principes, pour entendre s'ils sonnent creux; il n'a aucun respect pour les coffres-forts, avant d'avoir regardé dedans et examiné curieusement les titres qu'ils contiennent; peut-être s'est-il amusé parfois de la mine effarée des gens qu'il a éblouis en jetant une lumière trop vive sur la relativité de nos connaissances. Ce n'est point un sceptique: « La recherche de la vérité doit être le but de notre activité; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. » Il aime passionnément la vérité, pour elle-même, non pour les applications que l'on peut en tirer. Celles-ci sont utiles, un peu parce qu'elles font honneur à la vérité, auprès de tous, un peu parce qu'elles servent de vérifications et permettent de grandioses expériences, surtout parce qu'elles finiront un jour par laisser plus de temps aux hommes, pour chercher la vérité et pour en jouir. Il aime la vérité, d'abord parce qu'elle est vraie, puis parce qu'elle est belle: il se réjouit et s'étonne un peu de la trouver telle, de rencontrer de l'ordre et de l'harmonie dans ce monde. Nul doute que M. Poincaré ne soit très

sensible à toutes les formes de la beauté, mais on sent combien la beauté scientifique l'émeut et le réjouit profondément. Que ceux qui créent cette beauté la sentent plus vivement que tous, cela est juste; que la beauté des théories scientifiques devienne pour les hommes une source nouvelle d'émotions esthétiques, dont ils jouiront par cela seul qu'ils comprendront ces théories, c'est ce que l'on peut espérer, d'autant que, pour comprendre et saisir une théorie scientifique, il faut vraiment agir, et que cette action donne à ceux qui en sont capables l'illusion qu'elle les élève jusque vers ceux qui ont trouvé la vérité; nulle part, celui qui jouit de l'œuvre n'est mieux en communion avec celui qui l'a créée. Souhaitons, avec M. Poincaré, que les applications de la Science laissent aux hommes assez de loisirs pour qu'ils puissent savourer cette jouissance-là. Une pareille espérance a enchanté bien des âmes tendres, depuis l'époque reculée où, dans un coin de la Grèce, le constructeur d'un moulin à eau gravait sur la pierre ces paroles, qu'il prêtait à la nymphe du ruisseau : « Réjouis-toi, pauvre esclave, et repose-toi, c'est moi qui moudrai le grain à ta place... ».

Non, M. Poincaré n'est pas un sceptique, mais c'est un critique puissant, qui descend au fond de sa pensée, et de celle des autres, et qui n'a nullement peur s'il y rencontre des ténèbres. Il est venu bien à propos pour prouver que l'esprit critique n'est point incompatible avec l'esprit créateur, et fournir une réponse suffisante à la phrase banale que répètent volontiers ceux qui n'ont ni l'un ni l'autre esprit.

On retrouvera, dans ses deux Volumes, plus d'une page qu'on se rappellera avoir lues dans une Revue, dans une Préface, ou ailleurs; personne ne s'en plaindra.

Le premier, *La Science et l'Hypothèse,* s'ouvre par un beau Chapitre sur la notion de nombre et sur la nature du raisonnement mathématique. L'auteur y insiste avec force sur le mode de raisonnement par induction : *Si un théorème est vrai pour le nombre* 1, *si l'on a démontré qu'il est vrai pour* $n+1$, *pourvu qu'il le soit de* n, *il sera vrai de tous les nombres entiers positifs;* c'est pour lui le type du *jugement synthétique a priori.* Il passe ensuite à la notion d'espace et aux diverses géométries : on retrouvera là cette lumineuse démonstration qu'il a

donnée de l'impossibilité de prouver expérimentalement la vérité objective de la Géométrie euclidienne. Plusieurs des idées qu'il a introduites dans cette partie de son Livre sont reprises dans le second Volume, *La valeur de la Science*, et mises en pleine lumière; je signalerai, en particulier, ce qui concerne le *continu physique*, la définition de ce que l'on doit entendre par un continu à n dimensions, les discussions relatives aux espaces visuel, tactile, moteur, aux nombres des dimensions de l'espace. La notion de temps qui avait été laissée de côté dans le premier Volume est, dans le second, l'objet d'une critique approfondie. Sans doute, M. Poincaré s'est nourri de Kant; il ne peut, toutefois, garder tout entière la doctrine du maître : l'espace n'est pas une forme imposée à notre sensibilité. « Ce qui est l'objet de la Géométrie, c'est l'étude d'un *groupe* particulier; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. » Voilà la théorie des groupes de Lie passée à la dignité de *forme a priori*. Si Kant n'avait pas su aller jusque-là, on peut l'excuser.

Déjà, dans ce Chapitre sur la Géométrie, se montrent nettement quelques-unes des idées fondamentales qui, chez M. Poincaré, dominent toute la critique de la Science. Ce n'est pas l'expérience qui nous a appris combien l'espace a de dimensions, ni s'il était euclidien; l'expérience n'a pas porté sur l'espace, mais sur nous-même, sur notre corps et les objets voisins. L'expérience nous a guidés en nous montrant quel choix s'adapte le mieux aux propriétés de notre corps. Il nous est commode de raisonner sur l'espace comme s'il était euclidien.

La critique des principes de la Mécanique conduira à des conclusions analogues : ces principes n'ont pas de certitude objective; ils sont provisoirement commodes; ils le resteront longtemps sans doute, peut-être toujours : toutefois, la crise actuelle de la Physique mathématique, étudiée d'une façon si intéressante dans la Conférence de Saint-Louis, ne laisse pas que de causer des inquiétudes à cet égard. D'une part, sans doute, on peut sauver les principes, les sauver à tout prix, comme on *sauve la face*, en les mettant hors de l'expérience, et en introduisant des êtres hypothétiques et invisibles, auxquels on donne justement les propriétés

dont on a besoin; mais un principe cesse d'être fécond si l'expérience le condamne sans le contredire directement. C'est loyalement que l'on doit s'efforcer de sauver les principes qui nous ont rendu tant de services; on ne les abandonnera, s'il le faut, qu'après cet effort : alors, ils disparaîtront à demi, dans de nouvelles formules, où l'on pourra sans doute retrouver leurs traces, ou bien ils subsisteront à demi, suffisants pour une première approximation.

Ainsi, c'est, au fond, notre propre commodité, la facilité pour notre intelligence de construire son schéma de l'univers, qui décide de la valeur des principes de la Science. L'homme reste, suivant la parole du sophiste grec, la mesure de toutes choses. Je crois bien qu'il ne faut pas s'effrayer de cette conclusion; elle n'implique nullement la ruine du *réalisme*, si l'homme n'est pas séparé des choses, si c'est en lui qu'elles prennent conscience, qu'elles deviennent intelligibles. Peut-être l'intelligence de la race s'adapte-t-elle de mieux en mieux aux choses, par l'accumulation des expériences vulgaires, et l'intelligence des savants, par la répétition et l'habitude des expériences scientifiques. C'est ainsi que, dans les applications industrielles de la Science, les organes des mécanismes se perfectionnent et se compliquent de jour en jour, pour mieux s'adapter aux besoins de l'industrie, et que leur perfection actuelle permet de prévoir, pour demain, une nouvelle adaptation à d'autres besoins. L'organe et la fonction réagissant continuellement l'un sur l'autre : il ne faut pas les séparer. Il ne faut pas séparer l'homme du milieu qui vit en lui, par lui, autour de lui. La Science est la relation de l'homme et de ce milieu. Sans doute, nous ne pouvons sortir de nous-même, mais nous sommes dans le milieu que nous prétendons connaître. La Science sera toujours *notre* Science, cela est trop clair, mais elle n'est, pour cela, ni un rêve incohérent, ni un discours bien enchaîné, et qui ne veut rien dire.

Qu'elle ne soit qu'un discours, un jeu de définitions, de conventions, puis de déductions formelles, c'est ce que quelques philosophes, dont le talent scientifique n'est d'ailleurs pas contestable, se sont plu à soutenir. M. Poincaré leur avait fourni quelques armes, dont ils avaient su profiter et, d'ailleurs, tout n'est pas faux dans leur argumentation, puisque, quand la

Science s'organise sous une forme logique, il faut bien mettre des définitions au commencement ; à celui qui débute, ces définitions peuvent sembler arbitraires, et c'est, très souvent, l'ensemble même des déductions, l'accord des conclusions avec la réalité expérimentale, qui justifient ces définitions, au moins d'une façon provisoire. Sans rien retirer de ce qu'il avait dit auparavant, M. Poincaré montre clairement que, si la Science est relative à l'homme, elle n'est pas relative à un individu, ni à un savant particulier, au vouloir propre de ce savant, qu'elle n'est pas une œuvre artificielle, mais bien le produit naturel d'une entente. Et, d'ailleurs, que veut-on dire quand on soutient qu'elle ne vaut que pour l'*action ?* Si elle vaut pour l'action, c'est que l'expérience la vérifie. Que veut-on dire quand on soutient qu'elle ne vaut que pour notre pensée ? Quelle pensée pouvons-nous concevoir, qui n'ait rien de commun avec la nôtre ? Et n'est-ce point cette Science, si relative à nous qu'elle soit, qui nous a appris que tout n'était pas fait pour l'homme, qui nous a enseigné la petite place que nous tenons dans l'Univers, dans cet Univers dont notre pensée, en obéissant aux lois qu'elle a découvertes, pénètre une partie chaque jour plus grande, et comme infinie par rapport à notre corps ?

Pour bien saisir ce qu'est la *valeur de la Science*, il faudrait recommander aux gens instruits, si même ils n'ont pas une culture scientifique spéciale, de lire les quelques pages que M. Poincaré a consacrées à l'Astronomie, à cette Astronomie « qui nous a fait une âme capable de comprendre la nature ». Ils en goûteront tour à tour la fine ironie et la belle éloquence : ils y apprendront comment l'Astronomie a fait pénétrer en nous l'idée de loi scientifique, et comment elle a fourni l'idée d'une telle loi, d'une « relation nécessaire entre l'état présent du monde et son état immédiatement postérieur ». J. T.

LINDELÖF (Ernst). — Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. 1 vol. in-8°, VI-141 pages. Gauthier-Villars. 1905.

Le *Calcul des résidus*, que M. Ernst Lindelöf a écrit pour la collection de monographies *Sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. Borel, tiendra dignement sa place parmi les Volumes déjà parus de cette utile publication. Je l'ai lu avec le plus vif intérêt, et je n'étonnerai sans doute aucun lecteur français en ajoutant que le plaisir que j'y ai pris n'était pas exclusivement d'ordre mathématique. Aucun Ouvrage ne me paraît mieux mériter un éloge dont on a parfois abusé : « c'est un petit livre qui dispense d'en lire beaucoup de gros ». L'auteur ne pouvait évidemment résumer en 140 pages les innombrables applications qui ont été faites du calcul des résidus. Il a dû faire un choix, mais toutes les questions qu'il a traitées, allant des exemples les plus connus jusqu'aux recherches les plus récentes de la théorie des fonctions, ont été bien choisies, et l'intérêt ne fait qu'augmenter à mesure qu'on avance dans la lecture du livre. Il me suffira, pour donner une idée de la richesse des matériaux que l'auteur a mis en œuvre, d'indiquer rapidement le contenu des divers Chapitres.

Le premier Chapitre est consacré aux principes généraux, aujourd'hui classiques, de la théorie des fonctions analytiques d'après Cauchy. Mais M. Lindelöf a trouvé un moyen original, et qu'on ne saurait trop recommander, de rajeunir l'exposition : il est remonté aux sources. Grâce à sa connaissance approfondie des travaux de Cauchy, même des Mémoires les moins répandus, il a pu rectifier sur bien des points quelques indications peu exactes que l'on rencontre souvent, et nous faire pénétrer plus avant dans la pensée du grand géomètre. Ce serait en effet une erreur de croire que toutes les conséquences de sa doctrine ont été développées par lui-même ou par ses disciples. Bien loin de là, on trouve au contraire dans son œuvre le germe de théories importantes qui ont contribué depuis lors à illustrer des mathématiciens étrangers à son école. Pour n'en citer qu'un exemple, plus d'un

lecteur sera surpris sans doute d'apprendre que Cauchy avait énoncé dès 1845 le principe fondamental de la théorie du prolongement analytique, presque dans les mêmes termes où on l'énonce aujourd'hui.

Avec le Chapitre II, nous abordons l'objet proprement dit de l'Ouvrage, les applications du calcul des résidus. La plupart des exemples qui y sont traités sont encore dus à Cauchy; malgré leur apparente diversité, ces exemples me semblent pouvoir se ranger en deux grandes catégories. Les uns sont des applications en quelque sorte immédiates de la formule fondamentale de Cauchy; on les obtient en appliquant cette formule à un contour *fixe*, convenablement choisi, renfermant un nombre fini de pôles de la fonction sous le signe intégral. Tels sont les théorèmes concernant le nombre des racines d'une équation à l'intérieur d'un contour, les fonctions symétriques de ces racines, la formule de Lagrange et celle de M. Jensen. Il n'est peut-être pas sans intérêt, ne serait-ce qu'au point de vue historique, de faire observer qu'il suffisait de poser $F(x) = \log x$ dans la formule classique

$$\sum F(a_k) - \sum F(b_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx,$$

où $f(x)$ est une fonction méromorphe dans le contour C ne renfermant pas l'origine, pour parvenir à l'important théorème de M. Jensen, qui avait été obtenu tout d'abord par une voie bien différente.

Les applications de la deuxième catégorie paraissent au premier abord un peu moins immédiates. Pour les obtenir, on considère en effet une succession de contours fermés, dont une partie au moins s'éloigne indéfiniment, le nombre des pôles situés à l'intérieur du contour pouvant rester fini ou augmenter lui-même indéfiniment. Quoique les exemples traités soient très variés, M. Lindelöf a bien mis en évidence qu'on peut les rattacher à un petit nombre de types, avec des conditions très simples dans chaque cas. Parmi ces exemples, nous citerons, outre le calcul d'un grand nombre d'intégrales définies, dues pour la plupart à Cauchy ou à Hermite, le développement en séries des nombres de Bernoulli et d'Euler, des polynomes de Bernoulli, l'expression d'une fonction méromorphe par une série de fonctions ration-

nelles, et enfin la décomposition d'une fonction entière en un produit d'un nombre infini de facteurs de la forme $\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_i^2}\right)$. Ce dernier exemple est dû à Cauchy qui, sur ce point comme sur tant d'autres, s'est montré vraiment un initiateur.

L'application du calcul des résidus aux formules sommatoires forme l'objet du Chapitre suivant. Ce sont là des applications beaucoup moins connues que les précédentes, dont le principe est pourtant bien simple. Étant donnée une fonction $f(x)$, holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé C, entourant les points m, $m+1$, ..., n de l'axe réel, mais laissant à l'extérieur tout autre point dont l'affixe est un nombre entier, la somme des résidus du produit $\pi \cot \pi z f(z)$, provenant des pôles intérieurs à C, est égale à la somme

$$\sum_{\nu=m}^{n} f(\nu),$$

et le théorème général de la théorie des résidus donne immédiatement l'expression de cette somme au moyen d'une intégrale définie prise le long du contour C. En faisant varier convenablement ce contour, moyennant certaines hypothèses d'un caractère très général sur la fonction $f(z)$, on retrouve aisément, parmi d'autres relations intéressantes, les diverses formules sommatoires connues, dues à Maclaurin, Euler, Boole, Hermite, etc., avec de nouvelles formes du reste. Cette exposition aura pour résultat de mettre de l'unité et de la rigueur dans un sujet où il était assez difficile de s'orienter. Nous devons ajouter que la partie historique est traitée aussi avec beaucoup de soin.

En choisissant convenablement la fonction $f(z)$, les formules sommatoires donnent aisément les expressions diverses de $\log \Gamma(x)$ et de ses dérivées sous forme d'intégrales définies, les développements asymptotiques de $\log \Gamma(x)$, ainsi que les expressions des fonctions $\zeta(s)$, $\zeta(s, w)$ sous forme d'intégrales définies. C'est là l'objet du Chapitre IV, où les résultats dus à un grand nombre d'auteurs, par des méthodes très différentes, se trouvent ainsi rattachés à un même point de vue.

M. Ernst Lindelöf a consacré le dernier Chapitre de son Ouvrage à l'exposé de quelques recherches récentes sur le prolon-

gement analytique d'une série de Taylor, recherches auxquelles il a pris lui-même une part brillante. L'un des résultats les plus remarquables de ces travaux est, comme on sait, la découverte, due à M. Mittag-Leffler, de séries de polynomes représentant la fonction dans son étoile principale. La facilité avec laquelle le théorème de M. Mittag-Leffler se déduit de l'intégrale de Cauchy, ainsi que l'a fait observer M. Borel, devait amener à penser que, là aussi, les méthodes de Cauchy se montreraient fécondes. La lecture des dernières pages du Livre de M. Lindelöf ne peut que confirmer le lecteur dans cette idée. Le problème général traité par l'auteur est le suivant :

Étant donnée une série de Taylor de la forme

$$F(x) = \varphi(0) + \varphi(1)x + \ldots + \varphi(n)x^n + \ldots \tag{1}$$

où φ est une fonction analytique de son argument, déduire les propriétés de la fonction $F(x)$ de celles de la fonction $\varphi(x)$.

Moyennant certaines hypothèses d'un caractère très simple sur la fonction φ, hypothèses qui sont surtout relatives à la façon dont cette fonction se comporte à l'infini dans un demi-plan, le théorème des résidus permet d'exprimer cette fonction $F(x)$ au moyen d'une intégrale définie prise le long d'une droite indéfinie, et cette expression de $F(x)$, au lieu d'être valable à l'intérieur d'un cercle, comme la série (1), est valable à l'intérieur d'un secteur indéfini, limité par deux rayons issus de l'origine. On conçoit, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails, comment une pareille méthode de transformation peut permettre d'étudier les propriétés de la fonction $F(x)$ en dehors du cercle de convergence. Parmi les résultats obtenus, nous citerons seulement ceux qui sont relatifs aux fonctions entières, d'allure si paradoxale, étudiées d'abord par M. Mittag-Leffler, qui tendent vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant un rayon quelconque issu de l'origine, *sauf sur un rayon déterminé*, ou même qui tendent vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant un rayon *quelconque*.

On ferme le livre en ayant l'impression que la fécondité des méthodes dues au génie de Cauchy est encore bien loin d'être épuisée.

E. G.

COUTURAT (L.). — L'ALGÈBRE DE LA LOGIQUE. (Collection *Scientia*). 1 vol. in-8°, 100 pages. Paris, Gauthier-Villars.

Les lecteurs du *Bulletin* seront heureux de connaître un livre court, précis, clair, qui leur permette d'apprendre en peu de temps et sans trop d'efforts ce qu'il y a d'essentiel dans cette *Algèbre de la logique*, dont il semble que le fond intéresse surtout les philosophes et dont la forme est purement mathématique. Il fallait, pour l'écrire, être aussi familier avec les subtilités et les habitudes de la logique qu'avec le symbolisme mathématique. Notre éminent collaborateur possède, à un rare degré, cette double familiarité. C'est d'ailleurs au point de vue mathématique ou, si l'on veut, au point de vue *formel* qu'il s'est placé dans le présent livre, qui est le développement d'une algèbre particulière, reposant sur certains principes arbitrairement posés. La valeur des calculs qu'on y développe ne dépend pas de l'interprétation qu'on en donne et de l'application qu'on peut en faire aux problèmes logiques. Toutefois, s'il n'y avait aucune interprétation, ni aux symboles qu'on introduit, ni aux résultats des calculs auxquels on soumet ces symboles, cette algèbre ne serait qu'un jeu, légitime sans doute, mais qui rebuterait probablement ceux qui s'efforceraient d'en apprendre les règles, sauf peut-être quelques rares esprits, qui se plaisent à regarder une formule en elle-même, qui savent jouir de son élégance et de sa symétrie, et qui s'amusent de voir en sortir une autre formule. L'auteur expliquera donc à l'occasion l'*interprétation conceptuelle* et l'*interprétation propositionnelle* des formules qu'il établit, interprétations qui donnent un sens, et comme un contenu, à ses formules. Dans les deux cas, c'est l'*inclusion* d'un concept dans un concept, d'une proposition dans une proposition qu'on a toujours en vue : un concept a est inclus (*subsumé*) dans un concept b, si la classe des objets auxquels s'applique le concept a est contenue dans la classe des objets auxquels s'applique le concept b, si ce qui caractérise le concept b fait partie de ce qui caractérise le concept a; une proposition a est incluse dans une proposition b, si la proposition a implique

la proposition b. Il est vraiment curieux de voir cette notion d'inclusion engendrer la multiplication et l'addition logiques; puis les relations d'inclusion se transformer en égalités, grâce à l'introduction du zéro logique et de l'unité logique (*univers du discours*) et de la négation ; enfin, toute une théorie des fonctions logiques, des équations logiques, de l'élimination et de la résolution s'échafauder sur ces fondations abstraites. Je suivrai d'autant moins M. Couturat dans ces développements qu'il est vraiment difficile d'abréger son livre, en raison même de l'art et de la concision avec lesquels il est écrit. Je me permets toutefois d'en citer la conclusion qui montre clairement, en la restreignant comme il convient, la portée de l'*Algèbre de la logique*. Celle-ci « n'est, à proprement parler, que l'algèbre de la logique classique ; comme celle-ci, elle reste enfermée dans le domaine circonscrit par Aristote, à savoir le domaine des relations d'inclusion entre des concepts et des relations d'implication entre des propositions. Certes la logique classique (même abstraction faite de ses erreurs et de ses superfétations) était beaucoup plus étroite que l'algèbre de la logique : elle était presque entièrement confinée dans la théorie du syllogisme, dont les bornes paraissent aujourd'hui bien restreintes et bien artificielles. Néanmoins, l'algèbre de la logique ne fait encore que traiter, avec beaucoup plus d'ampleur et de généralité, des problèmes du même ordre; elle n'est, au fond, pas autre chose que la théorie des ensembles considérés dans leurs relations d'inclusion ou d'identité. Or la logique doit étudier bien d'autres espèces de concepts que les concepts génériques (concepts de classes) et bien d'autres relations que la relation d'inclusion (de subsomption) entre de tels concepts. Elle doit, en un mot, se développer en une logique des relations, que Leibniz a prévue, que Peirce et Schröder ont fondée, et que MM. Peano et Russell paraissent avoir établie sur des bases définitives. Or, tandis que la logique classique et l'algèbre de la logique ne sont d'aucune utilité aux Mathématiques, celles-ci trouvent au contraire dans la logique des relations leurs concepts et leurs principes fondamentaux; la véritable logique des Mathématiques est la logique des relations. L'algèbre de la logique elle-même relève de la logique pure, en tant que théorie mathématique particulière, car elle repose sur des principes que nous avons implici-

tement postulés, et qui ne sont pas susceptibles d'expression algébrique ou symbolique parce qu'ils sont le fondement de tout symbolisme et de tout calcul. On peut donc dire que l'algèbre de la logique est une logique mathématique, par sa forme et par sa méthode; mais il ne faut pas la prendre pour la logique des *Mathématiques* ». J. T.

JESSOP (C.-M.). — A TREATISE ON THE LINE COMPLEX. 1 vol. in-8°. xv-364 pages. Cambridge University press, 1903.

Voici bientôt soixante ans que Plücker a publié son *System der Geometrie des Raumes*. Les Mémoires fondamentaux de M. Klein et de Lie remontent aux premières années des *Mathematische Annalen*. La littérature scientifique concernant les complexes de droites et les congruences, dont l'étude avait d'ailleurs précédé celle des complexes, est maintenant très riche, elle comporte des développements dont les uns peuvent être regardés comme de simples exercices de Géométrie analytique, dont d'autres se rapportent aux parties les plus élevées de la Géométrie infinitésimale. M. Jessop aura rendu un véritable service aux étudiants en publiant sur ce beau sujet un livre élémentaire, clair, plein de faits et d'exemples.

L'exposition est, en général, analytique; toutefois, l'auteur introduit à l'occasion des considérations de pure Géométrie; afin de mieux marquer le caractère de son livre, il l'a fait précéder d'une introduction où sont reprises les propositions fondamentales de Géométrie projective (rapport anharmonique, homographie, involution, etc.) dont il a besoin.

Après avoir défini les coordonnées de Plücker et celles de Klein et montré le rôle de l'équation du second degré qui relie ces coordonnées, il consacre trois Chapitres au complexe linéaire et aux systèmes de complexes linéaires, en laissant de côté les applications à la Mécanique. L'auteur s'occupe ensuite des surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre, puis il passe aux

complexes du second ordre, qui occupent sept Chapitres : propositions générales, surface singulière, complexes spéciaux (complexe tétraédral, complexes de Reye, de Painvin, complexe harmonique, etc.), complexes admettant la même surface singulière, polarité, représentation par les points de l'espace des droites d'un complexe du second ordre, réduction de l'équation générale du second ordre à la forme canonique, classification, etc. Deux Chapitres sont ensuite consacrés l'un aux relations entre les géométries de la droite et de la sphère (Lie, Darboux), l'autre aux relations entre la géométrie de la droite et l'espace à quatre dimensions (Klein). M. Jessop traite ensuite, pendant trois Chapitres, des congruences de droites, en particulier de celles du second ordre; il s'occupe ensuite du complexe du $n^{\text{ième}}$ ordre; enfin, dans un dernier et important Chapitre, de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui correspond à un complexe de droite, des équations aux dérivées partielles du second ordre associées aux complexes de droites et de sphères, etc.

De nombreux exercices sont réunis à la fin du Volume.

J. T.

MÉLANGES.

SUR L'ÉNUMÉRATION DES SOUS-GROUPES DU GROUPE LINÉAIRE, HOMOGÈNE, A QUATRE VARIABLES : SOUS-GROUPES A UN ET A DEUX PARAMÈTRES;

PAR M. RAYMOND LE VAVASSEUR.

Dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques de Liouville* (4e série, t. VIII, 1892) M. E. Picard s'est proposé,

pour le cas de n variables, le problème dont voici l'énoncé pour le cas de 4 variables :

Former un système de m équations aux dérivées partielles ($m \geq 4$), contenant uniquement les dérivées partielles du premier ordre des 4 fonctions X, Y, Z, T *des 4 variables x, y, z, t, tel que si ξ, η, ζ, τ désigne un second système de solutions, également arbitraire,* X, Y, Z, T, *considérées comme fonctions de ξ, η, ζ, τ, forment encore une solution du même système d'équations aux dérivées partielles.*

M. E. Picard a établi que la détermination de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles exige la connaissance préalable des sous-groupes du groupe linéaire et homogène à 4 variables. Dans le Tome III de sa *Théorie des groupes de transformations*, S. Lie a donné un certain nombre de ces sous-groupes, mais n'en a pas entrepris l'énumération systématique.

J'ai pensé qu'il y avait lieu de faire cette énumération, et je donne ici les résultats que j'ai obtenus pour les groupes à un ou à deux paramètres.

I. *Groupes à un paramètre* (¹) :

$$a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, \qquad p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha},$$

$$a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4; \quad a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_4;$$

$$a_2x_2p_2 + a_4(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_3; \quad a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + x_3p_3;$$

$$a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4); \quad a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4);$$

$$a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4;$$

$$a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4; \quad a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + x_1p_2;$$

$$a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4); \quad x_3p_3 + x_4p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_3p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_1p_2 + x_3p_4;$$

$$a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_3p_3; \quad a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_3p_4;$$

(¹) Dans tous ces groupes, les a représentent des constantes différentes entre elles, et différentes de zéro.

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_3; \quad a_2x_4p_4 + x_2p_3;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4; \quad x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3; \quad x_4p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4;$$

$$x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3; \quad x_1p_2 + 2x_2p_3;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4; \quad x_1p_2 + x_3p_4;$$

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2; \quad x_1p_2;$$

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4.$$

II. — *Groupes à deux paramètres, à transformations deux à deux échangeables :*

$$\begin{bmatrix} a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4 \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3x_3p_3 + b_4x_4p_4 \end{bmatrix};$$

$$[a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4,\ b_2x_2p_2 + b_3x_3p_3 + b_4x_4p_4];$$

$$\begin{bmatrix} a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_4 \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3(x_3p_3 + x_4p_4) + b_4x_4p_4 \end{bmatrix};$$

$$[a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_4,\ b_2x_2p_2 + b_3(x_3p_3 + x_4p_4) + b_4x_4p_4];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + x_3p_4,\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_4x_3p_4];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3(x_3p_3 + x_4p_4)];$$

$$[x_2p_2,\ x_3p_3 + x_4p_4], \quad [x_1p_1,\ x_2p_2];$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4 \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_1p_2 + b_4x_3p_4 \end{bmatrix};$$

$$[a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4,\ b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_1p_2 + b_4x_3p_4];$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_1p_2 \end{bmatrix};$$

$$[x_1p_1 + x_2p_2,\ x_1p_2], \quad [x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2], \quad [x_1p_1 + x_2p_2,\ x_3p_3 + x_4p_4];$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3 \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_1p_2 + 2x_2p_3 \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_4 \end{bmatrix};$$

$$[a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3,\ b_2x_4p_4 + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_4];$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1 \end{bmatrix};$$

$$[a_2x_4p_4 + x_2p_3,\ b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1];$$

$$\begin{bmatrix} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_3p \end{bmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3x_2p_3 + b_4x_1p_3 \end{array}\right];$$

$$[a_2x_4p_4 + x_3p_4,\ b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_1p_3];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_2p_3],\quad [x_4p_4,\ x_2p_3];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_4(x_1p_2 + 2x_2p_3) \end{array}\right];$$

$$[x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_1p_2 + 2x_2p_3],\quad [x_4p_4,\ x_1p_2 + 2x_2p_3],$$

$$[x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_4p_4];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2(x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4) \\ \qquad + b_3(x_1p_3 + 3x_2p_4) + b_4x_1p_4 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + 2x_2p_4 + 3x_3p_4,\ b_3(x_1p_3 + 3x_2p_4) + b_4x_1p_4];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_4 + x_4p_3 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + 2x_3p_4,\ x_1p_4 + x_4p_3],$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_3 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + 2x_3p_4,\ x_4p_3],$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_4 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + 2x_2p_3,\ x_1p_4],$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + \ldots + x_4p_4) + b_2x_1p_3 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + 2x_2p_3,\ x_1p_3],$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + \ldots + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + \ldots + x_4p_4) + x_3p_1 + x_4p_2 + b_2x_1p_4 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + x_3p_4,\ x_3p_1 + x_4p_2 + b_2x_1p_4];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2x_1p_4 + b_3x_3p_2 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2 + x_3p_4,\ b_2x_1p_4 + b_3x_3p_2],\quad [x_1p_2,\ b_2x_1p_3 + x_3p_4 + b_3x_4p_2];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2x_1p_3 + x_3p_4 + b_3x_4p_2 \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_2 + b_2x_1p_4 + b_3x_1p_4 \end{array}\right];$$

$$[x_1p_2,\ x_4p_2 + b_2x_1p_3 + b_3x_1p_4],$$

$$[x_1p_2,\ x_1p_4 + b_3x_4p_2],\quad [x_1p_2 + b_2x_1p_4 + b_3x_4p_2]$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) - x_1p_3 - b_2x_3p_2 \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) - b_2x_1p_4 - b_3x_3p_2 \end{array}\right].$$

III. *Groupes à deux paramètres, à transformations non deux à deux échangeables :*

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, x_1p_2];$$

$$[(2a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$\left[\begin{array}{c} (3a_3 + 2a_4)x_1p_1 + (2a_3 + a_4)x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, \\ x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4 \end{array}\right];$$

$$[(a_2 + a_3 + a_4)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3, x_1p_2];$$

$$[(2a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[3x_1p_1 + 2x_2p_2 + x_3p_3, x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4];$$

$$[x_2p_2 + 2x_3p_3 + 3x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4];$$

$$[2a_2x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[2x_1p_1 + x_2p_2 + x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4];$$

$$[(a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3, x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[x_1p_1 + x_3p_3 + 2x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4];$$

$$[a_1x_2p_2 + 2a_1x_3p_3 + a_3x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[(a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_4p_4, x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_3x_3p_3 + a_2x_4p_4, x_1p_2];$$

$$[a_1(x_1p_1 + x_3p_3) + a_3x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_1x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_2x_4p_4, x_1p_2];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4, x_1p_2];$$

$$[(2a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_3(x_1p_1 + x_4p_4) + a_1x_2p_2 + (2a_1 + a_3)x_3p_3 + x_1p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_4p_4 + a_3(x_2p_2 + x_4p_4) + x_3p_2, x_1p_2];$$

$$[(2a_3 + a_2)x_1p_1 + a_2x_4p_4 + a_3(x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2, x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[a_1x_2p_2 + a_2x_3p_3 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4, x_1p_2];$$

$$[a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4, x_1p_2];$$

$$[a_3(x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_2x_2p_2 + 2x_3p_3 + (x_4p_4 + x_4p_4) + x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_1x_1p_1 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4, x_1p_2];$$

$$[a_3(x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_4, x_1p_2 + x_2p_3];$$

$$[a_2(2x_1p_1 + x_2p_2 + 2x_4p_4) + x_1p_4, x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[a_2x_4p_4 + a_3(x_2p_2 + x_4p_4) + x_4p_4, x_1p_2];$$

$$[a_3(x_2p_2 + x_3p_3 + 2x_4p_4) + x_3p_2, x_1p_2 + x_4p_4];$$

$$[a_2x_3p_3 - a_3(x_1p_1 - x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2],$$

$$[a_3(2x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3) - x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4];$$

$$[a_2x_1p_1 - a_3(x_2p_2 - x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2],$$

$$[a_2x_2p_2 + a_3(x_1p_1 - x_4p_4) - x_1p_4,\ x_1p_2];$$

$$[a_1x_1p_1 - a_2x_2p_2 - x_3p_4,\ x_1p_2],$$

$$[a_2(2x_1p_1 - x_2p_2) - x_4p_3,\ x_1p_2 - x_2p_3];$$

$$[a_2(x_2p_2 - 2x_3p_3) - x_1p_4,\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[a_1x_1p_1 - a_2x_4p_4 - x_3p_2,\ x_1p_2];$$

$$[a_1(x_1p_1 - x_4p_4) - x_3p_2,\ x_1p_2 - x_3p_4],$$

$$[a_1x_2p_2 - a_2x_3p_3 - x_1p_4,\ x_1p_2];$$

$$[a_1x_1p_1 - a_2x_2p_2 - a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2],$$

$$[(2a_2 - a_3)(x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 - x_4p_4)),\ x_1p_2 - x_2p_3];$$

$$[(2a_2 - a_3)(x_4p_3 - a_2x_2p_2 - a_3(x_1p_1 + x_4p_4)),\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[a_1x_1p_1 + a_2x_3p_3 - a_3(x_2p_2 - x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[2a_1x_1p_1 - 2a_2x_3p_3 - (a_1 - a_2)(x_2p_2 - x_4p_4),\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[2a_1x_1p_1 - 2a_2x_4p_4 - (a_1 - a_2)(x_2p_2 - x_3p_3),\ x_1p_2 - x_3p_4];$$

$$[a_1x_2p_2 + a_2x_3p_3 - a_3(x_1p_1 - x_4p_4),\ x_1p_2],$$

$$[a_2x_2p_2 - a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[x_2p_2 - 2(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[x_1p_1 - x_3p_3 - x_4p_4,\ x_1p_2 - x_2p_3],\quad [a_2x_1p_1 - a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[-x_1p_1 + x_3p_3 - x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3],$$

$$[x_2p_2 - 2(x_1p_1 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3],$$

$$[a_2x_3p_3 - a_3(x_2p_2 + x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[x_2p_2 - 2x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[x_2p_2 - x_3p_3 - 2x_4p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4],$$

$$[a_2x_3p_3 - a_3(x_1p_1 - x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[2x_1p_1 - x_2p_2 - x_4p_4,\ x_1p_2 - x_2p_3],$$

$$[x_1p_1 - 2x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4],\quad [a_2x_1p_1 - a_3(x_2p_2 - x_4p_4),\ x_1p_2];$$

$$[a_2x_2p_2 - a_3(x_1p_1 - x_4p_4),\ x_1p_2],\quad [a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2,\ x_1p_2],$$

$$[2x_1p_1 - x_2p_2,\ x_1p_2 - x_2p_3];$$

$$[x_2p_2 - 2x_3p_3,\ x_1p_2 - x_2p_3],\quad [a_1x_1p_1 - a_2x_3p_3,\ x_1p_2],$$

$$[x_1p_1 - x_3p_3,\ x_1p_2 - x_2p_3];$$

$$[x_1p_1 - x_4p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4],\quad [a_1x_2p_2 - a_2x_3p_3,\ x_1p_2];$$

$$[a_1(x_1p_1 - x_3p_3) - a_2(x_2p_2 - x_4p_4) - x_1p_3 - x_2p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4];$$

$$[a_1(x_1p_1 + x_4p_4) - a_2(x_2p_2 - x_3p_3) - x_1p_4 + x_3p_2,\ x_1p_2];$$

$$[a_1(x_1p_1 - x_3p_3) - x_1p_3 - x_2p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4],$$

$$[a_1(x_1p_1 - x_4p_4) - x_1p_4 + x_3p_2,\ x_1p_2];$$

$$[a_1(x_2p_2 + x_4p_4) - x_1p_3 - x_2p_4,\ x_1p_2 - x_3p_4],$$

$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3)+x_3p_2-x_1p_4,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3)+a_2(x_2p_2+x_4p_4)-x_1p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_2p_2-x_3p_3)-a_2(x_1p_1-x_4p_4)-x_3p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1-x_3p_3)+x_1p_3,\ x_1p_2],\quad [a_1(x_2p_2-x_3p_3)+x_3p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_2(x_2p_2+x_4p_4)+x_1p_3,\ x_1p_2],\quad [a_2(x_1p_1-x_4p_4)+x_3p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3)+a_2(x_2p_2-x_4p_4),\ x_1p_2-x_3p_4],$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3)+a_2(x_2p_2+x_4p_4),\ x_1p_2];$$
$$[x_1p_1+x_3p_3,\ x_1p_2+x_3p_4],\quad [x_1p_1+x_3p_3,\ x_1p_2],$$
$$[x_2p_2-x_4p_4,\ x_1p_2-x_3p_4];$$
$$[x_2p_2-x_3p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4)-a_2x_2p_2+x_1p_4+2x_4p_3,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_1p_1-x_3p_4-2x_4p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_4+2x_4p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_3p_4+2x_4p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_2x_2p_2+x_1p_4+2x_4p_3,\ x_1p_2],\quad [a_2x_1p_1-x_3p_4-2x_4p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_2p_2+x_4p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3-x_4p_4)-a_2x_2p_2+x_1p_3,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)-a_2x_1p_1-x_4p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4)+a_2x_1p_1-x_4p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4)+x_4p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_1p_1+x_3p_3-x_4p_4)+x_1p_3,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_4p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4)+x_4p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_2x_2p_2+x_4p_3,\ x_1p_2],\quad [a_2x_2p_2+x_1p_3,\ x_1p_2],$$
$$[a_2x_1p_1+x_4p_3,\ x_1p_2];$$
$$[a_2x_1p_1+x_4p_2,\ x_1p_2],\quad [a_1(x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_2p_2,\ x_1p_2];$$
$$[a_1(x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_1p_1,\ x_1p_2],\quad [x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4,\ x_1p_2];$$
$$[x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4,\ x_1p_2],\quad [x_2p_2,\ x_1p_2],\quad [x_1p_1,\ x_1p_2].$$

SUR LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. TRANSFORMATION D'UN ORDRE IMPAIR;

PAR J. DOLBNIA.

Dans notre Mémoire *Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie analy-*

tique de la réduction des intégrales abéliennes (¹), nous avons exposé, entre autres, la théorie algébrique de la transformation du troisième ordre. Cette méthode, appliquée aux transformations des ordres supérieurs, suscite de telles difficultés que, de fait, elle peut être considérée comme impraticable. C'est pourquoi, pour les transformations des ordres supérieurs, il faut employer d'autres principes, ne se distinguant de notre méthode primitive qu'en ceci, que dans notre recherche actuelle nous ferons largement usage du théorème de l'addition des arguments. Il faut remarquer que le problème de la transformation est tellement lié avec le problème de la division des périodes elliptiques que dans beaucoup de rapports les deux problèmes coïncident.

Le problème de la division des périodes par 5 et 7 est résolu par Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques* (²). C'est pourquoi, ne nous arrêtant pas aux transformations des ordres 5 et 7, nous étudierons en détail, comme supplément, la transformation du neuvième ordre. La transformation d'un ordre impair

$$2n+1$$

se détermine, comme on le sait, par les formules suivantes (³) :

$$\wp u - \overline{e_1} = (\wp u - e_1)\prod_1^n \left[\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2k\omega}{2n+1} - \omega\right)}{\wp u - \wp\frac{2k\omega}{2n+1}}\right]^2,$$

$$\wp u - \overline{e_2} = (\wp u - e_2)\prod_1^n \left[\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2k\omega}{2n+1} - \omega'\right)}{\wp u - \wp\frac{2k\omega}{2n+1}}\right]^2,$$

$$\wp u - \overline{e_3} = (\wp u - e_3)\prod_1^n \left[\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2k\omega}{2n+1} - \omega''\right)}{\wp u - \wp\frac{2k\omega}{2n+1}}\right]^2.$$

(¹) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVIII, août 1904.

(²) Tome III, 1891, p. 248.

(³) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVII, novembre; Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. III, p. 245.

Soit

$$\mathrm{p}u = x,$$

$$\prod_1^n \left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2k\omega}{2n+1}\right) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x),$$

$$\prod_1^n \left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega\right)\right] = x^n + \xi x^{n-1} + \ldots = \psi_1(x),$$

$$\prod_1^n \left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right)\right] = x^n + \xi' x^{n-1} + \eta' x^{n-2} + \ldots = \psi_2(x),$$

$$\prod_1^n \left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega''\right)\right] = x^n + \xi'' x^{n-1} + \eta'' x^{n-2} + \ldots = \psi_3(x).$$

Le problème de la transformation sera résolu si l'on trouve les expressions algébriques des éléments suivants :

$$\overline{e_1},\quad \overline{e_2},\quad \overline{e_3},$$

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_n,$$

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,$$

$$\xi',\quad \eta',\quad \zeta',\quad \ldots,$$

$$\xi'',\quad \eta'',\quad \zeta'',\quad \ldots.$$

De l'égalité

$$\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2\omega}{2n+1}\right)\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{4\omega}{2n+1}\right)$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times \left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2n\omega}{2n+1}\right) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x),$$

$$-a_1 = \mathrm{p}\frac{2\omega}{2n+1} + \mathrm{p}\frac{4\omega}{2n+1} + \ldots + \mathrm{p}\frac{2n\omega}{2n+1} = \sum_1^n \mathrm{p}\frac{2k\omega}{2n+1}.$$

D'après la formule de l'addition des arguments, nous aurons

$$\mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega\right) = e_1 - \frac{2e_1^2 - e_2 e_3}{\mathrm{p}\dfrac{2k\omega}{2n+1} - e_1},$$

et comme

$$\left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2\omega}{2n+1} + \omega\right)\right]$$
$$\times \left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{4\omega}{2n+1} + \omega\right)\right]$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times \left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2n\omega}{2n+1} - \omega\right)\right] = x^n + \xi x^{n-1} + \ldots = \psi_1(x),$$

alors

$$-\xi = \sum_1^n \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega\right),$$

ou

$$-\xi = ne_1 + (2e_1^2 - e_2e_3)\sum \frac{1}{\mathrm{p}\dfrac{2k\omega}{2n+1} - e_1}.$$

Remarquant que

$$\sum_1^n \frac{1}{e_1 - \mathrm{p}\dfrac{2k\omega}{2n+1}} = \frac{\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)},$$

nous avons

$$\xi = -ne_1 - \frac{(2e_1^2 - e_2e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)},$$
$$\xi' = -ne_2 + \frac{(2e_2^2 - e_1e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)},$$
$$\xi'' = -ne_3 - \frac{(2e_3^2 - e_1e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)}.$$

Supposons maintenant que la transformation en question peut être obtenue par la substitution

$$\frac{x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} + \ldots}{(x^n + a_1x^{n-1} + \ldots)^2} = \mathrm{p}u = \mathrm{F}(x).$$

Remarquant que

$$\mathrm{p}u - \overline{e_1} = \frac{(x^n + \xi x^{n-1} + \eta x^{n-2} + \ldots)^2(x - e_1)}{(x^n + a_1x^{n-1} + \ldots)^2},$$

nous avons

$$x^{2n+1} - (\alpha + \overline{e_1})x^{2n} + \ldots = x^{2n+1} - (2\xi - e_1)x^{2n} + \ldots;$$

d'où

$$\alpha - \overline{e_1} = 2\xi - e_1.$$

D'une manière semblable

$$\alpha - \overline{e_2} = 2\xi' - e_2,$$
$$\alpha - \overline{e_3} = 2\xi'' - e_3;$$

donc

$$3\alpha = 2(\xi + \xi' + \xi'').$$

D'un autre côté, il est évident que les racines des équations

$$x^n + \xi\, x^{n-1} + \eta\, x^{n-2} + \ldots = 0,$$
$$x^n + \xi' x^{n-1} + \eta' x^{n-2} + \ldots = 0,$$
$$x^n + \xi'' x^{n-1} + \eta'' x^{n-2} + \ldots = 0$$

satisfont à l'équation

$$F'(x) = 0.$$

Cette dernière équation, le multiplicateur

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$$

supprimé, se réduit à la forme

$$x^{3n} + 3a_1 x^{3n-1} + \ldots = 0;$$

donc

$$\xi + \xi' + \xi'' = 3a_1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 2a_1.$$

Par cette raison

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{e_1} &= 2a_1 - 2\xi + e_1, \\ \overline{e_2} &= 2a_1 - 2\xi' + e_2, \\ \overline{e_3} &= 2a_1 - 2\xi'' + e_3, \end{aligned}\right.$$

ou autrement

$$\overline{e_1} = 2a_1 + (2n+1)e_1 - \frac{2(2e_1^2 + e_2 e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)},$$
$$\overline{e_1} = 2a_1 + (2n+1)e_2 - \frac{2(2e_2^2 + e_1 e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)},$$
$$\overline{e_3} = 2a_1 + (2n+1)e_3 - \frac{2(2e_3^2 + e_1 e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)}.$$

En additionnant ces équations, nous obtenons

$$(2)\qquad \sum_i \frac{(3e_i^2 - \frac{1}{2}g_2)\varphi'(e_i)}{\varphi(e_i)} = 3a_1.$$

La partie gauche de l'équation (2) s'exprime rationnellement par

$$g_2,\quad g_3,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n;$$

donc l'équation (2) exprime pour la transformation d'ordre $2n+1$ une relation déterminée entre les coefficients

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n$$

de l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots - \varphi(x) = 0.$$

Nommons les racines de cette équation par

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_n;$$

alors

$$\varphi(e_i) = (e_i - \lambda_1)(e_i - \lambda_2)\ldots(e_i - \lambda_n);$$

donc

$$\frac{\varphi'(e_i)}{\varphi(e_i)} = \frac{1}{e_i - \lambda_1} + \frac{1}{e_i - \lambda_2} + \ldots + \frac{1}{e_i - \lambda_n}.$$

Si, pour abréger, nous posons

$$x^3 - \frac{1}{4}g_2 x - \frac{1}{4}g_3 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = f(x),$$

nous verrons que

$$\frac{(3e_1^2 - e_2 e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)} = \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_1} + \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_2} + \ldots + \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_n},$$

$$\frac{(3e_2^2 - e_1 e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)} = \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_1} + \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_2} + \ldots + \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_n},$$

$$\frac{(3e_3^2 - e_1 e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)} = \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_1} + \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_2} + \ldots + \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_n}.$$

En additionnant ces égalités, nous obtiendrons

$$\sum_1^n \left(\frac{f'(e_1)}{\lambda_k - e_1} + \frac{f'(e_2)}{\lambda_k - e_2} + \frac{f'(e_3)}{\lambda_k - e_3} \right) + 3a_1 = 0.$$

Il est facile de s'assurer de la vérité de la formule suivante

$$\sum_{1}^{n} \frac{f'(x_k)}{x - x_k} = \frac{R(x)}{f(x)},$$

où $R(x)$ est le reste qu'on reçoit en divisant $[f'(x)]^2$ par $f(x)$. Par cette raison

$$\frac{f'(e_1)}{\lambda_k - e_1} + \frac{f'(e_2)}{\lambda_k - e_2} + \frac{f'(e_3)}{\lambda_k - e_3} = \frac{\frac{3}{4} g_2 \lambda_k^2 + \frac{9}{4} g_3 \lambda_k + \frac{1}{16} g_2^2}{\lambda_k^3 - \frac{1}{4} g_2 \lambda_k - \frac{1}{4} g_3};$$

donc nous aurons

$$(3) \qquad \sum \frac{\frac{3}{4} g_2 \lambda_k^2 + \frac{9}{4} g_3 \lambda_k + \frac{1}{16} g_2^2}{\lambda_k^3 - \frac{1}{4} g_2 \lambda_k - \frac{1}{4} g_3} + 3a_1 = 0.$$

Il faut faire cette remarque essentielle que la formule (3) est une conséquence du théorème de l'addition. Pour nous en convaincre, prenons la transformation

$$\varphi(x) = x^2 + a_1 x + a_2.$$

Les racines

$$\lambda, \quad \mu$$

de cette équation seront

$$\lambda = p\left(\frac{2\omega}{5}\right), \qquad \mu = p\left(\frac{4\omega}{5}\right).$$

D'après la formule de la duplication de l'argument, nous avons

$$\mu = -2\lambda - \frac{1}{4} \frac{(6\lambda^2 - \frac{1}{2} g_2)^2}{4\lambda^3 - g_2 \lambda - g_3},$$

d'où

$$4(\mu - 2\lambda) = 9\lambda + \frac{\frac{3}{4} g_2 \lambda^2 + \frac{9}{4} g_3 \lambda + \frac{1}{16} g_2^2}{\lambda^3 - \frac{1}{4} g_2 \lambda - \frac{1}{4} g_3},$$

c'est-à-dire

$$4\mu - \lambda = \frac{\frac{3}{4} g_2 \lambda^2 + \frac{9}{4} g_3 \lambda + \frac{1}{16} g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4} g_2 \mu - \frac{1}{4} g_3}.$$

De la même manière, nous obtenons

$$4\lambda - \mu = \frac{\frac{3}{4} g_2 \mu^2 + \frac{9}{4} g_3 \mu + \frac{1}{16} g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4} g_2 \mu - \frac{1}{4} g_3}.$$

Partant

$$\frac{\frac{3}{4}g_2\lambda^2 - \frac{9}{4}g_1\lambda + \frac{1}{16}g_2^2}{\lambda^3 - \frac{1}{4}g_2\lambda - \frac{1}{4}g_3} \quad \frac{\frac{3}{4}g_2\mu^2 - \frac{9}{4}g_1\mu + \frac{1}{16}g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4}g_2\mu - \frac{1}{4}g_3} - 3a_1 = 0.$$

Pour la transformation du troisième ordre, nous avons

$$\varphi(x) = x - \alpha, \qquad \lambda = \alpha, \qquad a_1 = -\alpha.$$

L'équation (3) donne

$$\frac{\frac{3}{4}g_2\alpha^2 - \frac{9}{4}g_1\alpha + \frac{1}{16}g_2^2}{\alpha^3 - \frac{1}{4}g_2\alpha - \frac{1}{4}g_3} - 3\alpha = 0,$$

ou

$$48\alpha^4 - 24g_2\alpha^2 - 48g_3\alpha + g_2^2 = 0.$$

Pour la transformation du cinquième ordre l'application de la formule (3) immédiate donne une équation qui est très compliquée pour les applications. Pour cette transformation, nous avons deux coefficients inconnus

$$a_1, \quad a_2.$$

Pour la transformation du septième ordre, nous avons trois coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Donc, pour l'une de ces transformations il nous faut deux équations, et pour l'autre trois. Ce problème, comme on l'a déjà remarqué, est résolu dans le *Traité* d'Halphen. Ne nous arrêtant pas, pour cette raison, aux transformations des ordres cinquième et septième, passons à la transformation du neuvième ordre, qui nous présente un intérêt particulier par les causes mentionnées plus haut.

Transformation du neuvième ordre. — Pour cette transformation, il faut déterminer les coefficients de l'équation

$$(1) \qquad x^4 - b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x - b_4 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\lambda = \wp\left(\frac{2\omega}{9}\right), \qquad \mu = \wp\left(\frac{4\omega}{9}\right),$$

$$\alpha = \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right), \qquad \nu = \wp\left(\frac{8\omega}{9}\right).$$

L'une d'elles, la racine α, satisfait à l'équation

$$48\alpha^4 - 24 g_2 \alpha^2 - 48 g_3 \alpha - g_2^2 = 0.$$

Prenant α comme une quantité connue, donnons à l'équation (I) la forme

$$(x - \alpha)(x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3) = 0,$$

où

$$-a_1 = \lambda + \mu + \nu, \qquad a_2 = \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu, \qquad -a_3 = \lambda\mu\nu,$$
$$b_1 = a_1 - \alpha, \qquad b_2 = a_2 - a_1\alpha, \qquad b_3 = a_3 - a_2\alpha, \qquad b_4 = -a_3\alpha;$$

donc le problème amène à la détermination des trois inconnues

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Pour cela, il faut former trois équations. Ces équations seront formées par le théorème de l'addition. Nommons, pour abréger,

$$\frac{2\omega}{9} = a, \qquad \frac{4\omega}{9} = b, \qquad \frac{6\omega}{9} = \frac{2\omega}{3} = c, \qquad \frac{8\omega}{9} = d;$$

nous avons

$$(1)\ \begin{cases} a + b \equiv c, \\ a - b \equiv -a, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} a + c \equiv d, \\ a - c \equiv -b, \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} a + d \equiv d, \\ a - d \equiv -c, \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} b - c \equiv d, \\ b - c \equiv -a, \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} b + d \equiv c, \\ b - d \equiv -b, \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} c + d \equiv b, \\ c - d \equiv -a. \end{cases}$$

Appliquant le théorème d'addition au (1), nous obtenons

$$4(\lambda + \mu + \alpha) = \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} + \sqrt{4\mu^3 - g_2\mu - g_3})^2}{(\lambda - \mu)^2},$$

$$4(2\lambda + \mu) = \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} - \sqrt{4\mu^3 - g_2\mu - g_3})^2}{(\lambda - \mu)^2},$$

En additionnant ces équations, nous obtenons

$$4(3\lambda + 2\mu + \alpha)(\lambda - \mu)^2 = 8\lambda^3 + 8\mu^3 + 2 g_2(\lambda + \mu) + 4 g_3;$$

ou, après des réductions nécessaires,

$$\lambda^3 + 4\lambda^2\mu + \mu^2\lambda + 2\alpha\lambda\mu + \alpha(\mu^2 + \lambda^2) + \tfrac{1}{2} g_2(\lambda + \mu) + g_3 = 0.$$

En appliquant le théorème d'addition successivement à (5) et

après à (3), nous obtiendrons

$$\mu^3 - 4\mu^2\nu + \nu^2\mu - 2\alpha\mu\nu + \alpha(\mu^2 + \nu^2) + \tfrac{1}{2}g_2(\mu + \nu) + g_3 = 0,$$
$$\nu^3 - 4\nu^2\lambda - \lambda^2\nu - 2\alpha\lambda\nu + \alpha(\lambda^2 + \nu^2) + \tfrac{1}{2}g_2(\lambda + \nu) + g_3 = 0.$$

Nommons, pour abréger, les fonctions symétriques

$$\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 = \sum\lambda^3, \qquad \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \mu^2\nu + \mu\nu^2 + \lambda^2\nu + \lambda\nu^2 = \sum\lambda^2\mu.$$

En additionnant, après cela, les trois équations ci-dessus, nous obtenons

$$\sum\lambda^3 - \sum\lambda^2\mu - 3(\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda) - 2\alpha\sum\lambda\mu$$
$$+ 2\alpha\sum\lambda^2 + g_2\sum\lambda + 3g_3 = 0.$$

Remarquant que

$$\sum\lambda^3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \qquad \sum\lambda^2 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$\sum\lambda\mu = a_2, \qquad \sum\lambda^2\mu = -a_1a_2 + 3a_3,$$

nous obtenons

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} 3(\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda) = {} & -a_1^3 + 4a_1a_2 \\ & + 6a_3 - 6a_2\alpha + 2a_1^2\alpha - g_2a_1 + 3g_3. \end{aligned} \right.$$

En appliquant maintenant à (1) la formule de la duplication de l'argument, nous obtenons

$$4(2\lambda + \mu) = \frac{36\lambda^4 + 6g_2\lambda + \frac{1}{4}g_2^2}{4\lambda^3 + g_2\lambda + g_3},$$

ou

$$4\mu(4\lambda^3 + g_2\lambda + g_3) = 4\lambda^4 + 2g_2\lambda^2 + 8g_3\lambda + \tfrac{1}{4}g_2^2.$$

De la même manière, de (5) et (3) nous obtenons

$$4\nu(4\mu^3 + g_2\mu + g_3) = 4\mu^4 + 2g_2\mu^2 + 8g_3\mu + \tfrac{1}{4}g_2^2$$
$$4\lambda(4\nu^3 + g_2\nu + g_3) = 4\nu^4 + 2g_2\nu^2 + 8g_3\nu + \tfrac{1}{4}g_2^2.$$

En additionnant les équations reçues et remarquant que

$$\begin{aligned}
\lambda^4 - \mu^4 - \nu^4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 - 4a_1 a_3 - 2a_2^2,\\
\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 &= a_1^2 - 2a_2,\\
\lambda - \mu - \nu &= -a_1,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&16(\lambda^3\mu - \mu^3\nu - \nu^3\lambda) - 4g_2 a_2 - 4g_3 a_1\\
&\quad = 4a_1^4 - 16a_1^2 a_2 - 16a_1 a_3 - 8a_2^2 - 2g_2(a_1^2 - 2a_2) - 8g_3 a_1 - \tfrac{3}{4}g_2^2;
\end{aligned}$$

donc

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned}
16(\lambda^3\mu - \mu^3\nu + \nu^3\lambda) = {} & 4a_1^4 - 16a_1^2 a_2 - 16a_1 a_3\\
& - 8a_2^2 - 2g_2 a_1^2 - 12g_3 a_1 - \tfrac{3}{4}g_2^2.
\end{aligned}\right.$$

Puisque

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu$$

sont les racines de l'équation

$$x^3 - a_1 x^2 - a_2 x - a_3 = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\lambda^3\mu &= -a_1\lambda^2\mu - a_2\lambda\mu - a_3\mu,\\
\mu^3\nu &= -a_1\mu^2\nu - a_2\mu\nu - a_3\nu,\\
\nu^3\lambda &= -a_1\nu^2\lambda - a_2\nu\lambda - a_3\lambda.
\end{aligned}$$

Posant, pour abréger,

$$\lambda^3\mu - \mu^3\nu - \nu^3\lambda = \mathrm{H}, \qquad \lambda^2\mu - \mu^2\nu - \nu^2\lambda = \mathrm{T},$$

nous obtenons

$$\mathrm{H} = -a_1\mathrm{T} - a_2^2 - a_1 a_3.$$

D'après les équations (A) et (B), nous obtiendrons

$$(\mathrm{X})\quad \left\{\begin{aligned}
& 4a_1^4 - 16a_1^2 a_2 - 96a_1 a_3\\
& - 72a_2^2 - 10g_2 a_1^2 - 12g_3 a_1 - 96\alpha a_1 a_2 - 32\alpha a_1^3 - \tfrac{9}{4}g_2^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

En appliquant le théorème de l'addition à (2), nous obtenons

$$4(\lambda - \mu - \alpha) = \frac{\left(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} - \sqrt{4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3}\right)^2}{(\lambda - \alpha)^2},$$

$$4(\lambda - \nu - \alpha) = \frac{\left(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} - \sqrt{4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3}\right)^2}{(\lambda - \alpha)^2};$$

d'où

$$-a_1(\lambda-\alpha)^2+(\lambda+\alpha)(\lambda-\alpha)^2=2\lambda^3-2\alpha^3-\tfrac{1}{2}g_2(\lambda-\alpha)-g_3;$$

c'est-à-dire

$$\text{(II)}\quad -a_1(\lambda^2-2\lambda\alpha+\alpha^2)-\lambda\alpha^2+\alpha\lambda^2=\lambda^3+\alpha^3-\tfrac{1}{2}g_2(\lambda+\alpha)-g_3.$$

D'une manière semblable, de (4) et (6), nous obtiendrons successivement

$$\text{(III)}\quad -a_1(\mu^2-2\mu\alpha+\alpha^2)-\mu\alpha^2-\mu^2\alpha=\mu^3+\alpha^3-\tfrac{1}{2}g_2(\mu+\alpha)-g_3,$$

$$\text{(IV)}\quad -a_1(\nu^2-2\nu\alpha+\alpha^2)-\nu\alpha^2-\nu^2\alpha=\nu^3+\alpha^3-\tfrac{1}{2}g_2(\nu+\alpha)-g_3.$$

En additionnant (II), (III), (IV), nous aurons

$$\text{(Y)}\quad 3a_3=3\alpha^3+2a_1\alpha^2+3a_1^2\alpha-2a_2\alpha-\tfrac{3}{2}g_2\alpha-a_1a_2-\tfrac{1}{2}g_2a_1-3g_3.$$

Soustrayant maintenant (II) et (III) et éliminant le facteur $(\lambda-\mu)$, nous obtenons

$$-a_1(\lambda+\mu)+2a_1\alpha-\alpha^2-\alpha(\lambda+\mu)-\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2-\tfrac{1}{2}g_2.$$

De la même manière

$$-a_1(\lambda+\nu)+2a_1\alpha-\alpha^2-\alpha(\lambda+\nu)-\lambda^2+\lambda\nu+\nu^2-\tfrac{1}{2}g_2,$$

$$-a_1(\mu+\nu)+2a_1\alpha-\alpha^2-\alpha(\mu+\nu)-\mu^2+\mu\nu+\nu^2-\tfrac{1}{2}g_2.$$

Les trois dernières équations donnent

$$\text{(Z)}\qquad 3a_2=3\alpha^2-8a_1\alpha-\tfrac{3}{2}g_2.$$

Des équations (Y) et (Z) nous obtenons

$$9a_3+3\alpha^3+25a_1\alpha^2+a_1^2\alpha-\tfrac{3}{2}g_2\alpha-3g_2a_1-9g_3=0.$$

Mettant maintenant dans l'équation (X), à la place de a_2 et a_3, les quantités obtenues, nous recevons finalement

$$12a_1^4+64\alpha a_1^3-155\alpha^2a_1^2$$
$$-42g_2a_1^2+1536\alpha^3a_1-768g_2\alpha a_1-324g_3a_1-216\alpha^4+216g_2\alpha^2-243g_2^2=0.$$

Saint-Pétersbourg, 5 juin 1905.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik*, begründet von Carl Ohrtmann. Herausgeg. von Emil Lange. 33e Vol., année 1902, 1er fascicule. Gr. in-8°, VI-496 p. Berlin, G. Reimer. 15 m. 60 pf.

JORDAN (W.). — *Handbuch der Vermessungskunde.* 1. Bd. 5. Aufl. Gr. in-8°, XI-582 p. et 21 p. avec fig. Stuttgart, Metzler. 13 m. 60 pf.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Herausg. von C. Reinhertz.

LEEDS ASTRONOMICAL SOCIETY. - *Journal and Transactions.* N° 11. In-8°, 87 p. et 1 planche. London, Wesley. 2 sh.

LEJEUNE-DIRICHLET (G.). — *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen u. mehrfachen bestimmten Integralen.* Herausgeg. von G. Arendt. Gr. in-8°, XXIII-476 p. avec fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 12 m.; relié, 13 m.

LIETZMANN (WALTH.). — *Ueber das biquadratische Reciprocitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern.* (Dissert.) Gr. in-8°, XI-93 p. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht. 2 m. 40 pf.

ROUCHÉ (E.) et C. DE COMBEROUSSE. — *Éléments de Géométrie.* 7e édit. In-8°, XLI-652 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

SÉGUIER (J.-A. de). — *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.* In-8°, II-180 p. Paris, Gauthier-Villars.

VALLOT (H.). — *Instructions pratiques pour l'exécution des triangulations complémentaires en haute montagne.* In-8°, III-137 p. avec fig. Paris. Steinheil.

ACTA *mathematica.* Zeitschrift, herausgeg. von Mittag-Leffler. 28. Bd. In-8°, VIII-394 p. Berlin, Mayer et Müller. 20 m.

BÖHMER (PAUL). — *Ueber geometrische Approximationen.* (Dissert.) Gr. in-8°, 55 p. avec 2 planches. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 60 pf.

FERMAT (P.). — *Le plus grand quadruple* (10^2, 12^2, 16^2, 22^2). *Carré*

magique de Pierre Fermat. Pour la première fois édité sans fautes d'impression par Basile de Sidoratsky en 1904. In-4°, 1 p. Paris, imp. Sidoratsky. 10 fr.

KLEIN (F.). — *Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge.* In-8°, IV-82 p. Leipzig, Teubner. 1 m. 60 pf.

KŒNIGSBERGER (LEO). — *Carl-Gustav-Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der* 100. *Wiederkehr seines Geburtstages.* Avec un portrait et un fac-simile d'une lettre. Gr. in-8°, XVIII-554 p. Leipzig, Teubner. Relié, 16 m.

NASCIUS (F.-C.). — *Sur quelques particularités fort curieuses du système de l'orbite lunaire.* Gr. in-8°, VI-80 p. avec fig. Paris, Rudeval. 3 fr. 50 c.

NATH (MAX). — *Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen. Vortrag.* In-8°, 16 p. Berlin, Salles. 80 pf.

D'OCAGNE (M.). — *Leçons sur la topométrie et la cubature des terrasses, comprenant des notions sommaires de Nomographie.* In-8°, VI-226 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

STURM (AMBROS.). — *Geschichte der Mathematik.* In-8°, 152 p. avec 7 fig. Leipzig, Göschen. (Sammlung Göschen. N° 226.) Relié, 80 pf.

GUICHARD (C.). — *Traité de Mécanique.* 1re Partie : *Cinématique.* 2e éd. In-8°, VIII-108 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

WINCKELMANN (MAX). — *Zur Theorie des Maxwell'schen Kreisels.* (Dissert.) Gr. in-8°, 77 p. avec fig. et 1 planche. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 2 m.

ABHANDLUNGEN *zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von Mor. Cantor. 18e et 19e fascicules. Gr. in-8°, Leipzig, Teubner. 14 m.

CESÁRO (ERNESTO). — *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis u. der Infinitesimal-Rechnung.* Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Deutsch herausgeg. von G. Kowalewski. Gr. in-8°, VI-894 p. avec 97 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 15 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VERHANDLUNGEN DES DRITTEN INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESSES IN HEIDELBERG VOM 8. BIS 13. AUGUST 1904, herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Dr *A. Krazer*. 1 vol. in-8°, 755 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Le Volume, publié par les soins de M. Krazer, sur le troisième Congrès international des Mathématiciens, montre assez quelle a été l'importance scientifique de ce congrès. Espérons que le progrès qui s'est manifesté de congrès en congrès continuera de s'accentuer, que la Ville éternelle verra, en 1908, une affluence plus considérable encore de géomètres, qu'il sera possible d'enregistrer de nouvelles découvertes et le succès de nouveaux efforts. On n'a pas à craindre le ralentissement de ces efforts, que les congrès servent à coordonner.

Quoi qu'il en soit, l'histoire sommaire du Congrès de Heidelberg, les nombreux et importants Mémoires que l'on trouvera dans le Volume de M. Krazer démontrent clairement, à ceux même qui n'ont pu y assister, que ce congrès a été très bien préparé, organisé, et qu'il a manifesté une vie scientifique intense. Le lieu de réunion avait été parfaitement choisi : la belle planche qui sert de frontispice au Volume rappellera aux membres du congrès un site admirable; elle évoquera sans doute le souvenir de délicieuses promenades et de bonnes causeries.

Les premières pages racontent la préparation du congrès, les importantes ressources et les dons généreux, les précieux concours qui lui sont venus; elles contiennent ensuite la liste des membres et une courte relation des séances du congrès : on y remarquera les allocutions de M. Weber, l'évocation du souvenir de Jacobi, dont le centenaire était fêté par le congrès, la présentation, par M. Klein, du premier Volume de cette *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, dont l'édition française commence

à paraître, les résolutions relatives à l'enseignement de l'Histoire des sciences, à la publication des œuvres d'Euler, aux moyens de travail propres à développer l'étude des Mathématiques, la désignation de Rome, sur la proposition de M. Volterra, comme prochain centre de réunion, enfin le souhait, exprimé par M. Greenhill, que la réunion suivante ait lieu en Angleterre.

La seconde Partie, qui contient environ 650 pages, est remplie par les communications des membres du congrès : elles commencent par un beau discours de M. Königsberger à la gloire de Jacobi. Viennent ensuite quatre travaux lus en séance publique : Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, par M. Painlevé, que le *Bulletin* a eu la bonne fortune de publier; L'histoire de la théorie mathématique de la toupie, par M. Greenhill; La Géométrie moderne et ses liens avec l'Analyse, par M. Segre; Les leçons de Riemann sur la série hypergéométrique et leur importance, par M. Wirtinger.

Voici maintenant les titres des travaux communiqués dans les diverses sections.

PREMIÈRE SECTION.

Gordan (*P.*). — Sur la résolution des équations du sixième degré.

Konig (*J.*). — Pour le problème du continu.

Capelli (*A.*). — Un essai sur le théorème de Fermat.

Hoèvar (*F.*). — Sur la détermination des diviseurs linéaires d'une forme algébrique.

Guldberg (*A.*). — Sur les équations différentielles linéaires.

Minkowski (*H.*). — Pour la géométrie des nombres.

Hilbert (*D.*). — Sur les fondements de la logique et de l'Arithmétique.

Voronoï (*G.*). — Sur une propriété du discriminant des fonctions entières.

Wiman (*A.*). — Les équations métacycliques du neuvième degré.

Lœwy (*A.*). — Sur les groupes réductibles de substitutions linéaires et homogènes.

Stephanos (*K.*). — Sur une catégorie d'équations fonctionnelles.

Wilson (*E.-B.*). — Sur les produits des champs additifs.

Müller (*E.*). — Communications sur l'édition des œuvres posthumes de Schröder.

DEUXIÈME SECTION.

Schlesinger (*L.*). — Sur le fragment de Riemann relatif à la théorie des équations différentielles linéaires et les nouveaux travaux qui s'y relient.

Borel (*E.*). — Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes.

Hilbert (*D.*). — Sur une application des équations intégrales à un problème de la théorie des fonctions.

Voronoï (*G.*). — Sur le développement à l'aide des fonctions cylindriques des sommes doubles

$$\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2),$$

où $pm^2 + qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers.

Fricke (*R.*). — Nouveaux développements sur les théorèmes d'existence des fonctions polymorphes.

Boutroux (*P.*). — Sur les fonctions entières d'ordre entier.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur une classe de fonctions entières.

Hadamard (*J.*). — Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles.

Capelli (*A.*). — Sur les formules d'addition.

Andrade (*J.*). — Détermination des mouvements μ de solides aux trajectoires sphériques.

Knoblauch (*J.*). — Formules fondamentales de la théorie des systèmes de rayons.

Lilienthal (*R.-V.*). — Sur les courbes équidistantes sur une surface.

Autonne (*L.*). — Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à plusieurs dimensions.

Genese (*E.-W.*). — Sur quelques théorèmes utiles dans la multiplication continue d'un produit régressif.

Study (*E.*). — Sur le principe de la conservation du nombre.

QUATRIÈME SECTION.

Klein (*F.*). — La question des Mathématiques appliquées; son côté pédagogique, en particulier.

Delaunay (*F.*). — Sur le problème des trois corps.

Levi-Civita (*T.*). — Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.

Weingarten (*J.*). — Exemple simple d'un mouvement stationnaire et sans rotation d'un liquide pesant à surface libre.

Hadamard (*J.*). — Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique.

Sommerfeld (*A.*). — Sur la mécanique des électrons.

Genese (*R.-W.*). — Sur le développement de l'*Ausdehnungslehre* d'après les principes de la Statique.

Weber (*H.*). — Remarques concernant la théorie des équations aux dérivées partielles.

Andrade (*J.*). — Recherches chronométriques.

Börsch (*A.*). — Les fondements de la détermination de la forme de la Terre.

Finsterwalder (*S.*). — Problème de photogrammétrie (reconstruction de l'objet d'après ses images).

Prandtl (*L.*). — Sur le mouvement d'un fluide dans le cas d'un frottement très faible.

Kempe (*A.*). — Mécanisme articulé pour la division de l'angle.

CINQUIÈME SECTION.

Cantor (*M.*). — Introduction à l'histoire des Mathématiques. Indication de nouveaux résultats.

Tannery (*P.*). — Pour l'histoire du problème inverse des tangentes.

Dickstein (*S.*). — Wronski comme mathématicien.

Simon (*M.*). — Sur la mathématique des Égyptiens.

Zeuthen (*H.-G.*). — Usage et abus des dénominations historiques en Mathématiques.

Schlesinger (*L.*). — Rapport sur l'édition des œuvres complètes de L. Fuchs.

Eneström (*G.*). — Quelle place l'histoire des Mathématiques comporte-t-elle dans une Encyclopédie des Sciences mathématiques?

Braumühl (*A.-V.*). — Pour l'histoire des équations différentielles.

Suter (*H.*). — Pour l'histoire des Mathématiques chez les Indiens et chez les Arabes.

Loria (*G.*). — Pour une histoire de la Géométrie analytique.

Vailati (*G.*). — Sur la distinction entre les axiomes et les postulats dans la Géométrie grecque.

SIXIÈME SECTION.

Greenhill (*A.-G.*). — Enseignement des mécanismes par de nombreuses applications familières.

Gutzmer (*A.*). — Sur les tendances pratiques dans l'enseignement des universités allemandes.

Loria (*G.*). — Sur l'enseignement des Mathématiques en Italie.

Fehr (*H.*). — L'enquête de l' « Enseignement mathématique » sur la méthode de travail des mathématiciens.

Stäckel (*P.*). — Sur la nécessité de leçons régulières sur les Mathématiques élémentaires dans les universités.

Fricke (*R.*). — Remarques sur l'enseignement mathématique dans les hautes écoles allemandes.

Andrade (*J.*). — L'enseignement scientifique aux écoles professionnelles et les Mathématiques de l'ingénieur.

Schotten (*H.*). — Quel est le but de l'enseignement mathématique dans les écoles allemandes et comment le plan d'études s'adapte-t-il à ce but?

Simon (*H.*). — Sur les nombres complexes; sur la marche à suivre dans l'enseignement de la Trigonométrie sphérique.

Thieme (*H.*). — Influence des données scientifiques sur l'enseignement des Mathématiques élémentaires.

Sourek (*A.-V.*). — L'enseignement mathématique en Bulgarie.

Meyer (*F.*). — Sur l'essence de la démonstration mathématique.

Finsterbusch (*J.*). — Sur une méthode simple et uniforme pour déterminer le volume des corps dont la section est une fonction entière de la hauteur de degré 3, au plus.

Brückner (*M.*). — Sur les polygones à arêtes et à faces égales discontinus et non convexes.

La troisième Partie se rapporte à une exposition de livres, de modèles et d'appareils divers qui, à en juger par le rapport de M. Disteli, semble avoir été fort intéressante. Les renseignements statistiques que contient ce rapport sur le nombre de livres de mathématiques parus pendant diverses périodes, et, dans les dernières années, dans les différents pays, est en particulier très curieux; ces nombres sont fort rassurants; toutefois les divisions adoptées par l'auteur sont peut-être par trop larges, et M. Disteli signale lui-même la difficulté des comparaisons : l'Allemagne, en tout cas, semble avoir une belle avance. La liste des modèles exposés est aussi pleine d'intérêt : de ces modèles on ne fait pas chez nous, aux divers degrés de l'enseignement, l'usage qu'il faudrait, et nos maîtres s'ingénient par trop à habituer leurs élèves à s'en passer. Le rapport de M. Disteli est suivi de trois Notes : de M. C. Runge, Sur la machine à calculer de Leibniz; de M. H. Wiener, Sur l'évolution des formes géométriques; de M. F. Schilling, Sur le parti qu'on peut tirer, dans l'enseignement des mathématiques, des appareils à projection. J. T.

MAILLET (E.). — *Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale.* 1 vol. in-8° de 218-48 pages. Paris, Hermann, 1905. 11 fr.

Les mouvements et la répartition des eaux météoriques intéressent les mathématiciens, les physiciens, les géologues, les météorologistes, les ingénieurs, etc., et cependant ces questions n'ont guère été traitées jusqu'ici à un point de vue tellement général qu'on ait pu constituer un corps de doctrine à leur sujet.

Le Livre de M. Maillet contribuera à réaliser ce desideratum,

encore qu'il s'agisse moins ici d'un exposé systématique que d'une collection de Mémoires.

La première partie de son Ouvrage est toute théorique.

Ici, M. Maillet, rappelant ce fait, mis en évidence par Dausse et Belgrand, que dans certaines régions sont des périodes où les pluies profitent aux nappes d'eau souterraines et d'autres périodes, au contraire, où les pluies ne leur profitent pas, admet avec M. Boussinesq qu'une nappe souterraine peut, dans certains cas, être soumise à un régime déterminé, indépendant des pluies; et de même les sources qui proviennent de cette nappe.

Donnant alors des formules applicables à ce régime déterminé, M. Maillet en déduit principalement la condition nécessaire et suffisante pour qu'une source ne puisse jamais tarir. Cette condition offre cette particularité intéressante qu'elle peut être reconnue à l'aide d'une construction graphique simple. Il en résulte cette loi :

Pour un certain nombre de sources issues de nappes perméables et qui ont leurs débits maxima réalisés chaque année à peu près vers la même époque, les débits minima de deux années consécutives et la hauteur de pluie de la saison froide intermédiaire sont, en général, à peu près liés par une relation, qui ne peut devenir inexacte que par suite de circonstances météorologiques exceptionnelles.

Vient ensuite une théorie du mouvement de l'eau dans les nappes d'où l'auteur déduit cette conséquence : que pour les nappes à fond parabolique convexe, douées d'un régime propre, il existe un régime où une pluie uniforme tend à réaliser un débit constant proportionnel à l'intensité de ces pluies et à la longueur de la nappe.

Des études intéressantes sur les solutions approximatives du mouvement de l'eau dans les nappes, valables pendant un temps plus ou moins limité, ou sur une longueur plus ou moins grande de la nappe, expliquent ici un certain nombre de phénomènes et terminent cette partie théorique du Livre de M. Maillet.

Dans la partie pratique, qui fait suite à celle-ci, M. Maillet indique un certain nombre d'applications des idées et des théories qui précèdent à la prévision de divers phénomènes hydrologiques.

Il prend pour base les travaux de Belgrand, les observations recueillies et étudiées par le Service hydrométrique central du bassin de la Seine et les publications de ce Service. Ses principaux résultats sont les suivants :

Pour certains terrains, l'accroissement total N du niveau de la nappe dû aux pluies de la saison froide, de total H, est de la forme

$$N = a + bH - cH^2 \qquad (c > 0),$$

ou

$$N = MaH + C\,s^{\delta}, \qquad (M > 0,\ s > 1).$$

Pour certains terrains aussi, si la saison froide des années A — 1, A est exceptionnellement pluvieuse, elle peut renforcer les débits que la théorie permettrait de calculer pour la saison chaude de l'année A + 1, à cause de la porosité des matériaux de ce terrain.

Il en résulte qu'il est possible de prévoir souvent dès le 1er mai les dates des tarissements des sources de la Somme, qu'on peut aussi établir un graphique donnant les débits des sources de la Vanne à partir du maximum de mai, juin ou juillet jusqu'en novembre, époque des pluies préparatoires de la fin de l'année.

Des considérations analogues s'appliquent à la Dhuis, à d'autres sources encore.

Enfin l'auteur signale une très curieuse relation qui existe depuis une trentaine d'années entre les totaux de pluies des saisons chaudes dans le bassin de la Seine et la hauteur maxima des crues des saisons froides suivantes.

Dans une troisième partie, M. Maillet indique une application de ses théories au calcul du volume d'eau contenu à chaque instant dans les nappes souterraines de la Vanne et de la Dhuis et donne une formule de prévision pour les variations du débit de l'ensemble des sources de la Vanne, captées pour la ville de Paris, dans la saison chaude.

Il montre ainsi que, en divers points des rivières du bassin de la Seine, on peut représenter approximativement les variations du niveau pendant les décrues, lorsque les pluies ont cessé, par une formule $h = h_0 e^{-\alpha t}$, où h_0 est un niveau réalisé un peu après le maximum, α un coefficient qui doit avoir une valeur déterminée en chaque station, respectivement pour les décrues de la saison froide et pour celles de la saison chaude.

31 tableaux et 11 graphiques des plus intéressants terminent cet Ouvrage qui est, sans nul doute, une contribution importante à l'Hydraulique pratique.

R. DE MONTESSUS.

MÉLANGES.

CONSTRUCTION DE SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOIDE DE RÉVOLUTION DÉFINIES PAR M. G. DARBOUX;

PAR E. ESTANAVE.

M. G. Darboux a fait connaître récemment [1] deux surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 8a^2 z.$$

Les formules qui définissent ces deux surfaces sont les suivantes :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} x = 4a\dfrac{u^3}{3}, \\ y = -2av\left(u^2 + \dfrac{v^2}{3} + 1 - a^2\right), \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)^2 - (a^2 - 1)(v^2 - u^2) - \dfrac{1}{2}(1 - a^2)^2. \end{cases}$$

$$(\Sigma')\quad \begin{cases} x = -2au\left(v^2 - \dfrac{u^2}{3} + a^2 - 1\right), \\ y = 4a\dfrac{v^3}{3}, \\ z = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2)^2 - (a^2 - 1)(v^2 - u^2) - \dfrac{1}{2}(1 - a^2)^2. \end{cases}$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXL, 13 mars 1905, p. [illegible].

Ces formules se prêtent très bien à l'étude de ces surfaces qui sont l'une et l'autre unicursales.

Comme l'a indiqué M. G. Darboux, elles ne diffèrent pas essentiellement au point de vue algébrique. On passe, en effet, de la surface Σ à la surface Σ' en remplaçant

$$a, \quad u, \quad v, \quad x, \quad y, \quad z.$$

respectivement par

$$ia, \quad iv, \quad iu, \quad y, \quad x, \quad -z.$$

Les sections planes de ces surfaces sont représentées par des courbes du quatrième ordre ayant les mêmes directions asymptotiques et par conséquent les surfaces sont du douzième ordre. Elles sont de dixième classe.

Sur l'invitation de M. G. Darboux, je me suis proposé de construire des modèles représentant ces surfaces.

Le procédé que j'ai adopté consiste à déterminer des sections planes de la surface considérée; à dessiner, le plus exactement possible, ces courbes sur du papier calque. On rapporte ensuite sur des feuilles de métal, et l'on obtient ainsi par découpage des sections rigides. On assemble en leur place ces diverses sections et on les maintient par un point de soudure. On obtient ainsi la carcasse métallique du modèle. Il n'y a plus qu'à recouvrir cette ossature de plâtre en suivant exactement les contours des diverses sections. On polit au besoin au papier de verre, afin de faire disparaître les bavures de plâtre qui se sont produites.

Ce procédé a l'inconvénient de nécessiter une charpente métallique pour chaque modèle. J'ai préféré obtenir par un moulage des surfaces qui ne contiennent pas à leur intérieur cette carcasse. Celle-ci peut alors servir à montrer les diverses sections que l'esprit aurait quelquefois de la peine à imaginer en raison de leur complication. Toutefois, lorsque le modèle était fragile, comme l'était celui représentant les surfaces (Σ'), il peut être avantageux de laisser l'ossature à l'intérieur.

Je vais indiquer ci-dessous les résultats des *principaux calculs* qui m'ont servi à déterminer les diverses sections de ces surfaces, ainsi que la forme de ces sections. On trouvera aussi la reproduction photographique des modèles qui ont été construits.

Considérons la surface (Σ) définie par les équations

$$x = 4a\frac{u^3}{3},$$

$$y = -2av\left(u^2 + \frac{v^2}{3} + 1 + a^2\right),$$

$$z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)^2 + (a^2 + 1)(v^2 - u^2) + \frac{1}{2}(1 - a^4).$$

Afin d'étudier plus facilement cette surface, remplaçons dans les équations précédentes u, v par $u\sqrt{1 + a^2}$, $v\sqrt{1 + a^2}$ et prenons de nouvelles coordonnées x', y', z' liées aux anciennes par les relations

$$x = \frac{4a}{3}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}x'$$

$$y = -\frac{4a}{3}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}y',$$

$$z - \frac{1 - a^4}{2} = \frac{(1 + a^2)^2}{2}(z' - 1),$$

les coordonnées des points de la surface deviennent

$$x' = u^3,$$

$$y' = \frac{1}{2}v(v^2 + 3u^2 + 3),$$

$$z' = (u^2 + v^2 + 1)^2 - 4u^2.$$

Enfin, en posant

$$u^2 + v^2 + 1 = 2t, \qquad t^2 - u^2 = \beta^2,$$

l'on a pour l'expression des coordonnées les points de la surface en fonction de deux paramètres t et β

$$x = (t^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = [\beta^2 - (t - 1)^2]^{\frac{1}{2}}(t^2 + t + 1 - \beta^2)$$

$$z = 4\beta^2.$$

Cherchons maintenant les sections par les plans de coordonnées et indiquons tout d'abord les formes générales de ces sections. Nous déterminerons ensuite le maximum de certaines coordonnées, ainsi que les points remarquables de ces sections.

1° *Section par le plan des xz.* — Il faut que $y = 0$. Prenons

$$\beta^2 = (1 - t)^2,$$

les équations de la section en fonction du paramètre t seront

$$x = \pm(2t - 1)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = 4(t - 1)^2.$$

La courbe est symétrique par rapport à Oz, il suffit de construire la portion relative aux valeurs positives de x.

Le Tableau suivant résume la variation de x et de z lorsque t varie de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Le deuxième Tableau à droite indique les coordonnées de divers points de la section α de la figure 1; il suffit de multiplier ces nombres abstraits par une unité de longueur choisie pour avoir les valeurs des coordonnées à l'échelle adoptée.

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{101}{110}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
x	0	$\left(\frac{46}{55}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	$2\sqrt{5}$	$(1+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$	
z	1	$\left(\frac{9}{55}\right)^2$	0	1	3	

fig. 1, α	A	S	B	E	C
x	0	0,76	1	2,828	4,50
z	1	0,026	0	1	3

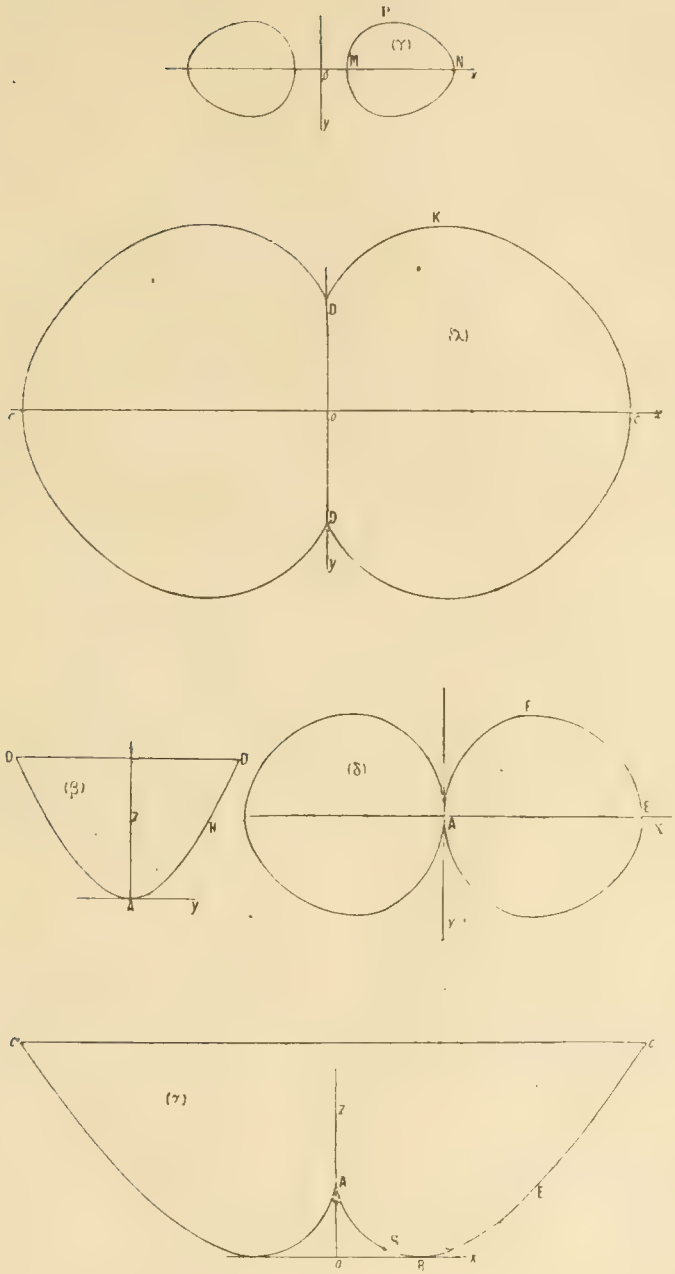
Dans les modèles construits au laboratoire de Géométrie supérieure de la Sorbonne, l'unité de longueur adoptée est de 32^{mm}.

J'ai limité la surface au plan $z = 3$. Les sections, par des plans de cote plus élevée, ont une forme qui s'éloigne peu de celle par le plan $z = 3$.

Nous n'avons pas considéré le facteur $\beta^2 = t^2 + t + 1$ pour lequel $y = 0$; il correspond à une courbe isolée.

2° *Section par le plan des yz.* — Pour que $x = 0$, il faut que

Fig. 1.



$\beta^2 = t^2$; les équations de la section sont alors

$$y = \pm (2t - 1)^{\frac{1}{2}} (t - 1)$$
$$z = \frac{1}{2} t^2.$$

t doit être plus grand que $\frac{1}{2}$ pour que y soit réel.

Les Tableaux suivants indiquent les variations de y et z et les coordonnées de divers points de la figure 1, β :

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*fig.* 1, β	A	H	D
y	0	$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$	0	0	1,096	1,60
z	1	2	3	3	1	2	3

On n'a, comme je l'ai fait déjà remarquer, à construire qu'une portion de ces sections, en raison des symétries. Si l'on cherche le plan tangent à la surface le long de cette section, on voit qu'il se confond avec le plan des xz; cette ligne est une ligne de rebroussement sur la surface.

Dans l'assemblage des sections, cette courbe (β) sera dans un plan perpendiculaire à celui de la courbe (α), les points A étant en coïncidence.

SECTIONS HORIZONTALES.

1° *Section par le plan des xy.* — On obtient $z = 0$ en faisant $\beta = 0$. Les équations de la courbe sont

$$x = \pm t^3, \qquad y = \sqrt{-(t-1)^2(t^2 - t - 1)}$$

qui donnent seulement deux points réels

$$y = 0, \qquad x = \pm 1$$

correspondant à $t = 1$.

Section par le plan $z = \frac{1}{4}$. — Il faut prendre $\beta = \frac{1}{4}$, les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 - \frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$y = \left(t^2 - t - \frac{15}{16}\right)\sqrt{\left(\frac{5}{4} - t\right)\left(t - \frac{3}{4}\right)}.$$

D'où les Tableaux de variations :

t	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$
x	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{(15)^{\frac{3}{2}}}{64}$	$\frac{(24)^{\frac{3}{2}}}{64}$
y	0	$\frac{47}{64}$	0

fig. 1, 7	M	P	N
x	0,353	0,905	1,838
y	0	0,734	0

Section par le plan $z = 1$. — Prenons $\beta = \frac{1}{2}$. On a pour équations de la section

$$x = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$y = \left(t^2 - t + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - t\right)}.$$

t doit varier entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Ces limites ont été déterminées par la condition que les trinomes $t^2 - \frac{1}{4}$ et $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - t\right)$ soient positifs.

Le Tableau suivant résume la variation :

t	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
x	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\left(\frac{21}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{2}$
y	0	$\frac{11}{8}$	$\frac{57\sqrt{3}}{64}$	0

fig. 1, 8	A	L	F	E
x	0	$0,65$	$1,50$	$2,828$
y	0	$1,37$	$1,54$	0

Le point F correspond à l'ordonnée maximum, elle a été déterminée comme je l'indique ci-après.

Section par le plan $z = 3$. — Dans ce cas, $\beta^2 = \frac{3}{4}$ et les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - t\right)}.$$

Pour que x et y soient réels, t doit varier entre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

Le Tableau des variations est, dans ce cas :

t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$	$\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$
x	0	$\frac{(1 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}{8}$	$(1 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$
y	$\frac{(\sqrt{3} - 1)^2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{4}$	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}}$	0

fig. 1, λ	D	K	C
x	0	1,17	4,50
y	1,58	2,70	0

Les autres parties s'obtiennent, comme pour les autres sections, par symétrie.

Cherchons le maximum de l'ordonnée des diverses sections horizontales. Les coordonnées d'un point d'une section par le plan $z = z$ sont

$$x = \left(t^2 - \frac{z}{4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left[\frac{z}{4} - (t-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(t^2 - t - 1 - \frac{z}{4}\right);$$

on a

$$y' = \frac{-3t\left(t^2 - t - \frac{z}{4}\right)}{\sqrt{\frac{z}{4} - (t-1)^2}}.$$

Les valeurs de t qui annulent y' sont

$$t = 0, \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{1+z}}{2}.$$

$t = 0$ ne peut convenir, car x et y ne sont pas réels.

Une seule des deux autres valeurs de t, celle correspondant à la détermination $+$, convient. Les abscisses qui correspondent à cette valeur de t sont

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{1+z}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{car} \qquad t^2 - \frac{z}{4} = t,$$

d'après l'équation qui définit t.

La valeur de y correspondant au maximum sera

$$y = (2 + \sqrt{1+z})\sqrt{\frac{\sqrt{1+z} - 1}{2}}.$$

En donnant à z les valeurs $\frac{1}{4}$, 1, 3, on a les valeurs du maximum de l'ordonnée des sections horizontales

$$z = \frac{1}{4}, \qquad z = 1, \qquad z = 3,$$

ainsi que les valeurs de x qui correspondent.

La figure 2 donne une vue perspective de ce modèle.

Fig. 2.

Sommet du paraboloïde. — Nous avons dit que la surface (Σ) était applicable sur le paraboloïde qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 8a^2 z.$$

Cherchons le point sur la surface qui correspond au sommet du paraboloïde, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre.

L'élément linéaire de la surface, comme l'indique M. G. Darboux dans le Mémoire déjà cité, a la forme

$$(1) \qquad ds^2 = a^2 \frac{H - 1}{H + 1} dH^2 + 2(H + 1) dU^2$$

où les quantités H et U ont pour valeurs

$$H = 1 + \frac{(u^2 + v^2 - a^2 - 1)^2 + 4v^2}{2a^2},$$

$$U = 2a^2 v + 2a^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u^2 + v^2 + a^2 - 1}.$$

L'élément linéaire du paraboloïde est de la forme

$$d\sigma^2 = \varphi(r)\,dr^2 + r^2\,d\theta^2$$

en coordonnées semi-polaires.

Pour le sommet du paraboloïde $r = 0$, donc le point de la surface (Σ) qui correspond au sommet du paraboloïde sera tel que le coefficient de dV^2 dans la formule (1) soit nul. Il faut pour cela $H = 1$, c'est-à-dire

$$v = 0, \qquad u^2 = 1 - a^2.$$

D'autre part, on a multiplié x et y par $\frac{4a}{3}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ et z seulement par $\frac{(1 + a^2)^2}{2}$. Pour que l'on retrouve une surface homothétique il faut que

$$\frac{(1 - a^2)^2}{2} = \frac{4a}{3}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad a^2 = \frac{9}{55}.$$

Les paramètres correspondant au sommet sont par suite

$$u^2 = 1 - a^2 = \frac{46}{55}, \qquad v = 0,$$

d'où

$$t = \frac{u^2 + 1}{2} = \frac{101}{110}, \qquad \beta = \frac{9}{110}.$$

Par suite les coordonnées du point de la surface (Σ) qui correspond au sommet du paraboloïde sont

$$x = \left(\frac{46}{55}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}76, \qquad y = 0, \qquad z = \left(\frac{9}{55}\right)^2 = 0{,}026,$$

ce point est représenté en S sur la figure I, α.

Il y a un point S placé sur chaque mamelon de la surface; chacun correspond à un paraboloïde. Le paraboloïde qui est applicable a pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4(1 + a^2)}\,z,$$

ou, en remplaçant a^2 par sa valeur,

$$x^2 + y^2 = 1{,}93\,z.$$

Les parallèles du paraboloïde se transforment en cercles géodésiques de la surface (Σ). Ces courbes sont faciles à tracer mécaniquement, il suffit de prendre un fil inextensible fixé par l'une des extrémités au point S et de le faire glisser sur la surface en le maintenant tendu, l'autre extrémité décrira la transformée du parallèle.

Une deuxième surface applicable sur le paraboloïde indiquée par M. G. Darboux est celle qui a pour coordonnées

$$(\Sigma')\quad \begin{cases} x = 2au\left(v^2 - \dfrac{u^2}{3} - a^2 - 1\right), \\ y = \dfrac{4a}{3}v^3, \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)^2 + (a^2 - 1)(v^2 - u^2) - \dfrac{1 - a^4}{2} \qquad a < 1. \end{cases}$$

Comme l'indique M. G. Darboux [1], cette surface réelle est applicable sur une partie imaginaire du paraboloïde, celle dont les points se projettent sur l'axe à gauche du plan directeur.

Ces surfaces sont bien applicables sur le paraboloïde réel, mais elles correspondent à une région entièrement imaginaire, dont toutefois l'élément linéaire est resté entièrement réel.

Pour étudier plus facilement ces surfaces, remplaçons u et v respectivement par $u\sqrt{1 - a^2}$, $v\sqrt{1 - a^2}$ et prenons de nouvelles coordonnées x', y', z' liées aux anciennes par les relations

$$x = -\frac{4a}{3}(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}x',$$

$$y = -\frac{4a}{3}(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}y',$$

$$z = \frac{1 - a^4}{2} + \frac{(1 - a^2)^2}{2}(z' - 1).$$

Les équations de la surface deviennent

$$x' = \frac{u}{2}(3v^2 - u^2 - 3),$$

$$y' = v^3,$$

$$z' = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2 - 2v^2 + 1 = (u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2.$$

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXIV, avril 1905.

Si enfin l'on pose

$$1 - u^2 - v^2 = t, \qquad t^2 + v^2 = \beta^2,$$

on a l'expression des coordonnées des points de la surface en fonction de deux paramètres t et β. C'est à cette forme que nous nous arrêterons :

$$\begin{aligned} x &= [(t-1)^2 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}(t^2 + t + 1 - \beta^2), \\ y &= (\beta^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 4\beta^2. \end{aligned}$$

Ces expressions montrent que la surface est symétrique par rapport au plan de xz et de yz. Nous tiendrons compte de cette symétrie dans la construction des sections horizontales. Nous déterminerons seulement le quart de la section. Procédons comme pour la surface que nous avons déjà étudiée et construisons les sections par les plans de coordonnées.

Section par le plan des xz. — On doit avoir $y = 0$, donc $\beta^2 = t^2$; les équations de la section sont

$$\begin{aligned} x &= (t+1)\sqrt{1 - 2t}, \\ z &= 4t^2. \end{aligned}$$

t doit varier de $-\infty$ à $\frac{1}{2}$ pour que x soit réel. Les Tableaux suivants indiquent les variations de x et de z :

t	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$
x	0	1	0	$\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{1 + \sqrt{6}}$
z	1	0	4	6

fig. 3, α	D	A	B	C
x	0	1	0	$-0,40$
z	1	0	4	6

J'ai limité la variation de z à $z = 6$. Les sections horizontales

de cote supérieure ont une forme générale analogue à celle par le plan $z = 6$.

La considération des dérivées x', z' et du rapport

$$\frac{z'}{x'} = -\frac{8}{3}\sqrt{1-2t}$$

permet de déterminer les variations des coordonnées ainsi que la tangente aux divers points de la courbe. Bien qu'il en ait été tenu compte dans la construction des sections, je ne les ai pas introduites dans les Tableaux qui ne contiennent que des résultats.

Section par le plan des yz. — Pour $x = 0$, il y a deux facteurs qui conviennent

$$\beta^2 = (t-1)^2 \quad \text{et} \quad \beta^2 = t^2 + t + 1.$$

Nous avons comme sections

$$\begin{aligned} y &= (1-2t)^{\frac{3}{2}} \\ z &= 4(t-1)^2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} y &= (t+1)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 4(t^2+t+1). \end{aligned}$$

En tenant compte des domaines où t doit varier pour que y soit réel, nous avons, pour une moitié de la courbe, les Tableaux de variations :

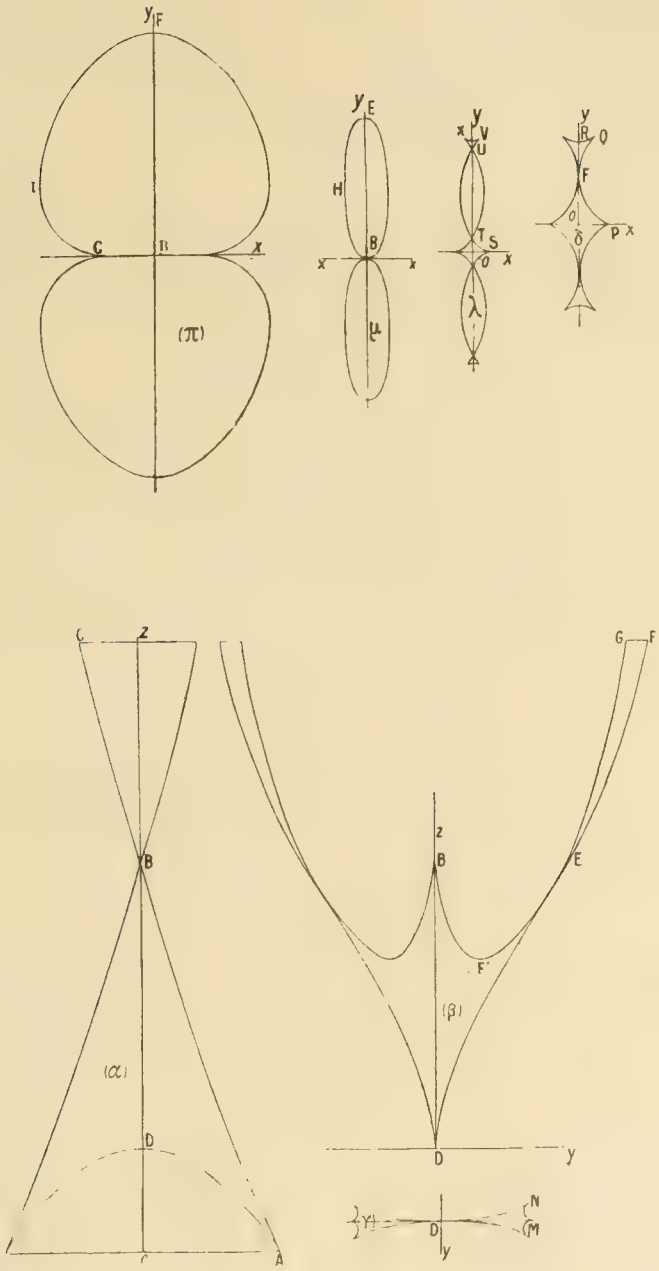
t	$\frac{1}{2}$	0	$1-\sqrt{\frac{3}{2}}$
y	0	1	$(\sqrt{6}-1)^{\frac{3}{2}}$
z	1	4	6

fig. 3, β	D	E	F
y	0	1	1,73
z	1	4	6

correspondant à

$$\beta^2 = (t-1)^2$$

Fig. 3.


y
F
I
G
B
x
(π)
y
E
H
B
x
x
μ
y
x
V
U
T
S
O
x
λ
y
R
O
F
O
δ
P
x
C
Z
B
(α)
D
C
A
G
F
Z
B
E
F
(β)
D
y
Y
D
N
M
y

et

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$
y	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
z	4	3	4	6

fig. 3, β	B	F′	E	G
y	0	$0,353$	1	$1,58$
z	4	3	4	6

correspondant à

$$\beta^2 = t^2 + t - 1.$$

Le coefficient angulaire des tangentes est donné par

$$\frac{z'}{y'} = -\frac{8}{3}\frac{(t-1)}{\sqrt{1-3t}}$$

pour la première courbe et par

$$\frac{z'}{y'} = \frac{8}{3}\frac{2t-1}{\sqrt{1-t}}$$

pour la seconde; les deux courbes sont tangentes au point $z = 4$, $y = 1$ en D et B; elles ont un point de rebroussement.

SECTIONS HORIZONTALES.

Section par le plan $z = 0$. — On a $\beta = 0$ et les équations de la section sont

$$x = \pm(t-1)(t^2 + t + 1),$$
$$y = (-t^2)^{\frac{3}{2}};$$

elles donnent deux points réels correspondant à $t = 0$ et dont les coordonnées sont

$$x = \pm 1, \qquad y = 0.$$

Section par le plan $z = 1$. — Dans ce cas $\beta^2 = \frac{1}{4}$ et les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 + t + \frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2 - 2t + \frac{3}{4}},$$

$$y = \pm\left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

t doit varier entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ pour que x et y soient réels.

Nous obtenons le Tableau de variations de coordonnées :

t	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	0	$\frac{1}{8}$	0

fig. 3, γ	D	N	M
x	0	$0,65$	$0,707$
y	0	$0,12$	0

L'étude de la variation se complète par la considération des dérivées x', y' et du rapport $\frac{y'}{x'}$ qui donne le coefficient angulaire des tangentes aux divers points. Ce coefficient angulaire est donné un peu plus loin.

Section par le plan $z = 3$. — Alors on a $\beta^2 = \frac{3}{4}$.

Les valeurs de x et de y sont

$$x = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2\sqrt{t^2 - 2t + \frac{1}{4}},$$

$$y = \pm\left(\frac{3}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il faut que t varie entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où les Tableaux de variations :

t	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
x	$\sqrt{1-\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$	0		$\frac{1}{8}$	0
y	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$(\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{2}}$

fig. 3, 2	P	F	Q	R
x	0,215	0	0,125	0
y	0	0,35	0,65	0,614

Section par le plan $z=\frac{7}{8}$. — Dans ce cas, $\beta^2=\frac{7}{8}$ et par suite

$$x=\left(t^2-t-\frac{1}{8}\right)\sqrt{t^2-2t-\frac{1}{8}},$$

$$y=\left(\frac{7}{8}-t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il est nécessaire que t soit compris entre $-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ et $1-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Les Tableaux de variations sont :

t	$-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$		$-\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$	0	$1-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$
x	$\frac{(4-\sqrt{14})\sqrt{2-\sqrt{14}}}{4\sqrt{2}}$	0		0	$\frac{1}{16\sqrt{2}}$	0
y	0		$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-1\right)^{\frac{3}{2}}$

fig. 3, λ	S	T	U	V	X
x	0,12	0	0	0,044	0
y	0	0,053	0,78	0,809	0,803

Section par le plan $z = 4$. — Alors $\beta^2 = 1$ et les équations de la section sont

$$x = t(1-t)\sqrt{t(t-2)},$$
$$y = \pm(1-t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il faut que t varie entre -1 et 0. Le Tableau des variations est dans ce cas :

t	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	*fig.* 3, μ	B	H	E
x	0	$(2-\sqrt{5})\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$	0	x	0	0,28	0
y	0	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	y	0	0,47	1

Section par le plan $z = 6$. — Alors $\beta^2 = \frac{3}{2}$.

Les coordonnées d'un point quelconque de la section sont

$$x = \left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2 - 2t - \frac{1}{2}},$$
$$y = \left(\frac{3}{2} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il faut que t varie entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le Tableau des variations est le suivant :

t	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		$1-\sqrt{\frac{3}{2}}$
x	$\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1+2\sqrt{\frac{3}{2}}}$		$\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$		0
y	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$(\sqrt{6}-1)^{\frac{3}{2}}$

fig. 3, π	C	I	F
x	$-0,41$	$-0,79$	0
y	0	$0,353$	$1,73$

Dans les Tableaux de variations ci-dessus, ne figurent pas les valeurs des dérivées de x, y, bien que nous en ayons tenu compte dans la construction des sections. Afin de ne pas me répéter à propos de chaque section horizontale, j'ai calculé ces dérivées en laissant z indéterminé, et j'ai ensuite, pour chaque section, donné à z la valeur correspondante.

Les coordonnées d'un point d'une section horizontale $z = z$ sont

$$x = \left(t^2 - t + 1 - \frac{z}{4}\right)\sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}},$$

$$y = \left(\frac{z}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On trouve

$$x' = \frac{3t\left(t^2 - t - \frac{z}{4}\right)}{\sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}}}, \qquad y' = -3t\left(\frac{z}{4} - t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

y sera maximum ou minimum pour les valeurs de t

$$t = 0, \qquad t = \pm \frac{\sqrt{z}}{2},$$

lorsque ces valeurs seront comprises dans l'intervalle où t doit varier pour que x et y soient réels. Sous les mêmes restrictions relatives à t, x sera maximum ou minimum pour

$$t = 0 \qquad \text{et} \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - z}}{2}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en un point d'une section horizontale est

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{z}{4} - t^2\right)\left(t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}\right)}}{t^2 - t - \frac{z}{4}}.$$

Le lieu des points A, N, Q, V, E (*fig.* 3, α, γ, δ, λ, μ) est une courbe de rebroussement; nous allons chercher sa projection ou le plan des xz pour comparer l'abscisse de ces divers points correspondant à une même valeur de z à l'abscisse des points de la courbe passant par les points A, M, P, S, O (*fig.* 3, α, γ, δ, λ, μ); l'équation de la courbe passant par les points A, M, P, S, O est

$$X = \sqrt{1 + \sqrt{z}}\left(1 - \frac{\sqrt{z}}{2}\right);$$

l'équation de la projection sur le plan des xz de la courbe passant par A, N, Q, ... est

$$x = \left(1 - \frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrons que la différence $X - x$ est positive, z variant de 0 à 4; pour $\sqrt{z} = h$, on a

$$X - x = \left(1 - \frac{h}{2}\right)\left[(1 + h)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right];$$

le fait que $1 - \frac{h}{2}$ est > 0 montre que le crochet est aussi positif;

on a, en effet, en élevant au carré :

$$1 - h > 1 + h - \frac{h^3}{4} - \frac{h^5}{16}.$$

Donc l'arête de rebroussement lieu des points A, M, P, S, O, ... fait saillie par rapport à la ligne de rebroussement lieu des points A, N, Q, V, E.

J'ai construit les modèles en prenant pour unité de longueur 32^{mm} pour la surface Σ. En ce qui concerne la surface Σ', afin

Fig. 4.

d'avoir des modèles moins effilés et par suite moins fragiles, j'ai pris pour unité pour les coordonnées x et y 64^{mm} et 48^{mm} pour la coordonnée z. Les figures 3 et 4 représentent les modèles en plâtre construits à cette échelle.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

FUCHS (L.). — *Gesammelte mathematische Werke.* Herausgeg. von Rich. Fuchs u. Ludw. Schlesinger. 1. Bd. *Abhandlungen* (1858-1875). Red. von L. Schlesinger. In-8°, VIII-476 p. avec portrait. Berlin, Mayer et Müller. 30 m.; sur papier à écrire, 40 m.

GILL (J.). — *Text-Book on navigation and nautical Astronomy.* New edit. by M. V. Merrifield. In-8°, 408 p. London, Longmans. 10 sh. 6 d.

GORE (J.-E.). — *Studies in Astronomy.* In-8°, 348 p. London. Chatto et W. 6 sh.

HAGEN (JOH.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* 3. Bd. *Differential- u. Integral-Rechnung.* 5. Lfg. In-4°, Berlin, Dames. 5 m.

BURKHARDT (H.). — *Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen.* 4. Lfg. (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Herausgeg. von R. Mehmke u. A. Gutzmer. 10. Bd. 2. Heft. 4. Lfg.) Gr. in-8°, Leipzig, Teubner. 10 m.

JOHNSON (A.-C.). — *Méthode pour trouver la latitude et la longitude par temps nuageux et en tous temps.* Trad. de la 27e édition anglaise et annoté par O.-V. de Jassaud. In-8°. Paris, Challamel. Cart., 6 fr. 25 c.

MOSNAT (E.). — *Problèmes de Géométrie analytique.* Tome II. *Géométrie à deux dimensions.* 2e édition. In-8°, 483 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

SEGUIER (J.-A. DE). — *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.* In-8°, 180 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

SOTTA (F.-M.). — *La meccanica dell'infinito.* In-8°, Milano, Manini-Wiget, 15 fr.

STOLZ (OTTO) u. J.-ANT. GMEINER. — *Einleitung in die Funktionentheorie.* 2. Aufl. (In 2 Abtlgn.) 1. Abtlg. VI-249 p. avec 10 fig. 6 m.

IGN. WALLENTIN. — *Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre.* X-444 p. avec 81 fig. 12 m. (*Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf*

dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. XIV u. XV. Bd. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 18 m.

Abraham (H.). — *Recueil d'expériences élémentaires de Physique.* 2e Partie : *Acoustique, Optique, Électricité et Magnétisme.* In-8°, XII-451 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 25 c.; cartonné, 7 fr. 50 c.

Boltzmann (Ludw.). — *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik.* II. Tl. Gr. in-8°, X-336 p. avec 10 fig. Leipzig, Barth. 9 m.; relié, 10 m.

Mach (Ernst). *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt.* 5e édition. In-8°, XVI-561 p. avec 247 fig. Leipzig, Brockhaus. (*International wissenschaftliche Bibliothek.* 59. Bd.) Relié, 9 m.

Schuster (A.). — *Introduction to the theory of Optics.* In-8°, 365 p. London, Arnold. 15 sh.

Correspondance *de A. Volta et M. van Marum.* In-8°, Leiden, Sijthoff. 7 m.

Annales *de l'Observatoire de Bordeaux*, publiées par G. Rayet. T. XI. In-4°, 588 p. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Buchanan (B.). — *Mathematical theory of eclipses.* In-8°. London, Lippincott. 21 sh.

Cajori (F.). — *Introduction to modern theory of equations.* In-8°. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

Campbell (D.-F.). — *Elements of differential and integral calculus.* In-8°. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

Encyclopédie *des Sciences mathématiques pures et appliquées*, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Ed. française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. T. I (1 vol.) : *Arithmétique.* Fasc. I. In-8°, 160 p. Leipzig, Teubner. Paris, Gauthier-Villars. 4 m.

Esclangon (E.). — *Les fonctions quasi-périodiques* (thèse). In-4°. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

1° Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BAIRE (René). — Leçons sur les fonctions discontinues. 1 vol. in-8°, 127 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Cet Ouvrage fait partie de la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* inaugurée et dirigée par M. Émile Borel. On y trouve l'exposé des Leçons que M. Baire a professées au Collège de France en 1904, et où il a repris sous une forme plus didactique les principaux résultats figurant dans sa Thèse de doctorat.

Il y a, dit-on, des mathématiciens qui rejettent comme leur étant étranger tout ce qui traite de théorie des ensembles ou de fonctions non analytiques. Un tel exclusivisme semble difficile à justifier. On ne saurait en effet regarder comme immuable la matière de la Science mathématique, ni nous dénier le droit de modifier à notre guise le choix particulier de définitions dont sont partis nos prédécesseurs. En revanche, lorsque nous usons de ce droit, il faut nous garder d'oublier que notre nouveau choix de définitions ne peut être encore qu'un choix particulier. Ainsi, il n'existe pas, à proprement parler, de théorie des fonctions discontinues. Tout ce que nous pouvons faire au sujet de ces fonctions, c'est de découper, dans l'ensemble indéfini qu'elles constituent, des ensembles partiels spéciaux jouissant de propriétés caractéristiques. Or c'est là ce qu'a fait excellement M. Baire. Son livre doit être regardé comme étant une contribution à l'analyse de la notion de discontinuité. L'objet poursuivi est de mettre en lumière un groupe fondamental de fonctions, fonctions qui sont *ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait*, et d'établir que ces fonctions sont seules à jouir de la propriété caractéristique suivante : *l'une quelconque d'entre elles est la limite d'une suite de fonctions continues.*

Expliquons cette définition et cet énoncé, vers lesquels con-

vergent toutes les recherches de M. Baire, et qui nous donnent la clef de son Ouvrage.

L'introduction des fonctions ponctuellement discontinues est soigneusement préparée par les Chapitres II et III, qui sont consacrés à quelques généralités sur la théorie des ensembles. Le Chapitre II traite en particulier des ensembles bien ordonnés (l'exposition de cette partie délicate est particulièrement remarquable par sa netteté et sa simplicité) et des nombres transfinis. Dans le Chapitre III (les ensembles linéaires) nous sommes familiarisés avec l'importante notion d'*ensemble parfait non dense*.

On sait qu'un ensemble de points est dit *parfait* s'il coïncide avec son dérivé. Un ensemble est *dense en lui-même* si chacun de ses points est point-limite pour l'ensemble. Ainsi un ensemble parfait est un ensemble qui est à la fois fermé et dense en lui-même.

D'autre part, on dit qu'un ensemble de points P est *non dense* dans le segment AB si toute portion du segment AB contient une portion dans laquelle ne se trouve aucun point de P.

Par une ingénieuse méthode, M. Baire nous montre concrètement que l'on peut former des ensembles parfaits de points qui sont non denses dans tout intervalle d'un segment donné. Il nous fait voir de plus comment sont constitués ces ensembles : si P est un ensemble parfait non dense sur un segment de droite, il y a sur ce segment une infinité dénombrable d'intervalles constituant un ensemble partout dense dans AB, ces intervalles n'ayant deux à deux aucun point commun, et tels que P soit constitué par les points de AB qui ne sont pas intérieurs à ces intervalles.

De la notion d'ensemble parfait non dense on passe par analogie à celle de fonction ponctuellement discontinue. On peut dire en effet, approximativement parlant, qu'une fonction est ponctuellement discontinue sur un segment AB si toute portion du segment AB contient au moins un point qui n'est pas point de discontinuité pour la fonction.

La définition précise des fonctions ponctuellement discontinues est donnée par M. Baire dans son Chapitre IV. Considérons les limites supérieures d'une fonction $f(x)$ dans une suite d'intervalles contenant un même point A et tendant vers zéro. La limite de ces limites supérieures, soit $M(f, A)$, est appelée *maximum de*

la fonction f au point A. De même on définit le *minimum* $m(f, A)$ *de la fonction f au point* A, et l'on appelle *oscillation de f au point* A la différence

$$M(f, A) - m(f, A).$$

Cela posé imaginons une fonction f jouissant de la propriété suivante sur un segment PQ : quel que soit le nombre ε positif, il y a, dans tout intervalle de PQ, un point au moins où l'oscillation est inférieure à ε. M. Baire montre que, dans cette hypothèse, il existe, dans tout intervalle du segment PQ, des *points où l'oscillation est nulle*. La fonction $f(x)$ qui jouit de cette propriété est dite *fonction ponctuellement discontinue sur le segment* PQ.

Après nous avoir conduits à cette définition, M. Baire en donne diverses extensions. Il remarque qu'au lieu de définir une fonction sur un segment continu, on peut la définir sur un ensemble parfait quelconque. Ainsi l'on définira l'oscillation en un point d'un ensemble parfait; on définira également les fonctions qui sont ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait. Enfin dans un dernier Chapitre, le plus important au point de vue de la généralité des résultats (Chap. V, *Les fonctions de n variables*), M. Baire étend à l'espace à n dimensions les résultats obtenus pour une dimension.

J'ai déjà indiqué le théorème fondamental qui est l'aboutissement du Livre de M. Baire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction quelconque, finie ou infinie, soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

Je ne puis songer à donner une idée des raisonnements subtils par lesquels M. Baire démontre son théorème. Je signalerai seulement le point de départ de sa méthode, qui se trouve dans la proposition suivante (exposée au Chapitre I) :

La recherche d'une suite de fonctions continues ayant pour limite une fonction $f(x)$ définie sur le segment AB *est équivalente à la recherche d'une fonction* $F(x, y)$ *se réduisant à* $f(x)$ *pour* $y = 0$, *continue par rapport à l'ensemble des deux va-*

riables (x, y) *dans le rectangle* ABA_1B_1 *sauf sur* AB, *et enfin continue par rapport à* y *en tout point de* AB.

Cette proposition permet, lorsqu'on a déjà établi que certaines fonctions discontinues sont limites de fonctions continues, d'étendre ce résultat à des fonctions présentant des discontinuités de plus en plus compliquées. Ainsi l'on s'élèvera progressivement au cas le plus général en partant du cas élémentaire où la fonction présente un point de discontinuité isolé.

Le résultat fondamental sur lequel je viens de m'étendre constitue le centre des recherches de M. Baire. Mais un grand nombre d'autres questions, relatives à la théorie des ensembles, sont soulevées par lui, incidemment, et traitées avec l'élégance et la clarté qui caractérisent l'Ouvrage d'un bout à l'autre. Ces qualités d'exposition, très remarquables chez M. Baire, nous garantissent que son Livre saura gagner de nouveaux adeptes à la cause des fonctions discontinues.

PIERRE BOUTROUX.

ENRIQUES (F). — VORLESUNGEN UEBER PROJEKTIVE GEOMETRIE. Deutsche Ausgabe von *H. Fleischer*. Mit einer Einführungswort von *F. Klein*. 1 vol. in-8°, XIV-374 pages. Leipzig, Teubner; 1903.

Ces Leçons sur la Géométrie projective, dont l'édition italienne remonte à l'année 1898, ont à la fois un caractère didactique et scientifique : elles s'adressent aux étudiants, qui peuvent vraiment y apprendre la Géométrie projective; elles sont l'œuvre d'un savant, qui a profondément réfléchi sur les principes de sa Science et qui développe les conséquences de ces principes en toute rigueur et en toute pureté.

M. Enriques ramène à six les axiomes sur lesquels la Géométrie projective se fonde. Après avoir exposé comment l'introduction des éléments *impropres* (points à l'infini sur une droite, droite de l'infini, plan de l'infini) simplifie et systématise le langage, il développe un premier groupe de trois axiomes, relatifs aux opé-

rations de *projection* (centrale) et de *section* (par une droite ou un plan) : ces axiomes sont énoncés sous une forme abstraite qui permet, par exemple, de réunir sous un même énoncé des propositions comme celles-ci :

Deux points déterminent une droite, deux plans déterminent une droite.

Après avoir expliqué comment une droite peut être regardée comme une ligne fermée et comment, de ce point de vue, deux points d'une droite la partagent en deux segments, dont chacun est entièrement déterminé si l'on se donne un troisième point qui lui appartienne, il expose comment les points d'une droite peuvent être rangés dans un ordre circulaire (ou dans un autre) : les mêmes circonstances se rencontrent dans un faisceau de droites ou dans un faisceau de plans; ces propriétés sont résumées dans le premier axiome (axiome IV) du second groupe; l'axiome V, énoncé pour la droite, consiste en ce que, si un point d'une droite décrit un segment, sa perspective sur une autre droite décrit aussi un segment de cette droite. Sur ces cinq axiomes, on peut observer le principe de dualité; ils suffisent à établir (par la perspective d'une figure de l'espace) la propriété des triangles et des quadrilatères homologiques.

Un groupe harmonique de quatre points sur une droite peut être défini au moyen du quadrilatère complet, deux des quatre points constituant deux sommets opposés, les deux autres étant situés sur les deux droites qui joignent les deux autres couples de sommets opposés. Il est ensuite aisé de montrer que si les points de deux droites (par exemple) se correspondent de manière qu'on puisse passer d'un point d'une droite au point correspondant de l'autre par les opérations de projection et de section, à tout groupe harmonique de la première droite correspond un groupe harmonique de la seconde. Et cette question se pose alors naturellement : s'il y a entre les points de deux droites une correspondance parfaite (uni-univoque) telle qu'à tout groupe harmonique de la première corresponde un groupe harmonique de la seconde, peut-on passer d'un point de la première à un point de la seconde par une suite d'opérations de projection et de section? La réponse à cette question exige un nouvel axiome, l'axiome VI, qu'on peut

appeler l'*axiome de continuité*, et que l'auteur présente d'une façon analogue à celle dont M. Dedekind se sert pour introduire la notion de coupure. Cet axiome permet d'établir la proposition fondamentale :

On peut établir une correspondance homographique entre deux droites (par exemple), telle que trois points de l'une correspondent à trois points de l'autre.

L'établissement de cette proposition, quand on se place au point de vue métrique, n'est si simple que parce qu'elle présuppose (en particulier) toute une théorie du nombre qui est, en réalité, fort compliquée.

M. Enriques, dans quelques mots de préface, qu'il a placés en tête de son Livre, compare avec soin les axiomes qu'il a adoptés à ceux de M. Pasch et de M. Hilbert. Il signale d'ailleurs les travaux où MM. Klein, Lüroth, Zeuthen et Darboux ont éclairé de leur côté les fondements de la Géométrie projective.

Après avoir développé la théorie de l'homographie et de l'involution pour les points en ligne droite et les faisceaux de droites, l'auteur introduit la correspondance homographique entre deux plans ou deux ensembles de plans passant par un point. On remarquera, dans ce Chapitre, comment les propriétés métriques sont ramenées à des propriétés projectives par la considération de l'involution absolue. On observera aussi la façon dont les éléments imaginaires sont à peu près écartés. M. Enriques n'en avait rien dit dans l'édition italienne : ici le mot est prononcé, mais sans qu'aucune théorie soit exposée. Dans une intéressante addition placée à la fin du Volume, il reprend la question au point de vue de la Géométrie analytique, et il semble bien que ce soit là, en effet, que ces éléments s'introduisent naturellement.

La théorie de la collinéation plane amène naturellement à celle de la polarité. Les coniques sont considérées comme le lieu des points situés sur leurs polaires, ou l'enveloppe des droites qui contiennent leurs pôles. La théorie de ces courbes et des cônes du second ordre se développe élégamment en partant de cette définition. Un Chapitre sur la collinéation entre deux espaces termine ces Leçons de Géométrie projective.

L'auteur, tout le long de son Livre, a d'ailleurs traité des pro-

priétés métriques, mais les paragraphes où interviennent ces propriétés sont séparés des autres et distingués par un astérique.

Plusieurs Notes terminent le Volume : elles se rapportent aux groupes de projectivités, à la Géométrie abstraite, aux transformations de l'espace qui changent les sphères en sphères, aux coordonnées projectives, aux éléments imaginaires, à l'histoire du développement de la Géométrie projective. J. T.

BRUNS (H.). — GRUNDLINIEN DES WISSENSCHAFTLICHEN RECHNENS. VIII-159 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

L'Ouvrage de M. le Directeur Bruns, de l'Observatoire de Leipzig, est consacré aux méthodes de Calcul scientifique, c'est-à-dire à l'ensemble des moyens que fournit l'Analyse mathématique pour la détermination des valeurs numériques des fonctions.

L'auteur renvoie à l'Ouvrage de Lüroth, *Vorlesungen über numerisches Rechnen,* pour la technique du Calcul, comprenant les quatre règles de l'Arithmétique, l'emploi des Tables de logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques; il se borne à mentionner les moyens graphiques, règles à calcul, intégraphes et les machines à calculer. En fait, son Ouvrage est un Traité de la Construction et de l'emploi des Tables numériques. Il est divisé en neuf Chapitres.

I. Dans l'exposé du Calcul des différences et du Calcul inverse, Calcul des sommes, l'auteur adopte les notations ordinaires modifiées par la suppression du signe caractéristique de la fonction et l'inscription dans les parenthèses de l'indice du rang de la différence; au lieu de $\varphi_h(a+i\omega)$, il écrit $(a+i\omega.h)$. Il étudie comment varient les différences quand on divise par n l'intervalle des valeurs de la variable, montre combien rapidement croissent les erreurs dans les différences des ordres successifs. S'occupant de l'erreur d'*arrondissement* (Abründung), il propose d'arrondir sur les nombres pairs, dans le cas douteux, c'est-à-dire de remplacer

0,5; 2,5; 4,5; 6,5; 8,5 par 0, 2, 4, 6, 8 et 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5 par 2, 4, 6, 8, 10. L'essentiel est d'adopter une règle afin de faciliter le contrôle dans le cas où un même calcul est fait par deux calculateurs différents. La règle qui consiste à forcer toujours quand on supprime un 5 correspond à cette remarque que l'on force dans les cinq cas où le premier chiffre supprimé est 5, 6, 7, 8, 9 et que l'on ne force pas dans les cinq cas où il est 0, 1, 2, 3, 4.

II. L'interpolation des Tables numériques est l'objet du deuxième Chapitre. L'auteur rappelle que la formule fondamentale, formule de Lagrange, a été donnée d'abord par Waring dans les *Philosophical transactions*, vol. LXIX, 1779, « probleme concerning interpolations ». L'auteur la démontre pour une fonction entière et, pour une fonction quelconque, indique une forme du reste d'où il conclut que, si l'intervalle des arguments est assez petit et que la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction soit finie, la formule limitée aux $n+1$ premiers termes donne autant de précision que l'on veut. Il désigne par J une formule déduite de celle de Lagrange par l'introduction de nombres tirés du Tableau complet des différences et dont le choix laisse une grande indétermination. De cette formule J, en profitant de la latitude que laisse le choix des nombres employés, on déduit sans peine un grand nombre de formules d'interpolation dont les principales sont dues à Newton, à Gauss, à Stirling et à Bessel. Suivent des remarques importantes sur la conduite des calculs et les erreurs à craindre. L'habitude d'arrêter les différences dès qu'elles ne donnent plus un résultat sensible peut, dans certains cas, n'être pas légitime. Ainsi un terme périodique dont l'argument croîtrait d'une période pour chaque intervalle disparaîtrait purement et simplement.

III. Dans le troisième Chapitre sont développées les formules relatives au calcul des valeurs numériques des dérivées premières et secondes, en partant des formules de Stirling et de Bessel. Il s'introduit en diviseur la première et la deuxième puissance de l'intervalle, de sorte que la précision diminue à mesure que l'ordre de la dérivée augmente.

IV. L'inverse se produit pour le calcul des sommes, exposé dans le Chapitre IV en partant encore des mêmes formules. Pour ces sommes, comme pour les dérivées, l'auteur, d'après Encke, détermine les coefficients numériques en partant de l'exponentielle. Il montre aussi sur un exemple comment on peut calculer la valeur d'une fonction satisfaisant à une équation différentielle. Pour le calcul des sommes, deux exemples montrent que la voie numérique peut être plus simple que le calcul par la voie analytique.

V. Il s'agit encore du calcul des quadratures par les méthodes les plus simples que suggère l'évaluation des aires.

VI. Pour la même question : méthode des valeurs moyennes. Sous ce titre sont indiquées les méthodes de Cotes, de Simpson, de Gauss. L'auteur compare les méthodes exposées dans les trois Chapitres IV, V, VI et donne la préférence à la première. Il cite un passage d'Encke (*Berl. Jahrb.*, 1863) d'après lequel Gauss, après avoir fondé sur sa méthode les plus grandes espérances, avait cessé d'en faire emploi.

VII. Le précédent Chapitre se termine par l'intégration d'une fonction périodique en prenant comme point de départ le développement en série trigonométrique. Le calcul même des coefficients de ce développement fournit une application naturelle et importante. On emploie comme arguments les arcs obtenus en divisant la circonférence en parties égales. L'auteur traite du cas où l'on veut, en utilisant les calculs déjà faits, augmenter le nombre des points de division. Les derniers paragraphes sont consacrés à certains développements de Tchebychef et Harzer, au fond desquels M. Bruns reconnaît de véritables développements trigonométriques.

VIII. Le huitième Chapitre est relatif à l'emploi des formules de récurrence linéaires à trois termes.

IX. Le neuvième pose un énoncé général de l'interpolation :

remplacer une fonction donnée par une autre ayant à peu près les mêmes valeurs, mais plus faciles à calculer. A ce propos se présentent la méthode des moindres carrés et celles de Cauchy; d'après l'auteur, cette dernière est rarement employée, parce qu'elle n'est pas indiquée par la théorie des erreurs et que le cas où les écarts sont dus à des erreurs accidentelles se présente bien plus souvent dans la pratique que celui d'une interpolation indépendante de toute considération d'erreurs. Il peut être bon de rappeler à ce propos que Tisserand a montré, pour le cas d'équation à deux inconnues, qu'avec certaines précautions la méthode de Cauchy est, au point de vue des erreurs accidentelles, à peu près équivalente à celle de Gauss.

Cette analyse, qu'il nous a été impossible de faire plus courte, montre la richesse de ce petit Volume de 159 pages et l'importance, pour les applications, des matières qu'il renferme. L'auteur s'est attaché pour chacune des questions traitées à préciser le degré d'approximation que l'on peut atteindre. Ce n'est pas un simple exposé, mais un livre de critique scientifique. Peut-être la multiplicité et la forme des symboles employés en rendent non l'étude, mais la lecture, un peu difficile aux lecteurs français. Beaucoup de ceux qui s'occupent d'Astronomie ou d'une science connexe auront grand profit à en faire une étude approfondie.

B. B.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, Tome II, dernière Partie, 335 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

La dernière Partie du Tome II du *Cours d'Analyse* de M. Goursat contient les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles et les éléments du Calcul des variations. Dans la Préface, jointe au dernier fascicule, M. Goursat dit que ce livre est avant tout un livre d'enseignement, et qu'il n'a cherché dans aucun cas à conduire le lecteur jusqu'aux bornes actuelles de la Science. On y trouvera pourtant une introduction

à bien des théories encore en dehors de l'enseignement ordinaire, comme la théorie des groupes continus et des transformations infinitésimales, les équations linéaires d'après les idées de Fuchs, les équations aux dérivées partielles de Monge-Ampère, les perfectionnements apportés dans le Calcul des variations par Weierstrass et par M. Hilbert. Il est bien inutile de répéter que ce livre sera, pour ceux qui veulent étudier les Mathématiques, un guide judicieux et autorisé, et, pour l'enseignement de l'Analyse, un auxiliaire précieux.

Chapitre XVIII : *Équations différentielles. Méthodes élémentaires d'intégration.* — Ce Chapitre contient, après la formation des équations différentielles, une revue des types classiques d'équations du premier ordre dont l'intégration se ramène à des quadratures, et d'équations d'ordre supérieur dont on peut abaisser l'ordre.

Comme exemple de procédés particuliers d'intégration, l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

où X désigne un polynome du quatrième degré en x et où Y se déduit de X en y remplaçant x par y, est intégrée par deux méthodes : une première fois en l'identifiant avec l'équation de même forme, qui se déduit d'une relation $F(x, y) = 0$ dont le premier membre est un polynome doublement quadratique et symétrique en x et y, une seconde fois par l'application du théorème d'Abel.

Chapitre XIX : *Théorèmes d'existence.* — La méthode à laquelle Cauchy a donné le nom de *calcul des limites* et dont l'idée fondamentale est la conception des fonctions majorantes, est appliquée à un système d'équations du premier ordre

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

puis à un système d'équations aux différentielles totales pour lequel on suppose que les conditions d'intégrabilité sont vérifiées identiquement. Le calcul des limites permet aussi de démontrer

l'existence des intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles. Ceci donne un moyen de compléter la théorie des équations différentielles sur plusieurs points importants, de montrer en particulier qu'il n'existe pas d'autres intégrales que les intégrales holomorphes répondant à des conditions initiales convenablement précisées.

La méthode des approximations successives a été employée avec succès par M. E. Picard pour les équations différentielles et pour un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Elle est appliquée ici aux équations différentielles avec un complément dû à M. E. Lindelöf, puis elle est étendue au cas des variables complexes.

La première méthode de Cauchy pour établir l'existence d'une intégrale est expliquée sur l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction des variables réelles x et y, continue et satisfaisant en outre à une condition dont l'importance a été signalée par M. Lipschitz.

A la suite de ces théorèmes d'existence viennent la définition des intégrales premières d'un système d'équations différentielles d'ordre $(n-1)$

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ désignent des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'abaissement de l'ordre d'un système pour lequel on connaît p intégrales premières, puis la définition du *multiplicateur* d'un système et l'intégration d'un système d'ordre $n-1$ pour lequel on connaît $n-2$ intégrales premières et en plus un multiplicateur.

Le Chapitre se termine par une introduction à la théorie des groupes continus et des transformations infinitésimales. Les formules

$$x' = f(x, y, a), \qquad y' = f(x, y, a),$$

où a désigne un paramètre, définissent une transformation. On dit que les transformations de cet ensemble forment un groupe si la transformation obtenue en effectuant successivement deux trans-

formations de cet ensemble est encore une transformation de l'ensemble. Les groupes ainsi définis, appelés *groupes continus à un paramètre,* seront les seuls groupes considérés ici.

On dit qu'une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

admet un groupe *connu* de transformations à un paramètre si elle est identique à l'équation obtenue en effectuant sur les variables x, y le changement défini par une transformation du groupe considéré.

Si une équation différentielle admet un groupe de transformations, on peut abaisser son ordre d'une unité. De là l'importance de la question : Une équation différentielle étant donnée, reconnaître si elle admet un ou plusieurs groupes de transformations à un paramètre et déterminer ces groupes. C'est pour la solution de cette question que l'on introduit ici les notions de groupe prolongé d'un groupe donné et de transformation infinitésimale et l'on peut ensuite donner un aperçu de la classification des équations différentielles, faite au point de vue de Sophus Lie.

Chapitre XX : *Équations linéaires.* — On considérera seulement les équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions analytiques de la variable indépendante. Les seuls points qui peuvent être des points singuliers d'une telle équation sont les points singuliers des coefficients. Ce premier résultat mis en évidence, on étudie les systèmes fondamentaux, l'abaissement de l'ordre d'une équation linéaire et homogène, puis les équations avec second membre. On insiste sur l'analogie entre les équations linéaires et les équations algébriques et l'on étend aux équations linéaires la théorie du plus grand commun diviseur. L'équation adjointe de Lagrange est présentée comme une extension de la théorie du facteur intégrant.

On examine en particulier les équations linéaires à coefficients constants, les équations linéaires d'Euler qui se ramènent aux précédentes par le changement de variable $x = e^t$, l'équation de Laplace dont les coefficients sont des fonctions du premier

degré de la variable et dont on obtient les intégrales sous forme d'intégrales définies.

Pour les équations précédentes, on a pu exprimer les intégrales à l'aide des fonctions simples déjà connues. Mais il existe une théorie plus profonde des équations différentielles dans laquelle les propriétés des intégrales sont déduites des propriétés de l'équation même qui sert à les définir. A ce point de vue, les équations linéaires ont ce caractère simple que les points singuliers des intégrales sont connus de suite et restent fixes quand on change les valeurs initiales.

L'étude directe des intégrales d'une équation linéaire d'ordre n dans le voisinage d'un point singulier a est faite suivant les idées de Fuchs. On cherche les intégrales telles que, après une circulation autour du point a, chacune d'elles se reproduit multipliée par un facteur constant. La recherche dépend d'une équation algébrique d'ordre n appelée *équation caractéristique;* quand cette équation a ses racines distinctes, on a facilement n intégrales répondant à la question; ces n intégrales forment un système fondamental et leur forme analytique s'obtient immédiatement.

Dans le cas plus compliqué où l'équation caractéristique a des racines multiples, on peut toujours trouver n intégrales formant un système fondamental et se décomposant en un certain nombre de groupes tels que, $y_1, y_2, \ldots, y_p$ désignant les p intégrales d'un groupe, on ait, après une circulation autour du point a,

$$Y_1 = s y_1, \qquad Y_2 = s(y_1 + y_2), \qquad \ldots, \qquad Y_p = s(y_{p-1} + y_p),$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ désignant les fonctions qui proviennent de $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et s une constante. On obtient ensuite la forme analytique propre à mettre en évidence cette loi de permutation.

On peut alors définir les intégrales régulières au sens de Fuchs et donner les conditions pour qu'une équation linéaire ait toutes ses intégrales régulières.

L'application de cette théorie est faite à l'équation de Gauss

$$x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0,$$

à l'équation de Bessel

$$xy'' + (2n+1)y' + xy = 0.$$

et, pour chacune d'elles, le cas où un logarithme se présente dans l'intégrale générale est spécialement considéré.

Étant donnée une équation linéaire à coefficients méromorphes, on peut reconnaître si l'intégrale générale est une fonction méromorphe ou une fonction rationnelle et, dans ce dernier cas, trouver l'intégrale par un calcul d'identification.

Il est très intéressant de rapprocher des théories précédentes les équations de M. Picard : Lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire et homogène, dont les coefficients sont des fonctions elliptiques aux mêmes périodes, est une fonction méromorphe, cette intégrale s'exprime à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

Après ces exemples remarquables d'équations linéaires, on étudie les systèmes d'équations linéaires, en particulier dans le cas des coefficients constants, puis l'équation de Jacobi

$$(ax+by+cz)(y\,dz-z\,dy)+(a_1x+b_1y+c_1z)(z\,dx-x\,dz)$$
$$+(a_2x+b_2y+c_2z)(x\,dy-y\,dx)=0.$$

On donne, pour cette dernière équation, la forme de l'intégrale générale et l'on renvoie sur ce sujet à un Mémoire de M. Darboux, *Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré.*

Chapitre XXI : *Équations différentielles non linéaires.* — La démonstration par laquelle on a prouvé l'existence des fonctions intégrales suppose essentiellement que les seconds membres du système d'équations proposé sont holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales données. On examine dans ce Chapitre, en se bornant à une seule équation, quelques cas simples où cette condition n'est pas remplie.

L'équation différentielle étant écrite

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

le cas où $f(x,y)$ devient infini pour $x=0$, $y=0$, mais de façon que $\frac{1}{f(x,y)}$ soit holomorphe dans le voisinage de ces valeurs, se traite facilement en prenant y comme la variable et x comme la fonction inconnue.

Le cas où $f(x, y)$ devient indéterminé pour $x = 0$, $y = 0$ est beaucoup plus compliqué. On étudie d'abord l'équation considérée par Briot et Bouquet

$$xy' - by = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 + \ldots,$$

on donne quelques indications sur le cas général d'une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + cx^2 + 2dxy + ey^2 + \ldots}{a'x + b'y + c'x^2 + 2d'xy + e'y^2 + \ldots};$$

puis, en se limitant au cas des variables réelles et en prenant l'exemple simple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{a'x + b'y},$$

on explique, d'après un travail de M. H. Poincaré, la définition d'un foyer, d'un centre, d'un nœud et d'un col.

Les points singuliers des intégrales d'une équation non linéaire varient en général avec les valeurs initiales. Pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont deux polynomes entiers en x et y, sans diviseur commun, les seuls points singuliers mobiles des intégrales sont des pôles ou des points critiques algébriques. On indique que Fuchs a formé les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale d'une équation du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, algébrique en y et y', n'admette que des points critiques fixes. M. Poincaré a montré que, quand ces conditions sont remplies, on est ramené à des quadratures ou à des équations de Riccati.

La fin de ce Chapitre est consacrée aux intégrales singulières des équations différentielles du premier ordre. Cette théorie a été étendue par M. Goursat aux systèmes d'équations différentielles du premier ordre. On étudie ici le cas d'un système de deux équations du premier ordre. Ce système est obtenu par l'élimination de deux constantes entre les équations des courbes Γ d'une congruence et d'autres équations qui se déduisent des premières par différentiation. Pour ce système, l'intégrale générale

est donnée par les courbes Γ. Mais on obtient d'autres intégrales en associant les courbes Γ de façon qu'elles aient une enveloppe et en considérant les courbes ainsi obtenues comme enveloppes; ce sont des intégrales singulières du système d'équations différentielles.

Chapitre XXII : *Équations aux dérivées partielles.* — Après l'étude de l'équation linéaire

$$Pp + Qq - R = 0,$$

on considère une congruence

$$U(x, y, z, a, b) = 0, \qquad V(x, y, z, a, b) = 0;$$

les surfaces de cette congruence sont des intégrales d'une équation du premier ordre dont le premier membre se décompose en facteurs linéaires en p et q; la surface focale de la congruence est aussi une intégrale et cette intégrale n'est pas nécessairement comprise dans l'intégrale générale.

Avant de passer aux équations générales du premier ordre, on considère l'équation aux différentielles totales

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$

qui équivaut aux deux relations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Si la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A$$

est vérifiée identiquement, la fonction inconnue peut s'obtenir en intégrant deux équations différentielles ordinaires. Une méthode de Meyer exige l'intégration d'une seule équation; elle consiste à chercher les sections d'une surface intégrale par des plans parallèles à Oz passant par un point x_0, y_0, z_0.

L'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

se ramène à la forme précédente en résolvant par rapport à l'une

des différentielles dx, dy, dz. La condition d'intégrabilité est aussi la condition pour que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ admette un facteur intégrant; on en conclut que la condition d'intégrabilité a une propriété invariante relativement à tout changement de variables. En particulier, si dans l'expression transformée

$$P_1\,du + Q_1\,dv + R_1\,dw,$$

R_1 est identiquement nulle, le rapport $\frac{P_1}{Q_1}$ ne dépend que de u et de v et l'équation $P_1\,du + Q_1\,dv = 0$ est une équation différentielle ordinaire; de là se déduisent de nouvelles méthodes pour intégrer l'équation aux différentielles totales.

En cherchant la condition pour que les deux équations

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

soient compatibles, on a l'occasion d'introduire l'expression analytique appelée *crochet* $[F, \Phi]$, expression qui se présente souvent dans la théorie des équations générales du premier ordre.

Passant alors à l'équation $F(x, y, z, p, q) = 0$, on définit, d'après Lagrange, une intégrale complète, l'intégrale générale et l'intégrale singulière de cette équation. On détermine une intégrale complète par la méthode de Lagrange et Charpit et l'on indique le moyen d'obtenir une surface intégrale passant par une courbe donnée. La méthode des caractéristiques de Cauchy, indépendante de la théorie de l'intégrale complète, est exposée sous forme géométrique. La notion de caractéristique peut d'ailleurs se déduire, d'une façon très naturelle, de la théorie de Lagrange.

Pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier, c'est seulement dans des cas particuliers que l'on sait ramener leur intégration à celle d'un ou de plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires. La première méthode générale d'intégration pour les équations du second ordre est due à Monge; elle a été ensuite étendue par Ampère à des équations d'une forme plus générale que l'on appelle aujourd'hui *équations de Monge-Ampère*. Ces équations sont du type suivant :

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

H, K, L, M, N étant des fonctions de x, y, z, p, q.

On dit qu'une équation du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = C$$

est une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre si toutes les intégrales de l'équation du premier ordre (sauf peut-être les intégrales singulières) satisfont à l'équation du second ordre, quelle que soit la constante C. Il faut pour cela que f satisfasse aux deux équations du premier ordre

$$N\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - L\frac{\partial f}{\partial p} - \lambda_1\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$
$$N\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \lambda_2\frac{\partial f}{\partial p} - H\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

ou à deux équations qui se déduisent des précédentes en permutant λ_1 et λ_2 (λ_1 et λ_2 étant les racines de l'équation du second degré $\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0$).

Pour que l'équation de Monge-Ampère admette une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, il faut que l'un des systèmes précédents possède deux intégrales u et v distinctes, c'est-à-dire telles qu'il n'existe entre u et v aucune relation indépendante de x, y, z, p, q.

On a supposé $N \neq 0$; le cas de $N = 0$ se ramène au précédent.

Chapitre XXIII : *Éléments du calcul des variations.* — Ne pouvant consacrer à ce sujet qu'un petit nombre de pages, M. Goursat se borne à étudier en détail le plus simple des problèmes rattachés au Calcul des variations, pour bien mettre en évidence les difficultés spéciales à ce genre de questions et pour tâcher en même temps de donner une idée de quelques progrès récents de cette théorie. Dans tout ce Chapitre, il n'est question que de variables réelles.

Soit

$$J = \int_0^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

On dit que $y = f(x)$ donne un minimum de l'intégrale J, si

l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

est plus petite que l'intégrale

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx.$$

$\omega(x)$ étant une fonction assujettie seulement à s'annuler pour les limites x_0 et x_1 et à rester, dans l'intervalle d'intégration, inférieure en valeur absolue à un nombre positif ε convenablement choisi. Les fonctions F, f, ω sont supposées remplir des conditions de continuité qui sont précisées avec soin.

On prendra d'abord des fonctions $\omega(x)$ qui dépendent d'un seul paramètre α, en posant $\omega(x) = \alpha\eta(x)$;

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \alpha\eta(x), f'(x) + \alpha\eta'(x)]\, dx$$

doit être minimum pour $\alpha = 0$. Si l'on développe $J(\alpha)$ suivant les puissances de α

$$J(\alpha) = J_0 + \frac{\alpha}{1} J_1 + \frac{\alpha^2}{1.2} J_2 + \ldots,$$

αJ_1, $\alpha^2 J_2$ sont appelées *variations première, seconde,* et se désignent par δJ, $\delta^2 J$, ... Il faut donc

$$\delta J = 0, \qquad \delta^2 J \geq 0.$$

En transformant, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale δJ, on trouve

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx,$$

et l'on obtient comme condition nécessaire l'équation d'Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

Si $y = f(x)$ est une intégrale de cette équation, on dit que la courbe $y = f(x)$ est une *courbe extrémale.*

De même, on mettra la variation seconde sous la forme

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [P\eta_1^2(x) + 2Q\eta_1\eta_1' + R\eta_1'^2]\,dx.$$

P, Q, R désignant ce que deviennent F_{yy}, F'_{yy} et $F_{y'y'}$ quand on y remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$; puis, en introduisant une fonction continue auxiliaire w,

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [(P + w')\eta_1^2 + 2(Q + w)\eta_1 + R\eta_1'^2]\,dx.$$

On détermine w de façon que le trinome en η_1, η_1' soit carré parfait, ce qui donne

$$(Q + w)^2 - R(P + w') = 0,$$

et l'on trouve la *condition de Legendre:* Pour que la seconde variation soit positive ou nulle, quelle que soit $\eta_1(x)$, il faut $R(x) > 0$ dans tout l'intervalle (x_0, x_1).

Si l'on pose, dans l'équation qui sert à déterminer la fonction auxiliaire w,

$$Q + w = -R\frac{u'}{u},$$

on trouve, pour déterminer u, l'équation linéaire

$$u'' - \frac{R'}{R}u' - \frac{Q' - P}{R}u = 0.$$

Pour que w reste continue dans l'intervalle (x_0, x_1), il faut que l'équation en u ait une intégrale qui ne s'annule pas dans le même intervalle. Ceci donne la *condition de Jacobi.* La conclusion de cette première étude est la suivante :

Si les conditions de Legendre et de Jacobi sont remplies, la seconde variation $\delta^2 J$ *est positive pour toutes les formes possibles de* $\eta_1(x)$.

Mais cette première étude a été faite en supposant qu'on donne à la fonction $f(x)$ une variation de forme particulière $\omega(x) = \alpha\eta_1(x)$ et les conditions de Legendre et de Jacobi ne suffisent plus si l'on enlève cette restriction.

On va maintenant établir un système de conditions suffisantes, qui ont d'abord été obtenues par Weierstrass, en adoptant ici la marche suivie par M. Hilbert.

On dit qu'une portion $\mathfrak{D}$ connexe et finie du plan forme un *champ de courbes extrêmales* s'il existe un faisceau de courbes extrêmales tel qu'il passe une courbe du faisceau et une seule par chaque point x, y de $\mathfrak{D}$, le coefficient angulaire de la tangente au point x, y étant une fonction $u(x, y)$ continue et admettant des dérivées continues dans $\mathfrak{D}$. Ainsi, pour l'intégrale $\int \sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{y}$, les courbes extrêmales sont des cercles ayant leur centre sur Ox; ceux de ces cercles ayant leur centre en O forment un faisceau, et la fonction $u(x, y)$ correspondant à ce faisceau est $-\frac{x}{y}$.

On peut, dans un champ de courbes extrêmales, appliquer une formule de M. Hilbert qui joue un rôle essentiel dans cette théorie :

Si $u(x, y)$ est la fonction qui correspond au champ, l'intégrale curviligne

$$\int [F(x, y, u) - u F_u(x, y, u)]\,dx - F'_u(x, y, u)\,dy$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque située dans le champ est égale à zéro.

Soit $\mathcal{G}$ un arc de courbe extrêmale allant de A à B (cet arc appartient à un champ si les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées); soit Γ une courbe quelconque située dans le champ et joignant les points A et B; enfin, soient $J_{\mathcal{G}}$ et J_Γ les valeurs de l'intégrale

$$J = \int F(x, y, y')\,dx$$

prise le long de $\mathcal{G}$, puis de Γ. On déduit de la formule de M. Hilbert, l'égalité

$$J_\Gamma - J_{\mathcal{G}} = \int_\Gamma E(x, y; u, y')\,dx,$$

où

$$E(x, y; u, y') = F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u) F_y(x, y, u),$$

y' étant le coefficient angulaire de la tangente à Γ, tandis que u

est la fonction du champ, et ceci donne les conditions suffisantes cherchées :

La courbe extrémale $\mathcal{G}$ *donne un minimum de l'intégrale* J *si la fonction* $E(x, y; u, p)$ *est positive pour tout point* x, y *du domaine considéré et pour toute valeur finie de* p.

Les conclusions relatives aux diverses conditions examinées plus haut s'énoncent avec précision si l'on introduit les définitions de *minimum faible* et *minimum fort*.

On dit que la courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un minimum faible pour l'intégrale J s'il existe un nombre positif ε tel que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\,dx$$

soit moindre que

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\,dx,$$

pour toutes les formes possibles de $\omega(x)$ assujetties à vérifier les conditions

$$\omega(x_0) = 0, \qquad \omega(x_1) = 0,$$
$$|\omega(x)| < \varepsilon, \quad |\omega'(x)| < \varepsilon \qquad (x_0 < x < x_1).$$

La dernière condition exprime que la variation du coefficient angulaire de la tangente est faible. Si l'on peut enlever cette dernière condition, on dit que $\mathcal{G}_0$ donne un minimum fort pour l'intégrale J.

Cela posé, voici les conclusions principales de l'étude précédente :

Un arc de courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ *pour lequel les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées, fournit au moins un minimum faible pour l'intégrale* J.

Si, de plus, la dérivée seconde $F''_{y'^2}(x, y, p)$ *reste positive pour toute valeur finie de* p *dans un domaine entourant* $\mathcal{G}_0$, *l'arc* $\mathcal{G}_0$ *fournit un minimum fort.*

On examine ensuite le cas où les extrémités de l'arc AB, suivant

lequel on prend l'intégrale J, se déplacent sur des courbes fixes et c'est encore la formule de M. Hilbert qui donne la solution du problème.

Pour l'extension de ces problèmes de variation au cas des intégrales doubles, la question est posée et la solution est poussée jusqu'à l'équation aux dérivées partielles, analogue à l'équation d'Euler relative à une intégrale simple; mais l'auteur indique qu'il faudrait, pour la discussion du minimum de l'intégrale double, des méthodes en dehors du cadre de son Ouvrage.

Comme dans les Parties précédemment parues de ce Livre, de nombreux exercices sont, ou traités en détail, ou simplement proposés à la fin des Chapitres. En particulier, ceux qui sont traités à propos des équations aux dérivées partielles ou du calcul des variations sont heureusement choisis pour éclaircir et pour compléter ces difficiles théories.

E. Lacour.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE;

Par H. LEBESGUE.

Au commencement du cours de calcul intégral on démontre l'existence de fonctions primitives pour les fonctions continues et l'on établit les relations qui lient ces fonctions primitives aux intégrales définies. La méthode universellement adoptée pour cela est celle de Cauchy : l'un des avantages de cette méthode est de préparer les généralisations de l'intégrale qu'ont données Riemann et M. Darboux. Cependant, si l'on se limite dans tout le cours aux

fonctions continues, on peut peut-être la remplacer par la suivante à peine différente, mais qui me paraît plus simple [1].

Remarquons tout d'abord que la fonction $\varphi(x) = mx + n$ admet des fonctions primitives $\frac{m}{2}x^2 + nx + K$. Supposons ensuite que $\varphi(x)$ soit continue dans l'intervalle (a_1, a_p), somme des intervalles (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{p-1}, a_p), et que, dans (a_i, a_{i+1}), φ soit égale à $m_i x + n_i$ [2]; alors φ admet évidemment la fonction primitive Φ égale à

$$\frac{m_1}{2}x^2 + n_1 x - \frac{m_1}{2}a_1^2 - n_1 a_1,$$

dans (a_1, a_2) et égale à

$$\frac{m_i}{2}x^2 - n_i x - \Phi(a_i) - \frac{m_i}{2}a_i^2 - n_i a_i,$$

dans (a_i, a_{i+1}).

Ceci posé, soit $f(x)$ une fonction continue définie dans (a, b). Divisons (a, b) en intervalles partiels $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ en nombre r et que nous pouvons supposer égaux; soit ω_r le maximum de l'oscillation de f dans ces intervalles. La fonction continue $\varphi_r(x)$, égale à $f(x)$ pour les extrémités de ces intervalles partiels et linéaire dans chacun d'eux, diffère donc de f de moins de ω_r.

Désignons par $\Phi_r(x)$ la fonction primitive de $\varphi_r(x)$ construite comme il a été dit précédemment. Je dis que $\Phi_r(x)$ tend uniformément vers une limite $F(x)$ quand r augmente indéfiniment. On

---

(1) Dans son *Cours d'Analyse*, pour simplifier les débuts du Calcul intégral, M. Humbert emploie une méthode due à M. Painlevé et qu'on peut résumer ainsi :

Au lieu d'étudier complètement tout d'abord, comme on le fait ordinairement, les sommes qui conduisent à l'intégrale définie, on n'étudie ces sommes que dans un cas particulier, ce qui suffit pour démontrer l'existence des fonctions primitives; et c'est à l'aide de ces fonctions primitives qu'on achève l'étude des sommes pour le cas général.

La méthode du texte ne diffère de celle de M. Painlevé que par la démonstration de l'existence des fonctions primitives.

(2) Ce qui exige que l'on ait

$$m_i a_{i+1} + n_i = m_{i+1} a_{i+1} + n_{i+1}.$$

a, en effet,

$$|\Phi_{r+p}(x) - \Phi_r(x)| < (b-a)(\omega_r + \omega_{r+p}),$$

comme on peut le voir en appliquant le théorème des accroissements finis à $\Phi_{r+p} - \Phi_r$ considérée de a à x. Cela se vérifierait aussi immédiatement en tenant compte de la forme de $\Phi_{r+p} - \Phi_r$.

Quand r augmente indéfiniment, $\omega_r + \omega_{r+p}$ tend, quel que soit p, vers zéro, donc $\Phi_r(x)$ a une limite continue $F(x)$. De plus, comme on a, soit d'après le théorème des accroissements finis, soit par vérification,

$$\Phi_r(x+h) - \Phi_r(x) = h\psi_r,$$

ψ_r étant un nombre compris entre les limites inférieure et supérieure de φ_r dans $(x, x+h)$; on a aussi

$$(1) \qquad F(x+h) - F(x) = hg,$$

g étant compris entre les limites inférieure et supérieure de f dans $(x, x+h)$.

De cette égalité (1) résulte que F admet f pour dérivée; donc *toute fonction continue admet une fonction primitive.*

De cette égalité (1) nous déduisons aussi, en posant $a_0 = a$, $a_n = b$,

$$(2) \qquad F(b) - F(a) = \sum_1^n F(a_i) - F(a_{i-1}) = \sum_1^n (a_i - a_{i-1}) g_i,$$

g_i représentant un nombre compris entre les limites inférieure et supérieure de f dans (a_{i-1}, a_i). Comparons au second membre de (2) la somme analogue

$$S_n = \sum_1^n (a_i - a_{i-1}) h_i,$$

où h_i est une quantité comprise entre les limites extrêmes de f dans (a_{i-1}, a_i). On a

$$F(b) - F(a) - S_n = \sum_1^n (a_i - a_{i-1})(g_i - h_i).$$

Désignons par ε_n le maximum de l'oscillation de f dans l'un quel-

conque des intervalles (a_{i-1}, a_i) et supposons toutes les différences $a_i - a_{i-1}$ de même signe, on aura

$$|F(b) - F(a) - S_n| \leq \varepsilon_n \left| \sum_1^n (a_i - a_{i-1}) \right| = \varepsilon_n |b - a|.$$

Par suite, si l'on fait augmenter n indéfiniment en choisissant d'une manière quelconque les points de division correspondant à chaque valeur de n, sous la seule condition que le maximum de la longueur des intervalles partiels tende vers zéro, auquel cas il en est de même de ε_n, on a

$$\lim S_n = F(b) - F(a);$$

d'où la notion d'*intégrale définie*.

La méthode que je viens d'indiquer ne diffère pas de celle que j'ai proposée dans mes *Leçons sur l'intégration;* on peut remarquer qu'elle peut être exposée sans l'emploi du théorème des accroissements finis.

Bien que ce théorème soit très simple et très important, sa démonstration rigoureuse étant rarement bien comprise, on peut, dans certains cours, trouver avantage à ne pas le prendre comme base d'une théorie aussi importante que l'intégration, d'autant qu'il peut presque toujours être remplacé par le théorème qu'exprime l'égalité (1) [1].

La démonstration qui précède n'utilise pas non plus les notions de limites inférieure et supérieure, d'oscillation, bien que j'aie employé ces mots pour abréger; elle utilise seulement un théorème sur la continuité uniforme, un théorème sur la convergence uniforme.

---

[1] Le théorème des accroissements finis est aussi employé dans la théorie de l'intégration pour démontrer que toutes les fonctions primitives d'une même fonction ne diffèrent que par une constante; mais il n'y a aucune difficulté à démontrer directement qu'une fonction qui n'est pas constante n'a pas sa dérivée constamment nulle.

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. L. ZORETTI.

J'ai démontré dans ma thèse [1] le théorème suivant :

Étant donnée une fonction analytique uniforme qui dans une aire Δ (*si petite qu'elle soit*) *admet un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire.*

Je voudrais revenir sur la démonstration que j'ai donnée, pour indiquer dans quelle mesure je suis parvenu depuis à la simplifier.

Considérons donc une fonction $w = F(z)$ que nous supposerons continue dans tout le plan et qui n'a comme singularités qu'un ensemble parfait discontinu de points. Je rappelle que la principale difficulté de la démonstration consiste à établir que la fonction inverse, $z(w)$, a une coupure, le sens de ce mot ayant été bien précisé.

Reprenons alors les notations de mon Mémoire : soit une courbe C sur laquelle on puisse prolonger régulièrement une branche de $z(w)$ jusqu'en un point w_1 qui soit un point d'*arrêt* pour cette branche. Il s'agit de déformer C jusqu'à l'appliquer sur une courbe ayant même origine qu'une courbe donnée Γ et se terminant sur la même courbe Γ. J'effectue cette déformation en deux parties, relatives aux portions antérieure et postérieure à un cercle c_1 de centre w_1 et de rayon ε. C'est la deuxième partie de cette déformation qui peut être considérablement simplifiée. On verra en effet dans ma thèse comment on peut, sur chacune des courbes γ avec lesquelles C doit venir successivement coïncider, mettre en évidence un point d'arrêt w_2. Il suffit pour cela d'éviter au moyen d'un petit contour les points singuliers *ordinaires*. Au lieu de procéder alors comme dans ma thèse, nous tracerons un cercle ayant ce point w_2 pour centre et ε pour rayon, nous conti-

[1] *Journal de M. Jordan*, 1905.

nuerons à déformer la portion de γ comprise à l'intérieur de ce cercle, et ainsi de suite.

Si alors nous constituons une ligne λ au moyen de portions des cercles c_1, c_2, ... et de portions de γ, cette ligne comprendra une catégorie de points situés à moins de ε de distance d'un point d'arrêt, et une deuxième pour les points de laquelle ceci n'aura peut-être pas lieu. Mais, et c'est là l'essentiel, λ rencontrera toutes les lignes γ et aura sur chacune des lignes γ un point de la première catégorie. Donc le continu l, limite de λ quand ε tend vers zéro, rencontre aussi toutes les γ. La ligne m qui lui correspond dans le plan des z comprend des lignes régulières et des points singuliers, ceux-ci correspondant aux limites des points de la première catégorie et pour avoir établi le théorème il suffit de montrer que l'ensemble limite des points de première catégorie comprend des portions continues.

C'est ce qui semble évident puisque l rencontre *toutes* les γ et a sur chacune un point limite de points de première catégorie. Mais il convient de remarquer qu'un ensemble discontinu peut très bien avoir des points sur *toutes* les lignes d'une famille donnée, par exemple tous les cercles d'un faisceau ou toutes les droites parallèles à une même direction ; j'ajoute même, si invraisemblable que cela paraisse, sur *toutes les droites du plan*. C'est pour éviter cette difficulté que j'avais été obligé de compliquer à l'extrême la formation de la ligne λ. Mais je me suis aperçu qu'il y avait dans les quelques lignes qui terminent ma démonstration les éléments nécessaires pour lever ce doute. Il suffit, en effet, de remarquer que les *portions continues* qui sur une ligne λ sont formées de points de première catégorie sont en nombre fini, et par suite, quand ε tend vers zéro en prenant une infinité dénombrable de valeurs, ces portions sont en infinité dénombrable. Donc, si leur ensemble limite ne comprenait que des points, il y en aurait un ensemble dénombrable seulement. Donc l'ensemble limite comprend des portions continues et le théorème en résulte.

PRÉPARATION D'UNE ÉDITION COMPLÈTE DES ŒUVRES DE LEIBNIZ.

La Commission chargée par les Académies des Sciences et des Sciences morales et politiques de l'Institut de France de collaborer à la préparation de l'édition inter-académique des Œuvres de Leibniz prie Messieurs les directeurs de Bibliothèques et Messieurs les propriétaires de collections privées de France, Angleterre, Amérique, Pays-Bas, Suisse, Italie, Russie, qui posséderaient des manuscrits de Leibniz ou d'écrits de Leibniz de vouloir bien les lui indiquer.

Adresse : *Comité Leibniz, Institut de France, Paris.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

FISHER (IRVING). — *Kurze Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung (Infinitesimal-Rechnung).* Traduit par U. Pinkus. Gr. in-8°, VI-12 p. avec 11 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 1 m. 80 pf.

FUHRMANN (A.). — *Aufgaben aus der analytischen Mechanik.* (In 2 Tln.) 1. Tl. *Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper.* 3e éd. Gr. in-4°, XII-206 p. avec 34 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 3 m. 60 pf.

GEOMETER-KALENDER, *deutscher, für d. J.* 1905, unter besond. Berücksichtigg. der Bedurfnisse d. preuss. Kollegen, bearb. v. *K. Mühlenhardt.* 4. Jahrg. 2. Tle. In-8°, 135 et 155 p. avec 1 carte. Liebenwerda, Reiss. Relié, 2 m.

JAHRBUCH *uber die Fortschritte der Mathematik*, begründet v. Carl

Ohrtmann. Herausgeg. von Emil Lampe. 33. Bd. Jahrg. 1902. 2. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 8 m.

Lechalas (G.). — *Introduction à la Géométrie générale.* In-16, IX-59 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 75 c.

Martus (H.-C.-E.). — *Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten;* mit Hinzufügg. der Ergebnisse. 3. Tl. 2. Aufl. In-8°, VIII-180 p. Dresden, Koch. Relié, 4 m. 60 pf.

Reusch (J.). — *Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung.* Gr. in-8°, XIII-84 p. avec 104 fig. Leipzig, Teubner. 1 m.

Schlömilch (Osk.). — *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.* 1. Tl. *Aufgaben aus der Differential-Rechnung.* 5. Aufl., bearb. v. E. Naetsch. Gr. in-8°, VIII-372 p. avec 85 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 8 m.

Webster (A.-G.). — *The dynamics of partieles and of rigid, elastic, and fluid bodies.* XII-388 p. avec fig. (*Teubner's (B. G.), Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* XI. Bd. Gr. in-8°). Leipzig, Teubner. Relié, 14 m.

Vallot (H.). — *Instructions pratiques pour l'exécution des triangulations complémentaires en haute montagne.* In-8°, avec fig. Paris, Steinheil. 5 fr.

Boltzmann (L.). — *Leçons sur la théorie des gaz.* Traduites par A. Gallotti et H. Bénard. 2e Partie. In-8°, VII-280 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Starke (H.). — *Experimentelle Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse.* Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. In-8°, XIV-422 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1904.

Abraham (M.). — *Theorie der Elektrizität.* Erster Band : *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität,* von Dr A. Foppl. Zweite vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr *M. Abraham.* In-8°, XVIII-443 p. Leipzig, Teubner, 1904.

Bremer (F.). — *Leitfaden der Physik* für die oberen Klassen der Realanstalten mit besonderer Berücksichtigung von Aufgaben und Laboratoriumsübungen. In-8°, VIII-294 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1904.

J. Sornein. — *Essai sur l'origine et les fondements de la Géométrie* (Extrait des *Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg*). In-8°, 101 p. Cherbourg, Le Maout, 1904.

H. Brun. — *Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie.* In-4°, x-138 p. Berlin, G. Reimer, 1905.

Extrait de la Table des Matières. — I. Von der Summe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n.$$

II. Von der Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots.$$

III. Vom Integral

$$\int f(x, y)\, g(x, y, i)\, d(x + iy)$$

Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der Bestimmten Integrale).

Z.-G. de Galdeano. — *Tratado de Analisis matematico.* Tomo primero. *Calculo diferencial.* In-8°, vii-271 p. Zarägoza, E. Casanal, 1904.

Libro primero : Principios fundamentales de calculo diferencial. Nociones sobre las series. Derivadas y diferenciales. Calculo de las diferencias finitás. Nociones de calculo integral. Libro segundo : Aplicaciones analiticas del calculo diferential. Desarollo en serie, productos infinitos, expresiones indeterminados. Maximos y minimos.

Z.-G. de Galdeano. — *Tratado de Analisis matematico.* Tomo segundo. *Principios generales de la teoria de las funciones.* In-8°, 352 p. Même librairie.

Libro primero : Introduccion a la teoria de las functiones. Libro segundo : Funciones de variables reales. Libro tercero : Series, integrales. Libro cuarto : Desarollo en serie de las funciones sinecticas, funciones algebraicas. Libro quinto : superficie de Riemann, variedades ó espacios.

Mandart (H.). — *Cours de Géométrie analytique à deux dimensions (sections coniques).* In-8°, viii-576 p. Namur, Wesmael-Charlier, 1904. 10 fr.

Extrait de la Table des Matières. — Première Partie : Du point, de la droite et du cercle. Deuxième Partie : Lignes du deuxième degré. Troisième Partie : Théorie générale des coniques. Quatrième Partie : Coordonnées trilinéaires homogènes.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L'ÉVOLUTION ACTUELLE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN ANGLETERRE ET EN ALLEMAGNE.

RIEDLER (A.). — *Zur Frage der Ingenieur-Erziehung*. Berlin, Leonhard Simion, 1895. Preis : 1 Mark.

BRITISH ASSOCIATION MEETING AT GLASGOW, 1901. — *Discussion on the teaching of Mathematics*, edited by Prof. *J. Perry*. London, Macmillan and C°, 1902. Price : 2 shillings.

PERRY (J.). — *Practical Mathematics*. London, Wyman and Sons, 1903. Price : Sixpence.

KLEIN (F.). — *Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen*, mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von *E. Götting* und *F. Klein*. Leipzig, Teubner, 1904. Preis : 1,60 Mark.

RIECKE (E.). — *Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie*, von *O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, J. Stark* und *K. Schwarzschild*. Leipzig, Teubner, 1904. Preis : 2 Mark.

SCHILLING (F.). — *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie*. Leipzig, Teubner, 1904. Preis : 5 Mark.

Verhandlungen der Breslauer Naturforscher-Versammlung über den naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig, Vogel, 1905.

1. Dans tous les pays de civilisation industrielle, il n'est pas de problème plus important, parmi ceux que soulève l'évolution incessante de l'instruction publique, que celui de l'enseignement des Sciences dans ses relations avec la production industrielle. Dans tous ces pays, ce problème est posé à peu près de la même façon, les solutions proposées ont les mêmes caractères essentiels,

les réformes commencées inclinent l'éducation dans une même direction.

Les livres cités plus haut ont été et sont encore des facteurs décisifs dans l'évolution de l'enseignement des Mathématiques en Angleterre et en Allemagne; je me propose de montrer en eux les tendances nouvelles qui caractérisent le mouvement actuel.

2. Jusqu'à présent les Sciences n'ont joué dans les écoles secondaires de tous les pays qu'un rôle subordonné : la forme dominante de la culture secondaire, c'était, c'est encore la culture classique traditionnelle, fondée sur l'étude littéraire de l'antiquité grecque et romaine, avec un faible appoint formé par les Sciences; en Allemagne, même dans les formes les plus modernes de la culture secondaire, où les Sciences ont une part plus importante, les études littéraires ont encore la prééminence, elles ont la charge de donner l'éducation.

Bien plus, dans la position subordonnée qu'elles ont occupée jusqu'à présent, les Sciences n'ont apporté à la formation des esprits aucune contribution originale. Je ne crois pas apprécier inexactement leur enseignement, tel qu'il a été donné jusqu'à présent presque partout, en disant que son but idéal a été le même que celui de l'enseignement littéraire, c'est-à-dire l'assouplissement intellectuel, — son but matériel, l'acquisition de connaissances puisées dans les livres, — sa sanction pratique, le succès aux examens. Ce que les Sciences auraient pu apporter de leur propre fonds à l'œuvre d'éducation : travail dans la réalité, exercice des sens, aptitude à l'observation et à l'expérience, acquisition et exercice de la méthode scientifique, aptitude à la recherche de la vérité objective, l'enseignement scientifique, donné par des méthodes impropres empruntées à l'enseignement littéraire, gêné par les mauvaises conditions matérielles où il est placé, étouffé par la préoccupation des examens, n'a pas réussi à le communiquer d'une manière satisfaisante. On est bien obligé de reconnaître que si les Sciences, par leurs applications industrielles, ont transformé les conditions matérielles de la vie, l'esprit scientifique n'a point pénétré les pensées.

3. Cependant la place et le rôle des Sciences dans l'éducation

changent rapidement. L'école suit, à distance plus ou moins longue, le mouvement du milieu qui l'entoure; or les idées et les faits scientifiques prennent une part de plus en plus grande à la direction de la société moderne dont, en particulier, la forme de production devient industrielle et scientifique. Il en résulte un changement, à la fois idéaliste et utilitaire, dans le concept de culture générale, le déclin de l'éducation classique, l'avènement d'une éducation nouvelle, moderne et scientifique : c'est un fait universel que le centre de gravité de l'enseignement se déplace, et va des Langues anciennes et des Lettres vers les Sciences.

Ce mouvement ne se fait point que dans les idées et l'on peut prévoir que l'éducation future ne restera pas seulement une pure formation des esprits : l'école doit satisfaire aux désirs de sa clientèle, qui commence à lui demander autre chose qu'une culture uniquement intellectuelle. En ce qui concerne l'école secondaire, il intervient ici un facteur capital : consacrée presque exclusivement, autrefois et jusque dans un passé récent encore, à la préparation aux professions n'impliquant pas de production, à l'éducation première des prêtres, magistrats, juristes, médecins, pharmaciens, professeurs, officiers, fonctionnaires, elle a maintenant dans sa clientèle démesurément accrue un nombre de plus en plus grand de jeunes gens se destinant à la production industrielle et agricole, au commerce. Là est la cause de ce qu'on a nommé l'*utilitarisme dans les écoles secondaires* et qui est plutôt le mouvement légitime, inévitable, et j'ajouterai bienfaisant, qui entraîne l'école vers l'utilité présente en l'écartant de ce qui fut l'utilité passée. Quoi qu'il en soit, il semble bien que, dans tous les pays de civilisation industrielle, c'est la conception pratique et active de la Science plus que la conception théorique et critique, qui est actuellement le facteur dirigeant dans l'evolution de l'enseignement.

4. C'est dans les pays de grande industrie que sont l'Angleterre et l'Allemagne que l'influence des considérations utilitaires sur l'enseignement des Sciences s'est tout d'abord manifestée.

Le mouvement a commencé en Allemagne, sans doute parce que c'est le pays où la grande industrie, créée tout récemment sur un terrain neuf et sans obstacles, a pris immédiatement l'organisation

la plus scientifique. Un mouvement parallèle a pris naissance en Angleterre un peu plus tard, lorsque la concurrence des produits *made in Germany* devint inquiétante pour l'industrie anglaise et révéla l'infériorité de son organisation scientifique, l'insuffisance de l'éducation scientifique de ses directeurs.

Dans les deux pays, les préoccupations industrielles appelèrent donc l'attention sur l'éducation des ingénieurs et en conséquence sur la nécessité d'une réforme de l'enseignement élémentaire des Sciences. Dans les deux pays, ce furent des ingénieurs qui ont indiqué à l'école les voies nouvelles où il leur paraissait nécessaire qu'elle s'engageât, qui furent pour elle, dans cette marche vers la réalité, des éclaireurs hardis, violents et, comme il convient, quelque peu aventureux.

En Allemagne, une action des plus efficaces fut exercée par le Verein deutscher Ingenieure, la plus importante association technique allemande, qui compte plus de quinze mille membres :

« Le Verein, nous dit son représentant M. von Borries [1], s'est occupé depuis longtemps des questions d'enseignement, pour ce motif que ses membres ont été des premiers à éprouver l'insuffisance de l'enseignement actuel dans les écoles secondaires. A notre avis, cette insuffisance existe, non seulement dans la préparation aux carrières techniques, mais aussi dans la culture générale. »

Il serait intéressant et instructif de faire l'histoire de la participation du Verein deutscher Ingenieure au mouvement scolaire. Depuis près de vingt ans, il a montré l'intérêt le plus assidu aux choses de l'enseignement, il les a étudiées dans les colonnes de sa *Zeitschrift* et dans ses Congrès annuels; il a soutenu de son argent, de son influence, de ses pétitions aux pouvoirs publics toutes les idées qui sont devenues victorieuses; sa propagande énergique et patiente a été un des plus puissants mobiles des récentes réformes de l'enseignement en Allemagne.

Dans cette action collective, les ingénieurs s'attaquèrent surtout

---

[1] Dans la discussion sur l'enseignement des Sciences dans les écoles secondaires, tenue en septembre 1894 au Congrès de Breslau de la Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

à l'organisation extérieure des écoles secondaires, aux privilèges des Gymnases classiques. Mais, en même temps, des voix isolées poussent leur critique plus à fond et combattent la substance même de l'enseignement, l'*esprit de l'école*. Rien n'est plus intéressant dans ce sens que la brochure *Zur Frage der Ingenieur-Erziehung*, où M. Riedler, professeur à l'École technique supérieure de Charlottenburg, nous donne les idées directrices de ce *mouvement des ingénieurs* et, pour ainsi dire, la philosophie dont il s'inspire.

En Angleterre, le mouvement réformateur fut conduit par M. J. Perry, ingénieur, professeur de Mathématiques et de Mécanique au Royal College of Science, qui agit à la fois par son enseignement dans plusieurs écoles techniques, par ses livres, par ses discours dans des réunions scientifiques ou pédagogiques. Sur son initiative, la British Association tint en 1901, dans son Congrès de Glasgow, cette *Discussion on the teaching of mathematics*, où fut étudiée d'une façon approfondie l'adaptation de l'enseignement des Mathématiques à une meilleure utilisation. Dans son discours d'introduction, M. Perry expose ses vues personnelles, directement inspirées par sa double activité de technicien et de professeur; ensuite viennent les opinions, les critiques, les résultats d'expériences, les désirs de nombreux savants, professeurs ou ingénieurs anglais, qui permettent d'apprécier sous tous ses aspects le mouvement réformateur, et montrent l'attitude que prend à son égard le corps enseignant; après la réplique de M. Perry, le volume se termine par le rapport et les propositions du Comité nommé par la British Association. Le tout est écrit avec ce style précis, cette tournure d'esprit réaliste qui appartiennent au caractère anglo-saxon; on y trouvera les propositions pratiques qui manquent à l'exposé théorique de M. Riedler.

Les ouvrages de MM. Klein, Riecke et Schilling, cités en tête de cet article, nous font connaître le travail qui se fait en Allemagne, dans la partie du corps enseignant (universités et écoles secondaires) qui est sympathique à l'action des ingénieurs, pour s'assimiler celles de leurs idées qui sont actuellement réalisables. Nous retrouvons enfin en Allemagne, sous les auspices de la Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, en son Congrès de Breslau, 1904, une discussion parallèle à la discussion anglaise

sur l'enseignement des Sciences mathématiques, physiques et naturelles dans les écoles secondaires.

L'ensemble de ces publications permet de juger, d'après ses représentants les plus éminents, le mouvement réaliste et utilitaire qui entraîne actuellement l'enseignement des Sciences. Je vais maintenant essayer d'indiquer, d'après ces écrits, les voies nouvelles où les réformateurs s'efforcent d'engager l'école.

5. MM. Riedler et Perry font une critique très vive, railleuse ou violente, des méthodes actuelles d'éducation; à en croire ces ingénieurs, il n'est pas de machine ayant un aussi mauvais rendement que la machine universitaire : « Tout le système d'enseignement et d'examens est absurde.... Il faut réformer cette fabrique de cancres.... Il faut rompre complètement avec l'esprit universitaire, qui détourne de la réalité.... » Voilà ce qu'ils nous disent brutalement, et M. Perry souhaite « qu'un tremblement de terre ou un incendie — un bon incendie — détruise l'amas confus des vieilles échoppes scolaires, pour qu'on puisse reconstruire sur un plan simple et cohérent. »

Beaucoup seront surpris de trouver ces imprécations associées avec une foi très vive en l'efficacité des méthodes scientifiques et en la nécessité d'une éducation très élevée. Il en est pourtant ainsi : MM. Riedler et Perry, ingénieurs, sont des utilitaires; ils affirment que c'est l'utilité qui doit déterminer ce que l'on doit apprendre aux enfants et comment on doit le leur apprendre. Néanmoins ils n'ont pas de l'utilité cette conception naïve et étroite qui est tant combattue, qu'il est si facile de combattre, mais qui n'existe guère que chez ceux qui la combattent. Je crois intéressant de montrer leur position par rapport à la science et à l'éducation, pour rassurer ceux qui voient dans cette action des ingénieurs une menace pour toute culture de l'intelligence et toute pensée scientifique.

M. Perry écrit :

« J'ai la conviction que l'étude des Sciences physiques et par suite des Mathématiques par quiconque, pauvre ou riche, est de la plus grande importance pour notre pays, non seulement pour les connaissances qu'elle fait acquérir, mais pour la diffusion de l'esprit scientifique, pour l'habitude qu'elle donne à chacun de penser

par lui-même; cette étude peut produire le plus grand bonheur et donner la plus grande force à la nation....

« Aujourd'hui, tout le monde doit étudier les Sciences de la nature et, pour cela, il est besoin des travaux des plus grands mathématiciens.... »

M. Perry pense que la poursuite de la connaissance pour elle-même est une des plus nobles occupations, « à cause des formes multiples de son utilité, l'une de ces formes étant le développement de l'intelligence, la communication d'émotions élevées... » et il ajoute :

« Que le mathématicien pur reste fidèle à son idéal; pour moi, le mathématicien pur est grand pour l'aide qu'il m'a donnée dans les œuvres que j'estime importantes. L'homme politique a son idéal, le financier aussi, mais pour moi leur valeur consiste en ce qu'ils ont fait pour m'aider à accomplir des œuvres importantes. Nous devons accepter un grand Édit de Tolérance qui permette à chacun de nous de poursuivre son propre idéal, en empruntant ce qu'il peut à autrui comme aide intellectuelle. »

L'attitude de MM. Riedler et Perry vis-à-vis de l'éducation est de nature à satisfaire les partisans les plus exigeants d'une éducation libérale :

« Le but de toute éducation, écrit M. Riedler, est la formation de l'homme, l'exercice des sens, le développement des facultés naturelles, l'impulsion vers l'activité indépendante. Par illusion ou préjugé, on a attribué jusqu'ici une action bienfaisante à la seule forme dominante de notre éducation secondaire, tandis que la formation de l'homme peut s'obtenir par bien des voies : l'acquisition de connaissances, l'assouplissement de l'intelligence ne peuvent remplacer l'exercice des sens. Dans l'éducation actuelle, l'indépendance, la faculté de réalisation, le *pouvoir* sont insuffisants.

» Pour l'éducation de l'ingénieur, il s'agit non de savoir, mais de pouvoir, non de la seule compréhension, mais de la possession réelle. Il s'agit d'apprendre à voir, à observer, à employer tous les sens; de pouvoir lire, non seulement dans les livres imprimés, mais dans le livre de la nature; d'apprendre à juger, non d'après la compréhension des mots, mais d'après les faits.

Pour l'enseignement mathématique en particulier, voici les bénéfices intellectuels et pratiques que M. Perry désire en obtenir. Son but doit être de donner des émotions élevées, des satisfactions intellectuelles, des modèles logiques de penser, — de donner des outils intellectuels aussi faciles à manier que bras et jambes et qui faciliteront l'étude des Sciences physiques et techniques, — de permettre aux praticiens de compléter leurs connaissances empiriques par une connaissance scientifique, — de donner l'habitude du contrôle personnel et de dégager ainsi les esprits du joug de l'autorité.

« Mais tout cela, ajoute M. Perry, est actuellement négligé et reste inaperçu des enfants; moins d'un centième en retirent ces bénéfices. Entraîner à passer des examens, telle est la seule forme de l'éducation mathématique qui n'ait pas été négligée. »

On voit quelle importance MM. Riedler et Perry attachent aux progrès des Sciences et combien leur idéal d'éducation est élevé; ce qu'ils reprochent à l'enseignement actuel, c'est précisément son caractère antiscientifique et son impuissance :

« Il devient de plus en plus évident, écrit M. Perry, que l'ingénieur a besoin d'une éducation technique scientifique et nous sommes en présence de ce fait angoissant que nos ingénieurs, jeunes et vieux, sont devenus inaptes, de par leur éducation scolaire même, à subir cet entraînement nécessaire. Bien plus, quoiqu'ils sentent profondément, amèrement, leurs besoins, ils repoussent l'idée que les Mathématiques puissent leur être utiles, car ils ont déjà connu à l'école ce que l'on appelait Mathématiques et ces Mathématiques leur ont été vraiment tout à fait inutiles. »

Quelles sont les causes de cet état de choses? quels sont les remèdes à lui apporter? Écoutons MM. Perry et Riedler.

6. Voici d'abord le résumé de leurs critiques, où je regrette de ne pas laisser la couleur et la verve originales.

L'origine du mal, c'est que les Mathématiques sont enseignées comme s'il s'agissait seulement de former des mathématiciens et non pour être employées dans la réalité. Le raisonnement déductif.

qui y est employé presque uniquement, n'est compris et aimé que par un nombre infime d'enfants; encore ceux-ci n'acquièrent-ils le plus souvent qu'un certain chic pour résoudre les questions auxquelles on les a accoutumés et sont incapables de s'en tirer, s'il y a un contenu concret; leur moulin à abstractions se détraque dès qu'on lui donne quelque réalité à moudre; ils arrivent à détester toute application des Mathématiques; — certains prennent l'habitude de raisonner dans le vide, sur des choses qu'ils ne connaissent pas; ils sont tentés d'appliquer le raisonnement mathématique à des idées et des faits plus complexes, et ils ont ainsi l'esprit faussé. A côté de ces initiés, se traîne l'immense troupe des enfants qui ne comprennent pas le raisonnement abstrait; pour eux, l'exposition actuelle des Mathématiques n'est qu'un entassement de subtilités inutiles, elle leur en interdit l'accès, les leur fait détester et leur cause ainsi un dommage irréparable.

Le raisonnement déductif *a priori* donne l'habitude de rester à l'écart de la réalité, de dédaigner l'expérience, d'abuser des exposés théoriques dans les Sciences expérimentales. C'est ainsi que la Mécanique est exposée, en Allemagne et en France, comme une Science déductive et *a priori*; en Angleterre, la situation ne serait guère meilleure d'après M. Perry, qui nous dit que « l'enseignement expérimental de la Mécanique et des Arts de l'ingénieur est relativement inconnu. » L'école s'efforce de tout déduire d'un petit nombre de principes abstraits qu'elle croit plus simples, plus intelligibles que les faits sensibles; pour enseigner à monter en bicyclette, elle commencerait certainement par faire apprendre les principes de la Mécanique.

De plus, la méthode euclidienne, la méthode rigoureusement logique, est infiniment lente; elle limite étroitement le champ que l'on peut parcourir à l'école. Or, ce que l'école admet, c'est précisément la partie de la Science dont les méthodes ont le moins de puissance; ce qui est écarté, ce sont les Mathématiques modernes et leurs parties vivantes et utiles, celles surtout par lesquelles elles prennent contact avec la réalité; le culte de la forme classique des Mathématiques a pour conséquence leur stérilité.

Enfin le grand grief des ingénieurs, le thème fondamental de leurs critiques, c'est que l'enseignement actuel cultive presque exclusivement les facultés de savoir au détriment des facultés de

pouvoir. Telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui, les Sciences s'efforcent de donner, dans un tableau d'ensemble, un résumé de notre connaissance du monde physique. Ce tableau est d'ailleurs bien ordonné : tous les faits scientifiques de quelque importance y sont énumérés, classés dans l'ordre qui convient à une exposition aussi condensée que possible; chaque matière est réduite *à l'essentiel,* comme disent les programmes. Le monde naturel est disséqué avec un art consommé, et les préparations anatomiques ainsi obtenues sont rangées dans des vitrines qu'il suffit, croit-on, de parcourir méthodiquement pour apprendre la Science. Sous la conduite de bons guides, l'étudiant visite ce musée des connaissances humaines et il en retire ce qu'il peut : beaucoup de savoir fugitif et improductif, peu d'acquis durable et efficace; car il ne connaît point vraiment les objets qui sont restés dans la vitrine, il ne les a point retournés, maniés et disséqués, il n'a point vu leurs rapports avec la réalité.

L'enseignement actuel, en se bornant à communiquer le savoir, ou même la compréhension, est incomplet, car il y a un abîme entre comprendre une théorie et se rendre compte de son contenu par l'application à la pratique; on peut comprendre parfaitement le mécanisme d'une bicyclette et être incapable de s'en servir.

Il faut que l'éducation mathématique de celui qui doit s'occuper de Sciences appliquées lui donne plus qu'un savoir, mais bien une possession réelle; il faut qu'il puisse employer les outils mathématiques aussi facilement que ses bras et ses jambes.

Une dernière catégorie de critiques atteint, surtout en Angleterre, le régime des examens. Les examens anglais ont ce caractère qui les rapproche des nôtres, que les juges ne sont jamais les professeurs des candidats et ne connaissent que par l'extérieur l'enseignement qu'il doivent contrôler; ces examens centralisés ont mis les écoles secondaires sous la tutelle des universités d'Oxford et de Cambridge, de quelques grandes commissions, entre autres la Civil Service Commission et la Commission of the Army examinations; ils ont contribué à fixer l'enseignement et ont empêché toute amélioration, toute adaptation aux besoins individuels. Je dirai plus loin quelle fut leur influence sur l'enseignement de la Géométrie.

7. Quelles sont les nouvelles méthodes d'éducation que proposent les ingénieurs?

C'est tout d'abord un principe essentiel de la pédagogie de M. Perry que l'enseignement doit s'adresser à l'élève moyen :

« Il est très important que toute méthode d'enseignement élémentaire ne cause aucun préjudice au petit nombre des enfants qui aiment le raisonnement abstrait, mais il est tout aussi important que l'élève moyen ne soit pas lésé. » Et M. Perry nous avertit qu'il recommande ses méthodes, non seulement pour la préparation des futurs ingénieurs, non seulement pour les élèves des écoles primaires, mais aussi pour les enfants d'intelligence très développée qui forment moins du centième de la population scolaire et pour les rares élèves qui sont destinés à devenir de grands mathématiciens.

Contrairement à un préjugé fort répandu sur l'éducation utilitaire et à une opinion commune sur la forme d'enseignement qui convient aux élèves moyens, c'est une éducation affranchie à l'extrême de tout dogmatisme, mettant surtout en jeu les ressorts individuels que désire M. Perry. Voici comment il fixe l'attitude que doit prendre le professeur vis-à-vis de l'élève :

« Quel que soit l'élève, approchez son intelligence à travers le savoir et l'expérience qu'il a déjà acquis; adoptez son point de vue au lieu de l'obliger à prendre le vôtre; au lieu de l'enseigner, montrez-lui plutôt comment il doit s'enseigner lui-même; montrez-lui comment on apprend par l'expérience, comment on emploie les livres et laissez-le beaucoup à lui-même, sauf pour le suggérer et l'aider sur sa demande. Donnez-lui le plus tôt possible l'occasion d'exercer son individualité. Dites-lui qu'on attend de lui des découvertes; dites-lui non seulement que la loi la mieux établie n'est pas complète, mais que, dans les plus simples choses, ce n'est pas tant ce qui lui est dit par le professeur, mais bien ce qu'il découvre lui-même, qui est pour lui de réelle valeur, qui devient partie intégrante de son mécanisme mental. »

Voici maintenant le principe essentiel qui caractérise la réforme préconisée par M. Perry, celles de ses propositions qui sont le plus originales et le plus hardies et qui ont soulevé le plus d'objections,

car elles marquent une révolution profonde dans la conception classique des Mathématiques. Elles consistent à donner des Mathématiques une exposition surtout expérimentale, basée sur de nombreux travaux pratiques, mesures, calculs, dessins, que l'élève fait lui-même.

Pour l'arithmétique et l'algèbre, l'instrument de l'expérience est le calcul. M. Perry estime que l'on peut sans inconvénient ignorer les démonstrations des formules

$$a(b+c) = ab + ac$$

ou

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

mais il pense que savoir les démontrer n'est rien, si l'on n'en a fait de nombreuses vérifications par le calcul. De même il n'est pas nécessaire de connaître la théorie des logarithmes pour les employer et pour se servir de la règle à calcul, il suffit d'en avoir constaté les propriétés par l'expérience et d'être rompu à leur usage. La mesure des ordonnées et des abscisses d'un cercle, qui peut donner les fonctions circulaires à moins d'un centième près, est plus instructive que la connaissance des méthodes impraticables que l'on enseigne parfois dans les éléments pour le calcul de ces fonctions.

Pour la géométrie, les instruments de l'expérience sont la mesure et le dessin : droites, circonférences, courbes quelconques, angles, aires, volumes de toutes sortes, sont mesurés ou évalués; les instruments de dessin, le planimètre, le papier quadrillé, la balance sont constamment employés à ces mesures ; les théorèmes de la géométrie de situation sont établis par la construction des figures. Le raisonnement déductif n'est pas d'ailleurs absolument exclu quand il est simple, mais il tient une faible place et la géométrie démonstrative ne vient qu'après la géométrie expérimentale, quand les élèves éprouvent le besoin d'assurer leurs connaissances empiriques.

Comparé à l'enseignement habituel des Mathématiques, celui de M. Perry apparaît donc comme une suite de travaux pratiques. A ce titre seulement et en dehors de toute question de préférence, il mérite d'attirer l'attention des professeurs français, en ce moment où l'on essaie d'introduire dans notre enseignement de pareils exercices. Mais il prend un intérêt bien plus grand et devient

d'actualité tout à fait immédiate avec les toutes récentes instructions ministérielles, qui conseillent pour le premier cycle de nos lycées un enseignement mathématique inspiré précisément des principes que je viens d'exposer.

Une autre et très importante partie des vues de M. Perry consiste en l'introduction dans l'enseignement élémentaire de notions sur les fonctions et leur représentation graphique, leurs dérivées et leurs intégrales : le but poursuivi est de mettre aussi tôt que possible l'élève en possession des instruments puissants que donnent les Mathématiques supérieures; le rôle essentiel appartient ici à la représentation graphique sur papier quadrillé qui, appliquée à des phénomènes simples, sert à la fois à montrer les avantages de la notation graphique sur la notation numérique et à enseigner tout ce que le praticien doit connaître des fonctions, de leurs dérivées et de leurs intégrales.

Après ce qui vient d'être dit, il est à peine nécessaire d'ajouter que M. Perry n'attache pas un prix exagéré à la rigueur des démonstrations, qu'il se soucie assez peu de donner une exposition bien enchaînée et sans lacunes des théories mathématiques et qu'il n'hésite pas à sauter purement et simplement, ou à admettre, pour des raisons de confiance ou d'expérience, les propositions dont la démonstration déductive offre de trop grandes difficultés. Son but principal est d'enseigner l'usage pratique des mathématiques; or, de même qu'il n'est pas nécessaire de savoir forger un outil pour s'en servir parfaitement, de même le technicien n'a pas besoin de connaître le mécanisme logique intérieur d'une théorie mathématique pour l'employer avec profit; au reste, s'il en use maladroitement, le contrôle expérimental lui permettra de reconnaître ses bévues et de les éviter à l'avenir. L'important est donc d'établir ce contrôle; d'où l'insistance sur les exercices pratiques qu'il faut pousser jusqu'à la réalisation complète et non pas seulement jusqu'à la solution académique. Les titres de certains livres de M. Perry indiquent d'une façon piquante l'importance qu'il donne à ces travaux pratiques; tels sont par exemple :

Applied Mechanics, traité à l'usage des étudiants qui ont le

temps de faire des essais expérimentaux, des exercices numériques et graphiques pour illustrer leurs études.

The Steam Engine and Gas and Oil Engines, traité à l'usage des étudiants qui ont le temps de faire des expériences et des calculs.

8. On voit que les propositions de M. Perry ne tendent à rien moins qu'à une révolution complète de l'enseignement mathématique. C'est la nature même du raisonnement mathématique qui est en jeu : l'art de raisonner logiquement, qui est habituellement considéré comme le but essentiel de l'éducation mathématique, auquel on sacrifie tous les autres avantages, passe au second plan au profit de l'utilisation pratique.

Les mathématiciens se trouvent en présence du même courant d'idées qui, dans l'enseignement des langues vivantes, a déjà substitué l'apprentissage de la langue pour la parler et la posséder vraiment, à l'apprentissage de la langue pour la culture de l'esprit. Dans les deux cas il y a même substitution, dans le but, de l'utilité pratique à la gymnastique intellectuelle, dans les méthodes, de l'expérience et de l'exercice à la construction *a priori* logique ou grammaticale. Pour prévenir tout malentendu, il est indispensable d'ajouter que, dans les deux cas, les méthodes nouvelles ne négligent pas la culture de l'esprit, mais sont inspirées de la conviction que la connaissance pratique, le contact avec la réalité, sont les conditions premières de cette culture.

On pense bien que les mathématiciens anglais font aux propositions de M. Perry les plus vives objections, qui se présentent d'elles-mêmes à l'esprit des lecteurs de ce Bulletin et qu'il n'est pas nécessaire que je reproduise. Je crois faire œuvre plus utile en recherchant les origines du différend qui sépare théoriciens et praticiens, savants et industriels, différend dont les discussions sur l'enseignement ne sont qu'un incident particulier.

Les savants se plaignent que les industriels les ignorent, les industriels répondent que les savants ne se soucient pas de réalisation pratique et de production. Qui a raison? qui a tort? Il est tout à fait inutile de chercher une réponse à cette question inso-

luble, car les deux groupes d'interlocuteurs paraissent se mouvoir dans deux domaines différents ; pour parvenir à une entente éminemment désirable pour le bien commun de la science et de l'industrie, il vaut mieux comprendre la position et les raisons des deux partis.

Il me semble que les uns et les autres ne considèrent qu'une face de la Science, les savants, avec les universitaires, étant tournés vers la face critique et savoir, les industriels et les ingénieurs vers la face action et production. Les premiers aiment les systèmes bien ordonnés, construits avec art, logiquement impeccables, édifiés sur des principes qui enferment tout un monde dans leur simplicité apparente; trouver le simple dans le complexe, tel est leur but, et il leur arrive parfois de rogner la réalité pour la faire entrer dans leurs cadres. Les derniers regardent beaucoup plus aux résultats qu'aux moyens ; ils n'hésitent pas à employer de grossiers instruments de recherche s'ils permettent d'aboutir; ils n'éprouvent pas le besoin de creuser jusqu'aux grands principes et, avec M. Perry, reprennent volontiers pour leur compte le mot de la comédie anglaise : « Damn your principles, sir »; ils se soucient peu d'erreur logique qui n'entraîne pas d'erreur pratique et dédaignent ce qu'ils nomment la *théorie*. Cette position est d'ailleurs parfaitement justifiable, car le travail dans la réalité est moins soumis aux risques d'erreurs que le travail dans la fiction, la réalité industrielle ayant des sanctions immédiates que la fiction intellectuelle n'exerce point ; la machine si délicate de la logique est d'autant plus difficile à manier qu'elle s'écarte davantage de la réalité et qu'elle en subit moins le contrôle.

Dans l'école, tenue jusqu'à présent à l'écart de la réalité, s'est nécessairement développée la logique la plus abstraite, la plus parfaite; l'école s'efforce d'enseigner le mécanisme qui ne trompe pas ; elle donne à ses élèves des balances sensibles au milligramme, alors qu'ils auront à peser des locomotives; est-il étonnant qu'ils se trompent sur le nombre des tonnes?

M. Perry et les réformateurs qui le suivent pensent que, de même qu'un explorateur n'emporte point des instruments de haute précision pour dresser la carte d'un pays inconnu, de même il n'est point nécessaire, bien plus il est nuisible, d'arrêter les débutants sur les difficultés raffinées d'une étude. Mieux vaut procéder

par les méthodes de la découverte, en se rappelant que la recherche scientifique est caractérisée moins par la rigueur de ses procédés que par le contrôle de ses résultats et que l'on n'acquiert d'ailleurs la conscience parfaite de la rigueur qu'en procédant par approximations successives.

Les naturalistes nous apprennent que l'embryon d'un individu passe en un temps très court par toute la série des formes qu'ont eues ses ancêtres des époques géologiques. Si cette loi se conserve pour le développement des esprits, celui qui veut étudier la Science a avantage à parcourir la progression suivie par l'humanité pour l'édifier.

9. Le programme de réformes que je viens de faire connaître n'est pas resté seulement à l'état de projet. Depuis plus de trente ans, M. Perry a dirigé son enseignement à diverses écoles techniques selon les méthodes qu'il préconise; ses livres sont écrits dans le même esprit. Ses *Practical Mechanics* (1) donnent une exposition expérimentale élémentaire de la Mécanique, pour des lecteurs peu versés dans les Mathématiques. A un point de vue plus élevé sont écrits *The Calculus for Engineers* (2) et *Applied Mechanics* (3), où M. Perry reproduit son cours de calcul différentiel, de calcul intégral et de mécanique aux élèves ingénieurs mécaniciens et électriciens du Finsbury Technical College (4).

M. Perry a été aussi autorisé par le Science and Art Department (à peu près une Direction de l'enseignement technique), à introduire les méthodes nouvelles dans plusieurs cours du soir, où elles eurent un plein succès : « Les élèves peuvent venir une ou deux fois à un cours de mathématiques académiques, nous dit-il, mais ils s'en éloignent ensuite à jamais; un cours de mathématiques pratiques conserve jusqu'à la fin son grand nombre d'auditeurs. » En 1899, M. Perry fit lui-même à un auditoire d'ouvriers six confé-

---

(1) *Practical Mechanics*, Cassel and Cie, London, 2e édition, 1885.

(2) E. Arnold, London, 7e édition. Le compte rendu de la traduction allemande de ce livre a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1902.

(3) Van Nostrand Company, New-York, 1905.

(4) C'est une école technique secondaire ou l'enseignement, à la fois théorique et pratique, se rapproche de celui de nos Écoles d'Arts et Métiers.

rences dont le résumé a été publié sous le titre de *Pratical Mathematics* (1).

Je signale comme particulièrement intéressant le plan d'études que M. Perry, en qualité de membre d'un departmental committee, proposa pour une école normale primaire; ce programme (voir *Discussion on the teaching of mathematics*, p. 25) va jusqu'à l'intégration des équations différentielles les plus simples; ce serait une question importante de discuter s'il n'est pas infiniment préférable à celui qui est enseigné dans nos écoles normales.

Dans ces dernières années, de nombreux livres ont été publiés exposant les Mathématiques élémentaires d'après les nouveaux principes. Les professeurs français les consulteront, je crois, avec profit, pour préparer les transformations que les nouvelles instructions ministérielles prescrivent dans l'enseignement mathématique du premier cycle de nos lycées. Je citerai en particulier (2) :

Trois livres de CASTLE (F.) : *Elementary practical Mathematics. — Practical Mathematics for Beginners. — Workshop Mathematics.* London, Macmillan and C°, 1901, 1902, 1903.

HARRISON (J.) : *Practical plane and solid Geometry for elementary Students.* London, Macmillan and C°, 1903.

HARRISON (J.) and BAXANDALL (G.-A.) (3) : *Practical plane and solid Geometry for advanced Students.* London, Macmillan and C°, 1903.

MORRIS (J.-H.) and HUSBAND (J.) : *Practical plane and solid Geometry.* London, Longmans, Green and C°, 1903.

EGGAR (W.-D.) : *Practical exercises in Geometry.* London, Macmillan and C°, 1903.

DUNCAN (J.) : *Applied Mechanics for Beginners.* London, Macmillan and C°, 1902.

---

(1) Titre complet : J. PERRY, *Practical Mathematics. Summary of six lectures delivered to working men, with certain exercises supposed to be worked after every lecture.* London, Wyman and sons. Price : Sixpence.

(2) Ces renseignements sont empruntés à un article de M. R. Fricke [*Ueber Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1904)], où l'on trouvera des indications sommaires sur le contenu de ces livres.

(3) MM. Castle, Harrison et Baxandall sont attachés au Royal College of Science, où enseigne aussi M. Perry et où son influence s'exerce de la façon la plus immédiate.

En général, les méthodes nouvelles se répandent surtout dans les écoles techniques, dans les écoles qui dépendent du Science and Art Department, où l'influence de M. Perry est considérable, enfin dans les rares écoles qui sont indépendantes du système des examens anglais. Partout ailleurs, on peut dire qu'une partie importante des propositions de M. Perry est adoptée par l'opinion; la discussion du Congrès de Glasgow montre, en effet, que mathématiciens, professeurs de mathématiques et ingénieurs s'accordent pour reconnaître la nécessité de réformer l'enseignement mathématique en le rapprochant de la réalité, en lui donnant, tout au moins au début, un caractère plus expérimental, en y faisant une plus large place au dessin et à la mesure, enfin en diminuant l'autorité accordée jusqu'ici à la Géométrie d'Euclide ([1]). Mais, si les esprits semblent acquis dès à présent à une réforme modérée, il n'en faut pas conclure que cette réforme est faite dans la réalité; le régime anglais des examens, plus néfaste s'il est possible que le nôtre, est le grand obstacle qu'il faut surmonter : « Il semble qu'une condition préliminaire de l'amélioration de l'enseignement est la modification des examens et, là où c'est possible, dans le sens d'une plus grande liberté laissée au professeur ([2]). »

L'histoire de l'influence des examens sur l'enseignement de la géométrie est instructive et mérite d'être contée.

En Angleterre, l'enseignement élémentaire de la géométrie est dominé, bien plus encore que chez nous, par les *Éléments d'Euclide;* le culte euclidien va jusqu'à imposer un ordre consacré, celui attribué au géomètre grec, dans l'enchaînement des théorèmes de géométrie. Les auteurs anglais désignent une proposition géométrique en indiquant le Livre auquel elle appartient et son numéro d'ordre : Euclide, II, 12; on demande aux examens de démontrer le théorème Euclide, III, 35. Il est alors arrivé que les examinateurs, pour leur plus grande commodité, se sont habitués à considérer la géométrie comme un système rigide et en sont venus

---

([1]) Lire dans la *Discussion on the teaching of mathematics* le Rapport du Comité nommé par la British Association et l'adresse qui lui fut envoyée par 53 professeurs des écoles secondaires les plus réputées : Eton, Harrow, Rugby, Winchester, Charterhouse, etc.

([2]) *Discussion on the teaching of mathematics. Report of the Committee,* p. 113.

à croire qu'aucun examen ne serait possible si l'ordre des théorèmes n'était conventionnellement fixé.

Aussi la question de la réforme géométrique fut-elle ainsi posée : composer un manuel de géométrie destiné à remplacer Euclide. Cela fut tenté par l'Association for the Improvement of Geometrical Teaching; mais faire accepter ce manuel était évidemment une tâche impossible, car il ne pouvait lutter contre l'autorité traditionnelle d'Euclide.

On conserva donc encore les *Éléments* avec des palliatifs insignifiants. La Civil Service Commission, tout en maintenant l'ordre euclidien, cessa d'exiger les démonstrations mêmes d'Euclide. La Mathematical Association adopta (1902) la même décision : « En l'absence de tout autre ordre logique autorisé de théorèmes, il n'est pas proposé de contrarier l'ordre euclidien, c'est-à-dire d'employer un ordre de théorèmes rendant inacceptable la démonstration euclidienne d'une proposition quelconque. »

Quelques esprits aventureux émirent l'idée que la géométrie pourrait être enseignée comme l'arithmétique ou la trigonométrie, comme toute autre science, sans l'emploi d'un manuel reconnu; cette proposition dangereuse fut repoussée comme il convient par toutes les commissions compétentes. On ne peut constater sans quelque ironie que, dans la libre Angleterre, c'est précisément pour l'enseignement de la géométrie que l'on se croit obligé de faire appel à une autorité officielle.

10. En Allemagne, le mouvement réformateur, inspiré des mêmes principes qu'en Angleterre, a pourtant de tout autres caractères; il est loin d'avoir abouti à une réalisation aussi complète que dans certaines écoles anglaises, par exemple le Finsbury Technical College, le Royal College of Science.

A côté du chaos des écoles anglaises, sans liens mutuels, indépendantes de l'État, maîtresses d'elles-mêmes dans la mesure où elles savent se soustraire à l'action des examens, parfois capables, par conséquent, d'initiative hardie, l'enseignement allemand forme un ensemble organisé, dont toutes les parties sont solidaires et qui ne peut se déplacer que d'une masse.

L'État a, en Allemagne, le monopole de l'enseignement et le professeur allemand est lié par son programme. Ce programme

est, il est vrai, beaucoup moins détaillé que le nôtre, et ses lignes très souples permettent une large initiative individuelle ; cependant toute réforme importante doit venir d'en haut, et les professeurs qui en sont partisans ne peuvent que la préparer, en inclinant un peu les programmes dans le sens qu'ils désirent, en obtenant l'adhésion de leurs collègues aux idées réformatrices et, enfin, en sollicitant des pouvoirs publics les mesures décisives.

J'ai dit autre part [1] le travail fait à l'intérieur de l'école, dans les marges du programme, pour rapprocher les Mathématiques des applications. Les livres de MM. Klein, Riecke, Schilling, cités en tête de cet article, permettent d'apprécier le travail fait à l'extérieur de l'école pour prolonger le mouvement réformateur et l'amener à sa conclusion.

Ces trois volumes reproduisent les conférences faites à l'Université de Göttingen, à Pâques 1904, dans un Cours de vacances pour les professeurs de Mathématiques et de Physique dans les écoles secondaires.

Cette institution des Cours de vacances mérite tout d'abord de retenir l'attention. Depuis 15 ans qu'elle a été créée en Allemagne, elle s'est développée de plus en plus et maintenant, tous les ans ou tous les deux ans, de pareils Cours se tiennent dans chacune des villes de Berlin, Francfort, Göttingen, Greifswald, Iéna, etc. Les professeurs allemands ont ainsi des occasions fréquentes de compléter et de rajeunir leurs connaissances scientifiques, de se rendre maîtres des nouvelles techniques expérimentales, d'apprendre les nouvelles applications des sciences. A présent moins que jamais, l'éducation du professeur ne peut être considérée comme terminée lorsque commence son exercice de l'enseignement et c'est pour lui une nécessité de se tenir toujours en contact avec la science active; comme il lui devient de plus en plus difficile de continuer son éducation par ses propres moyens, il faut lui fournir des instruments faits à son usage. Ce que l'Allemagne fait pour ses professeurs, par ses Cours de vacances et ses revues techniques de l'enseignement, il faudra bien qu'on le fasse en France par

[1] F. Marotte. *L'enseignement des Sciences mathématiques et physiques dans l'Enseignement secondaire des garçons en Allemagne.* Paris, 1905.

des moyens appropriés; il y a là un champ d'activité où nos Universités pourraient s'engager avec profit.

Les livres de MM. Riecke et Schilling ont précisément pour but de communiquer des connaissances qui pourront servir, directement ou indirectement, dans l'exercice de l'enseignement. Ils continuent l'œuvre commencée par le volume de MM. Klein et Riecke, *Ueber angewandte Mathematik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen*, composé, lui aussi, des conférences de vacances faites en 1900 à Göttingen. Les titres de ces livres sont significatifs et marquent l'intention d'aider à la réalisation effective dans l'école du désir d'application des sciences qui s'est manifesté dans l'opinion publique; il s'agit de montrer aux professeurs dans quelles directions les sciences, qu'ils ont enseignées jusqu'à présent de façon abstraite, viennent au contact de la réalité.

Avec M. Schilling, nous faisons une promenade dans les domaines d'application de la *darstellende Geometrie*, ce qu'il faut entendre, non pas au sens restreint de Géométrie descriptive, mais au sens étendu d'Art des constructions graphiques. Voici, d'après la table des matières, quels sont les sujets étudiés :

Stéréométrie, Géométrie projective et Géométrie analytique. Cinématique pure. Mécanique, surtout la Statique graphique. Physique mathématique. Analyse et Algèbre. Géodésie. Astronomie et Géographie mathématique. Cristallographie. Architecture. Machines. Arts de l'ingénieur. Physiologie et Psychologie. Peinture et Sculpture. Photogrammétrie (1).

Sauf pour la Photogrammétrie, chaque étude est faite d'une façon nécessairement sommaire dans ce livre de 198 pages; mais on y trouvera néanmoins ce qu'il faut pour permettre une première orientation dans chaque sujet et pour apercevoir de façon nette son intérêt pour l'école; des indications bibliographiques nombreuses disent les lectures à faire pour une étude approfondie.

Le livre de M. Riecke, consacré à l'enseignement de la Physique,

---

(1) C'est la science qui permet de déterminer la figure exacte d'un solide, d'[illegible] édifice, d'une forme de terrain, etc., à l'aide de plusieurs perspectives ou, [illegible] la pratique, de plusieurs photographies [illegible] de

contient une exposition élémentaire, faite par M. Riecke lui-même, des conceptions récemment acquises dans les domaines de l'électricité et des radiations; des réflexions de MM. Behrendsen et Stark sur le but, la méthode et le contenu de l'enseignement physique à l'école; la présentation, faite par M. Bose, de l'atelier installé à l'Université de Göttingen pour l'apprentissage manuel des étudiants en Physique; enfin, un article de M. Schwarzschild sur les observations astronomiques que l'on peut faire par des moyens simples. On voit par ce sommaire que les exercices pratiques, les travaux manuels, l'exposition expérimentale sont, en Allemagne comme en France, des questions d'actualité pour l'enseignement de la Physique.

Le livre de M. Klein est d'un caractère différent : il est consacré, non point à l'exposition de questions scientifiques, mais à la recherche du meilleur contenu qu'il convient de donner actuellement à l'enseignement mathématique. Tandis que M. Schilling montre comment peut se réaliser, dans la pratique de l'école, la réforme géométrique déjà inscrite dans les programmes, l'éducation de l'imagination de l'espace par les constructions graphiques, M. Klein prépare la réforme analytique, en étudiant d'une façon approfondie la grosse question de l'introduction, dans les écoles secondaires, des éléments du Calcul différentiel et intégral qui, en Prusse, en sont encore exclus.

Cette exclusion, en même temps qu'elle interdit aux élèves l'accès des Mathématiques modernes, les prive du puissant instrument qu'elles sont pour pénétrer le monde physique; elle paralyse le mouvement des Mathématiques vers les applications. C'est pourquoi ceux qui, en Prusse, poursuivent la rénovation de l'enseignement mathématique, font porter maintenant leur principal effort sur l'introduction dans l'école secondaire de l'étude géométrique de la notion de fonction et des éléments du Calcul différentiel et intégral.

M. Klein expose avec persuasion les raisons qui sont en faveur de cette mesure, où il montre l'aboutissement d'un mouvement commencé depuis longtemps dans les écoles allemandes; par une discussion serrée, il écarte les objections et calme les inquiétudes qu'elle soulève dans une partie du corps enseignant; il explique comment il convient de la réaliser dans la pratique de l'école.

Il faut citer la formule très heureuse dans laquelle M. Klein enferme sa thèse et où il marque la place des idées nouvelles dans l'enseignement futur :

« Il faut, dit-il, *que la notion de fonction, sous sa forme géométrique, pénètre comme un ferment tout le contenu de l'enseignement,* ce qui implique une certaine connaissance de la Géométrie analytique et des éléments du Calcul différentiel et intégral, sous la forme naïve où les ont exposés les grands mathématiciens du XVIIIe siècle. »

J'ajoute que M. Klein, qui connaît très bien nos programmes et nos livres d'enseignement, en tire fréquemment des exemples qui éclairent sa thèse et lui sont un puissant appui; là encore apparaît la solidarité qui unit, pour les questions d'enseignement, les nations de même civilisation.

Il importe de signaler une différence essentielle entre les réformes anglaise et allemande. On a vu qu'en Angleterre c'est le principe même de l'enseignement mathématique, le raisonnement déductif, qui est en jeu; la culture de la logique abstraite, si elle n'est pas absolument négligée, passe au second plan; les Mathématiques deviennent une science expérimentale. Je ne crois pas que ces doctrines de M. Perry aient beaucoup de partisans dans le corps professoral allemand et les réformateurs, pour y faire accepter leurs idées, doivent insister sur ce point que l'éducation logique n'aura pas à souffrir de leurs propositions et restera, après comme avant, une obligation essentielle de l'enseignement mathématique. Voici à cet égard la position de M. Klein, position qu'adopteront sans doute la plupart des mathématiciens :

« Il s'est révélé, depuis 10 ans, dans des cercles étendus, un fort courant antimathématique qui menace la position dont jouissaient depuis longtemps les mathématiques dans la science et dans l'enseignement.... Ce mouvement tire sa force de certaines particularités qui ont souvent affecté la pensée mathématique. Dans le domaine des applications, c'est la mise prématurée en formules mathématiques, faite *a priori*, sans connaissance exacte des conditions de la réalité et qui détourne de l'étude immédiate de la réalité; dans l'enseignement, c'est la considération exclusive de

l'enchaînement logique, ayant pour conséquence la négligence des facteurs psychologiques. *L'enseignement logique est pour les mathématiques ce qu'est le squelette pour un organisme animal, qui ne saurait se tenir sans squelette;* mais ce serait une étrange zoologie que celle qui ne traiterait jamais que du squelette des animaux. Espérons que, dans un temps peu éloigné, la pensée mathématique, dégagée des accidents où elle était impliquée, s'élèvera avec une nouvelle vigueur, selon la force indestructible qui lui est propre. »

Le livre de M. Klein était, en ce qui concerne les Mathématiques, une préparation à la discussion sur l'enseignement des Sciences dans les écoles secondaires, qui se tint en septembre 1904, au Congrès de Breslau de la Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

Il s'agissait, à ce Congrès, de concilier la réforme mathématique projetée, avec les désirs des naturalistes qui demandaient une extension de l'enseignement biologique et surtout son introduction dans les dernières années des écoles secondaires. Il s'agissait d'établir, après entente, un programme de revendications communes, qui serait soutenu devant les pouvoirs publics par tous les groupes intéressés au développement de l'enseignement des sciences : professeurs des Universités et des Écoles secondaires, Sociétés scientifiques, Sociétés techniques.

La discussion (1) du Congrès de Breslau fut surtout une exposition de l'état actuel des choses, un échange de vues, une confrontation des désirs individuels, le tout fait avec ce ton de cordialité qui indique que l'on veut aboutir à une entente; une Commission fut nommée et chargée de préparer, pour le Congrès de 1905, des propositions définitives.

Je viens de recevoir le Rapport de cette Commission pour l'enseignement mathématique (2). Il faut connaître les divers courants

---

(1) Le compte rendu contient les quatre Rapports de MM. K. Fricke, *La situation actuelle de l'enseignement des Sciences dans les écoles secondaires.* — F. Klein, *Remarques sur l'enseignement mathématique et physique.* — Fr. Merkel, *Désirs relatifs à l'enseignement biologique.* — G. Leubuscher, *Réflexions sur l'hygiène à l'école;* enfin, la discussion proprement dite.

(2) *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklas-*

qui se mêlent ou s'opposent en ce moment dans l'enseignement allemand, pour apprécier comme il convient l'habile modération des conclusions et le sage compromis qui rend solidaires toutes les branches de l'enseignement scientifique. Je me borne à dire qu'il en résultera sans doute un nouveau développement des Realgymnases (latin-sciences) au détriment des Gymnases (latin-grec), et que l'on propose de pousser l'enseignement mathématique, même dans les Gymnases, jusqu'au *seuil du Calcul infinitésimal*, toute liberté étant laissée au professeur pour atteindre ce but de la façon la plus convenable. Il faut prévoir que ces conclusions de la Commission de la Gesellschaft deutscher Naturforscher seront prochainement adoptées par les gouvernements allemands.

11. Une conclusion se dégage des pages précédentes. Produit par les mêmes causes, le mouvement scolaire a, dans tous les pays de civilisation industrielle, les mêmes caractères essentiels. Nous voyons se produire sous nos yeux, en France, l'évolution que je viens de décrire pour l'Angleterre et l'Allemagne. Il se trouve que, chez nous, le mouvement réformateur est sorti de l'Université elle-même; c'est peut-être pourquoi nous sommes d'un seul coup arrivés plus avant, tout au moins théoriquement. Les idées nouvelles n'ont pénétré que dans quelques écoles anglaises où elles sont, il est vrai, complètement réalisées, et les réformistes allemands considéreraient comme une victoire d'obtenir ce que donnent ou promettent nos programmes actuels; ce sera l'œuvre de demain de faire passer dans les faits les promesses des programmes.

Les facteurs principaux du mouvement scolaire sont actuellement les facteurs économiques et, en particulier, l'utilitarisme scientifique. Certains craignent que, dans les chemins nouveaux, la valeur éducative de la Science ne soit altérée ou perdue. Leurs alarmes semblent trop vives et leurs craintes fort exagérées. Il n'est pas difficile d'apercevoir que les plus hardis novateurs nous ramènent, par le travail dans la réalité, à la source même de toute pensée scientifique. On peut même prévoir le fait, qui n'est sur-

---

sigen hoheren Lehranstalten (*Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte*, 1905).

prenant qu'en apparence, que l'utilitarisme intelligent donnera à l'enseignement des Sciences l'esprit et la méthode qui lui sont le plus adéquats. F. MAROTTE.

SÉLIWANOFF (DÉMÉTRIUS). — LEHRBUCH DER DIFFERENZENRECHNUNG. VI-92 pages. Teubner, 1904.

Les questions qui se rattachent à la théorie des différences occupent, au moins en France, peu de place dans l'enseignement des Universités. Cependant, en dehors même des applications numériques, il n'est guère possible à quiconque s'occupe de mathématiques, de les ignorer entièrement. M. Démétrius Séliwanoff a pensé qu'un livre court pouvait permettre aux étudiants d'en connaître les principes. Son Ouvrage, écrit dans le style le plus clair, ne saurait être trop recommandé aux mathématiciens et aux étudiants. Que n'est-il écrit en langue française!

L'Ouvrage est divisé en trois Parties dont chacune prépare à la suivante.

La première Partie contient les règles du calcul des différences des fonctions entières et des fonctions trigonométriques, la formule d'interpolation de Newton pour une fonction entière et, dans le cas d'un polynome du quatrième degré, le calcul des dérivées et la division par 10 de l'intervalle des valeurs de la variable; pour une fonction quelconque, la formule de Newton avec la forme de terme complémentaire donnée par Cauchy, l'application au calcul d'une racine d'une équation numérique, des logarithmes et des antilogarithmes, celui des intégrales définies par la méthode des rectangles, des trapèzes et de Simpson.

Dans la deuxième Partie l'auteur s'occupe des sommes, inverses des différences : sommes indéfinies, sommes définies. Un Chapitre est consacré à la formule de Bernoulli; on y trouve l'introduction des nombres de Bernoulli. Un autre Chapitre contient la formule sommatoire d'Euler avec, dans le cas de fonctions quelconques, la

forme du reste de Jacobi et l'indication de l'origine de celle de Poisson. Cette formule d'Euler comporte une généralisation analogue à celle qui fait passer de la formule de Mac Laurin à celle de Taylor. Suivent comme application les développements de $\frac{1}{e^x - 1}$, de cotang x, de tang x suivant les puissances de x; la formule de Stirling et la représentation par une série analogue de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x-1}$$

pour de très grandes valeurs de x.

Les équations aux différences finies font l'objet de la troisième Partie. L'auteur définit la solution générale; il étudie les équations linéaires, homogènes ou à second membre, et en fait application au développement de $\cos xt$ suivant les puissances de $\cos t$, donnant ce très élégant théorème de Tschebischeff que $\frac{\cos xt}{2^{x-1}}$ s'écarte moins de zéro que tout autre polynome de degré x en $\cos t$ ayant pour coefficient du premier terme l'unité. Un dernier Chapitre traite des équations linéaires à coefficients constants dont la théorie est tout à fait analogue à celle des équations différentielles de même sorte. Le théorème de Tschebischeff sur le nombre de divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres termine l'Ouvrage.

M. Séliwanoff insiste scrupuleusement sur les emprunts qu'il a faits au traité de Markoff pour la première Partie, aux écrits d'Imschenetzki et N.-J. Sonin pour la seconde. Disons que c'est avec le sens le plus judicieux qu'il a fait le plan de son Ouvrage et avec un véritable talent d'écrivain qu'il l'a rédigé. Quelques heures suffisent à la lecture de ces 92 pages; elles laissent le lecteur plus instruit et charmé. B. B.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES QUESTIONS CONCERNANT LES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. LELIEUVRE.

Lorsqu'une fonction elliptique $F(u)$, aux périodes 2ω et $2\omega'$, admet en outre une période $\tau = \frac{2p\omega + 2q\omega'}{m}$, p, q et m étant trois entiers que je suppose ramenés préalablement à être premiers entre eux, la décomposition de la fonction en éléments simples est facilitée par la substitution aux périodes initiales 2ω et $2\omega'$ de deux autres périodes dont l'une est congrue à $\tau (\text{mod } 2\omega, 2\omega')$ et dont l'autre est choisie comme il suit : je commence d'abord par observer qu'on peut toujours supposer p et q premiers entre eux [1]; on prendra alors comme première période la quantité τ

---

[1] *Voir* TANNERY et MOLK, *Traité des fonctions elliptiques*, t. IV, p. 207. On peut donner de ce fait la démonstration suivante : p, q et m étant premiers entre eux, s'il n'en est pas ainsi en particulier de p et de q, je dis qu'on peut ajouter à τ une période $2a\omega + 2b\omega'$ telle que dans la somme formée

$$\frac{2(p + am)\omega + 2(q + bm)\omega'}{m},$$

les entiers $p + am$ et $q + bm$ soient premiers entre eux; cela revient, en effet, à dire qu'on peut trouver deux entiers α et β tels que l'on ait, avec un choix convenable de a et de b,

$$(1) \qquad (p + am)\alpha + (q + bm)\beta = 1.$$

Or, soit δ le plus grand commun diviseur à p et à q de sorte que l'on a

$$p = p'\delta, \qquad q = q'\delta,$$

p' et q' étant premiers entre eux; l'équation (1) peut s'écrire

$$\delta(p'\alpha + q'\beta) + m(a\alpha + b\beta) = 1.$$

Mais, puisque δ et m doivent être premiers entre eux, on peut trouver Δ et M

dans laquelle on suppose cette condition remplie: alors, on choisira deux entiers p_1 et q_1 tels que

$$pq_1 - qp_1 = 1,$$

et l'on prendra comme seconde période la quantité

$$\rho = 2p_1\omega + 2q_1\omega'.$$

On aura ainsi les équations suivantes

$$2p\omega + 2q\omega' = m\tau, \qquad 2p_1\omega + 2q_1\omega' = \rho, \qquad pq_1 - qp_1 = 1;$$

d'où il suit que 2ω et $2\omega'$ sont congrus à τ et à ρ : dès lors, dans la décomposition en éléments simples effectuée avec les nouvelles périodes τ et ρ, toute la série de pôles

$$a + \lambda\tau + 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

déduite d'un certain pôle a de $F(u)$ en vertu de l'existence de la période τ, sera congrue au seul pôle a par rapport aux nouvelles périodes τ et ρ.

Comme exemple, indiquons la vérification immédiate de la for-

---

tels que

$$\delta\Delta - mM = 1.$$

Il suffit donc qu'on puisse choisir a, b, α, β de façon que l'on ait

$$(2) \qquad p'\alpha + q'\beta = \Delta, \qquad a\alpha + b\beta = M.$$

La première de ces équations est possible puisque p' et q' sont premiers entre eux; soient u et v deux entiers tels que

$$p'u + q'v = 1;$$

si je prends

$$\alpha = u\Delta - q' \qquad \text{et} \qquad \beta = v\Delta - p',$$

α et β satisferont à l'équation en question, et de plus *ils seront premiers entre eux*, car on aura

$$u\beta - v\alpha = 1;$$

dès lors, il est possible de satisfaire à la seconde équation (2) par un choix convenable des entiers a et b.

mule [1]

$$p(u) + p(u+\tau) + p(u+2\tau) + \ldots + p[u+(m-1)\tau] = A + P(u),$$

$P(u)$ étant la fonction de Weierstrass aux périodes τ et ρ, et A une constante : en effet, tous les pôles du premier membre sont, par rapport aux périodes τ et ρ, congrus au seul pôle double $u = 0$, et le terme principal correspondant est $\frac{1}{u^2}$; on aura la constante A par l'équation

$$\begin{aligned} A &= \lim_{u=0} \{p(u) + p(u+\tau) + \ldots + p[u+(m-1)\tau] - P(u)\} \\ &= p(\tau) + p(2\tau) + \ldots + p[(m-1)\tau]. \end{aligned}$$

La remarque précédente est commode dans certaines questions de géométrie qui se rattachent au problème des polygones de Poncelet. On sait que l'on peut attribuer aux paramètres des sommets d'un polygone de Poncelet de m côtés inscrit dans une conique, les valeurs suivantes

$$p(u), \quad p(u+\tau), \quad \ldots, \quad p[u+(m-1)\tau].$$

Le polynome $F(t)$ qui a pour racines ces m valeurs sera

$$F(t) = [t - p(u)][t - p(u+\tau)]\ldots[t - p[u+(m-1)\tau]].$$

Ce polynome est donc une fonction elliptique à laquelle s'applique la remarque en question : d'ailleurs, tous ses pôles sont congrus au pôle double $u = 0$ par rapport aux nouvelles périodes τ et ρ. Donc on aura

$$F(t) = A + BP(u),$$

A et B étant des polynomes entiers en t, indépendants de u et faciles à déterminer. Ainsi on retrouve immédiatement ce résultat bien connu que $F(t)$, considéré comme fonction de u, est exprimable linéairement au moyen d'une fonction $P(u)$ de cette va-

---

[1] *Loc. cit.*, t. I, p. 224. La formule XXIV est le cas particulier de celle qui est donnée ici, dans l'hypothèse $\tau = \frac{2\omega}{m}$; cette même formule se retrouve Tome III, page 44, par la décomposition en éléments simples, faite avec le parallélogramme 2ω, $2\omega'$.

riable; autrement dit, les sommets des polygones obtenus en faisant varier u forment sur la conique une *involution*.

A ce propos, il est bon d'observer que, d'une involution déterminée sur la conique par l'équation

$$f(t) - \lambda\varphi(t) = 0,$$

on en peut déduire une infinité d'autres de la manière suivante : donnons, au paramètre λ, q valeurs successives $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_q$ et considérons l'ensemble des points déterminés par les valeurs de t qui sont les racines du polynome

$$\Phi(t) = [f(t) - \lambda_1\varphi(t)][f(t) - \lambda_2\varphi(t)]\ldots[f(t) - \lambda_q\varphi(t)].$$

Supposons maintenant que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont eux-mêmes racines d'une équation linéaire par rapport à un paramètre μ, de sorte que l'on ait

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_q) = M(\lambda) + \mu N(\lambda);$$

il est clair que $\Phi(t)$ dépendra en même temps linéairement de μ puisqu'on retrouve $\Phi(t)$ en remplaçant λ par $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ dans les deux membres de l'égalité précédente et en chassant les dénominateurs.

Ceci arrive notamment pour la configuration formée des q polygones de Poncelet de m côtés considérés ci-dessus, que l'on obtient en donnant à u, q valeurs

$$u, \quad u + \alpha, \quad u + 2\alpha, \quad \ldots, \quad u + (q - 1)\alpha,$$

α étant un $q^{\text{ième}}$ de période de $P(u)$; telle est, par exemple, la configuration formée des m^2 points déduits de l'expression rationnelle de $\mathfrak{p}(mu)$ en fonction de $\mathfrak{p}(u)$; si je pose

$$\mathfrak{p}(u) = t, \qquad \mathfrak{p}(mu) = \lambda,$$

les m^2 points sont déterminés par l'équation involutive de degré m^2

$$f(t) - \lambda\varphi(t) = 0;$$

ces points sont les m^2 sommets de m polygones de Poncelet de m côtés définis en donnant à u les valeurs successives

$$u, \quad u - \frac{2\omega'}{m}, \quad u + \frac{4\omega'}{m}, \quad \ldots, \quad u + \frac{2(m-1)\omega'}{m}$$

dans la suite

$$\mathrm{p}(u), \quad \mathrm{p}\left(u + \frac{2\omega}{m}\right), \quad \ldots, \quad \mathrm{p}\left[u + \frac{2(m-1)\omega}{m}\right].$$

Un autre exemple intéressant de pareilles configurations est celui des six points déterminés rationnellement sur une conique par les six rapports anharmoniques de quatre quantités, à savoir

$$x, \quad 1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x}, \quad 1-\frac{1}{x}, \quad \frac{x}{x-1}.$$

Si l'on pose

$$x = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tang} u = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - u\right)}{\cos u},$$

les trois rapports x, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x-1}{x}$ s'obtiendront avec les valeurs u, $u + \frac{\pi}{3}$, $u - \frac{2\pi}{3}$ du paramètre : ils seront les racines de l'équation obtenue en éliminant u entre l'égalité précédente et l'équation

$$\operatorname{tang} 3u = \lambda;$$

en changeant le signe de u, et par suite celui de λ, on obtiendra les trois autres rapports; donc, les six quantités seront racines d'une équation linéaire par rapport au paramètre λ^2 : elles sont aussi les paramètres des sommets de deux triangles inscrits dans la conique et tous deux circonscrits à une seule et même conique.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CHARLES HERMITE (ŒUVRES DE), PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par *Émile Picard*, membre de l'Institut, tome I, in-8°, XL-498 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Quand Hermite mourut, le 14 janvier 1901, les géomètres de tous les pays consacrèrent à son œuvre et à sa mémoire des articles étendus dans lesquels ils se plurent à rappeler ses belles et importantes découvertes, l'influence si profonde et si heureuse qu'il avait eue sur le développement et la tendance des recherches mathématiques au cours du siècle qui vient de finir. Plusieurs d'entre eux, et des plus autorisés, firent remarquer que cette influence était loin d'être épuisée et ils exprimèrent le vœu que l'on fît pour Hermite ce qui a été déjà réalisé pour plusieurs des grands géomètres du XIXe siècle, en réunissant tous ses Mémoires dans une publication d'ensemble où pourraient apparaître dans toute leur élégance et dans toute leur profondeur les idées directrices qui ont inspiré tous les travaux du grand analyste. M. Émile Picard, dans une pensée d'affection presque filiale, s'est préoccupé de répondre à ce désir si légitime. Sous les auspices et avec les encouragements de l'Académie des Sciences, il nous donne aujourd'hui le premier volume des Œuvres complètes de Charles Hermite. Certaines difficultés aujourd'hui levées ont retardé notablement l'apparition de ce volume. Les autres paraîtront dans un avenir rapproché et nous sommes assurés d'avoir bientôt un ensemble dans lequel revivra le génie du grand analyste que fut Hermite.

Quand M. Émile Picard succéda à Hermite dans la chaire d'Algèbre supérieure de la Sorbonne, qui est devenue aujourd'hui la chaire d'Algèbre et d'Analyse supérieure, il eut l'idée de consacrer le premier de ses cours à un exposé rapide et à une analyse détaillée des travaux d'Hermite. Il serait bien à désirer

que le cours tout entier fût publié; nous en avons eu du moins le résumé et la première leçon dans une belle Notice que M. Picard a imprimée dans les *Annales de l'École Normale* et qu'il a reproduite en tête de la nouvelle publication. C'est ce que l'on pouvait désirer de mieux comme introduction aux Œuvres d'Hermite. Ajoutons que M. Picard a eu la bonne idée de reproduire en tête du volume un charmant portrait au crayon d'Hermite à l'âge de 25 ans; tous les élèves et tous les amis que le grand géomètre comptait dans tous les pays où les Mathématiques sont cultivées seront heureux de le posséder.

Les Mémoires qui sont rassemblés dans ce premier volume s'étendent de 1842 à 1858. Le premier, qui traite du lieu géométrique des pôles d'une section conique par rapport à un autre, est un simple travail d'écolier; mais le second, intitulé *Considérations générales sur la résolution de l'équation algébrique du cinquième degré*, publié alors qu'Hermite était élève de M. Richard dans la classe de Mathématiques spéciales de Louis-le-Grand, est déjà une œuvre de valeur : « On y reconnaît, nous dit M. Picard, un lecteur assidu de Lagrange qui a beaucoup réfléchi sur la théorie des équations. L'objet de ce travail est de démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations du cinquième degré; la démonstration très simple qu'on y trouve pourrait, après de légères additions, devenir classique. » Puis viennent la célèbre lettre à Jacobi et les travaux sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques, qui datent du temps où Hermite était élève à l'École Polytechnique, la lettre à Jacobi sur les fonctions Θ et surtout les quatre admirables lettres sur la théorie des nombres écrites à Jacobi de 1847 à 1849 et qui contiennent, on peut le dire, le programme et le germe de tous les travaux qui ont suivi. Il faudrait citer ici tous les Mémoires qu'Hermite a publiés dans cette période féconde de sa jeunesse, ses écrits sur la théorie des formes quadratiques, sur l'application de cette théorie à la démonstration des théorèmes de Sturm et de Cauchy, les travaux dans lesquels il prend part à la création de l'Algèbre moderne et au développement de la théorie des formes de degré supérieur. Puis Hermite, revenant à ses premières études, publie ce beau Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes qui demeure une de ses œuvres les plus parfaites et les plus fécondes. C'est avec ce

Mémoire et avec quelques travaux sur la transformation des fonctions elliptiques que se clôt ce premier volume dont il est certes bien inutile de signaler toute l'importance à nos lecteurs.

Suivant son constant usage, l'éditeur, M. Gauthier-Villars, a donné tous ses soins à la publication. Aidé par un géomètre distingué, M. X. Stouff, enlevé il y a deux ans par une mort prématurée, M. Picard s'est attaché à la rendre aussi correcte que possible. Les calculs ont été refaits, les fautes d'impression ont été corrigées. Quelques remarques amenées par cette revision ont été ajoutées par M. Picard et seront très utiles au lecteur.

G. D.

BACHMANN (P.). — ZAHLENTHEORIE. VERSUCH EINER GESAMMTDARSTELLUNG DIESER WISSENSCHAFT IN IHREN HAUPTHEILEN. Fünfter Theil : ALLGEMEINE ARITHMETIK DER ZAHLENKORPER. 1 vol. in-8°, XXII-548 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

C'est un véritable monument à la théorie des nombres qu'aura élevé M. Bachmann ; l'une des parties, celle qui concerne les formes quadratiques, est encore inachevée : celle-ci, qui contient la théorie générale des corps numériques, attend une suite, où l'auteur traitera des corps numériques spéciaux. Dans cette longue tâche, l'auteur est soutenu par un enthousiasme qui se communiquera sans doute au lecteur : il se manifeste surtout dans ces digressions historiques, ces regards jetés en arrière sur le développement d'une théorie, qu'on a tant de plaisir à rencontrer dans un livre de haute Science et qui reposent en instruisant; il perce encore dans la modestie de la Préface, où l'auteur souhaite d'avoir écrit un livre assez facile pour faire goûter à beaucoup de lecteurs la beauté de ces développements abstraits où l'on voit se constituer peu à peu les lois de la théorie des entiers algébriques, devenues, sous leur forme dernière, aussi simples que celles qui concernent les nombres entiers : cette admirable simplicité est le résultat du

génie et des efforts persévérants de Gauss, de Kummer, de MM. Dedekind et de Kronecker.

Je crois bien, par les Chapitres que j'ai étudiés, que M. Bachmann est parvenu à cette facilité qu'il souhaite, et, à coup sûr, elle n'était pas aisée à atteindre. J'ai déjà dit qu'il n'est à peu près pas question de corps spéciaux dans son livre. Sauf dans un court Chapitre consacré aux corps quadratiques, et dans l'avant-dernier Chapitre, relatif aux corps de Galois, les théories se développent en laissant aux corps numériques leur entière généralité. Cette généralité même, où se tient M. Bachmann, ces propositions qui ne sont point soutenues par des exemples, cette absence de *faits* sont capables d'effrayer d'abord le débutant, habitué aux énoncés concrets de la théorie des nombres, dans sa partie élémentaire; il ne manquera pas de se rassurer par la clarté et la simplicité de l'exposition et se réjouira de respirer sans peine dans ces régions élevées où le guide M. Bachmann.

A part le dernier Chapitre consacré à des idées nouvelles que l'on doit à M. Hensel, et où la théorie des nombres algébriques se trouve rapprochée, au moins par le formalisme, de la théorie des fonctions analytiques, c'est la doctrine de M. Dedekind qui domine tout le livre de M. Bachmann et c'est avec justice que ce livre est dédié à l'illustre arithméticien. Les premiers Chapitres préparent cette théorie des *modules* et des *idéaux,* dont M. Dedekind, il y a bientôt trente ans, a exposé les fondements ici même (1) et dont le développement occupe le reste de l'Ouvrage. M. Bachmann, par crainte de trop grossir son livre, a reculé devant l'exposition parallèle de la doctrine de Kronecker (2). Il a toutefois profité des importants résultats obtenus par M. Hensel dans cette doctrine.

Pour le Chapitre sur les corps de Galois, M. Bachmann signale le parti qu'il a tiré du beau rapport de M. D. Hilbert sur la théorie des corps numériques algébriques (3).

---

(1) *Introduction,* t. XI de la première série (1876), p. 278; *Sections* I, II, III, IV; t. I de la seconde série (1877), p. 17, 69, 144, 207.

(2) Le *Bulletin* a rendu compte du Livre de M. J. Konig (*Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (t. XXVII, p. 356), où l'inspiration de Kronecker est directe, et du *Handbuch der Algebra* de M. H. Weber (t. XXI, p. 93), où les deux doctrines sont comparées.

(3) *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung* (1894-1895).

Nous ne pouvons que nous associer aux souhaits de M. Bachmann pour la diffusion des théories qu'il a exposées avec tant de soin et de talent. Leur beauté fait penser à ce paradis qu'imagine M. Poincaré, récompense lointaine et désirable de nos efforts vers la vérité : cette vérité, l'humanité future, débarrassée de la souffrance et des soucis matériels par le progrès des applications, mettra son bonheur à la contempler.

Parmi les élus, il y aura bien quelques algébristes : garderont-ils quelque pitié reconnaissante pour ceux de leurs ancêtres qui, pendant de longs siècles, se seront attachés aux applications pratiques, afin de leur préparer ces loisirs, dont ils jouiront en s'enivrant du Nombre pur? J. T.

PICARD (Ém.). — La Science moderne et son état actuel. 1 vol. in-12, 299 pages. Paris, Flammarion, 1905.

Nous ne pouvons que signaler ce Livre où M. Émile Picard a décrit, d'une façon magistrale, l'état actuel des Sciences, de la Mathématique à la Bactériologie; on ne sait trop ce qu'il y faut admirer davantage, la clarté et la précision de la langue, la richesse de l'information, la largeur et la hardiesse d'un esprit qui ne recule devant aucune conception scientifique, ou le sens profond de la réalité : on avait d'ailleurs admiré déjà ces qualités dans le Rapport général sur les progrès récents des Sciences dont M. Picard avait été chargé à l'occasion de l'Exposition universelle de 1900. Une pointe d'humour, qui perce de temps en temps, ne gâte rien. J. T.

ROUSE BALL (W.-W.). — Histoire des Mathématiques. Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par *L. Freund*. Tome I : Les Mathématiques dans l'antiquité. Les Mathématiques au moyen âge et pendant la renaissance. Les Mathématiques modernes de Descartes à Huygens. Notes complémentaires. 1 vol. in-8°, VII-422 pages. Paris, Hermann, 1906.

Il faut remercier M. L. Freund de cette traduction élégante qu'il nous donne de l'*Histoire des Mathématiques*, de M. Rouse Ball: la lecture en est singulièrement attachante et instructive. En éditant ce livre, M. Hermann a rendu un service de plus à la Science et à l'Enseignement. J. T.

GANS (R.). — Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 1 vol. in-8°, X-91 pages, 31 figures. Leipzig, Teubner, 1905.

JAHNKE (E.). — Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. 1 vol. in-8°, XII-235 pages, 30 figures. Leipzig, Teubner, 1905.

La publication, dans la même année, de ces deux Livres, qui suivent d'assez près ceux de M. Föppl (*Einführung in die Maxwellsche Theorie der Electricität*, 1894), de MM. Gibbs et Wilson (*Vectoranalysis*, 1901), de M. Bucherer (*Elemente der Vectoranalysis*, 1903), répond évidemment à des besoins qui se manifestent de plus en plus. D'une part, on s'accorde à reconnaître que les notions fondamentales et les propositions élémentaires de l'Analyse vectorielle doivent pénétrer dans les éléments, en raison des simplifications qu'elles apportent dans l'étude de certaines parties de la Géométrie, de la Mécanique, de la Physique; c'est une question qui intéresse seulement la pédagogie et le côté

esthétique de l'enseignement que de savoir si elles doivent être présentées en elles-mêmes, dans toute leur pureté, ou s'il convient de les mêler à la vieille Géométrie analytique. D'autre part, les mêmes bénéfices de simplification se retrouvent dans les parties élevées des diverses Sciences qu'on vient d'énumérer [1], et quelques-uns des plus éminents parmi les physiciens modernes font un usage courant de l'Analyse vectorielle. Je ne parle pas de Maxwell, qui appartient à l'histoire, je rappelais tout à l'heure le nom de Gibbs, qui consacrait à cette Analyse une partie de son enseignement; il suffira d'ajouter à ces noms illustres celui de M. Lorentz.

Le Livre de M. R. Gans a été écrit en vue des applications de la théorie des vecteurs à la Physique. Il se compose de quatre Chapitres : les trois premiers contiennent déjà quelques applications à la Mécanique et à la Physique; mais ils se rapportent essentiellement à la théorie mathématique des vecteurs.

Après avoir défini le *champ scalaire* et le *champ vectoriel*, après avoir montré comment on peut représenter le premier par un système de surfaces de niveau, le second par un système de lignes courbes, l'auteur expose les opérations élémentaires : somme, produit scalaire (intérieur), vectoriel (extérieur) de deux vecteurs. Comme applications, nous rencontrons le moment d'une force, la courbure d'une ligne, la première loi de Kepler, le mouvement d'un point électrisé dans un champ magnétique constant.

Le second Chapitre se rapporte aux opérations différentielles ou intégrales sur les vecteurs. On y trouvera tout d'abord la notion du gradient (ou vecteur potentiel), de ce vecteur dont les composantes suivant les axes (rectangulaires) sont

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z},$$

en désignant par U une fonction scalaire des variables x, y, z; puis la notion de la *divergence* d'un vecteur, c'est-à-dire de la

---

[1] Est-il utile de rappeler la large part qu'ont faite à l'Analyse vectorielle M. Appell dans le troisième Volume de son *Traité de Mécanique*, M. Weber dans ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique?*

quantité scalaire

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

où X, Y, Z désignent les composantes du vecteur, que l'on suppose appartenir à un champ, celui de la *rotation* (*curl, tourbillon*), c'est-à-dire du vecteur dont les composantes sont

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y};$$

la divergence est rattachée à la transformation (Gauss) en intégrale de surface de l'intégrale de volume

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dS;$$

le tourbillon est rattaché à l'intégrale de Stokes. La signification vectorielle de ces diverses quantités est nettement mise en évidence, et la forme très simple, dans la notation vectorielle, que prennent leurs propriétés, montre les avantages de cette notation. Un paragraphe particulièrement important pour les applications à l'électricité concerne les discontinuités qui peuvent se produire quand on traverse une surface.

Le troisième Chapitre est intitulé : *Coordonnées curvilignes; décompositions des vecteurs; déformations mécaniques.* Les coordonnées curvilignes sont supposées orthogonales. Les opérations et les éléments dont il a été question plus haut sont traduits dans un système quelconque de telles coordonnées : l'expression de Δu en coordonnées polaires conduit immédiatement aux solutions particulières des équations $\Delta u = 0$, $\Delta u + k^2 U = 0$ qui ne dépendent que de r. M. Gans montre ensuite comment, étant données la divergence et la rotation d'un vecteur, on peut déterminer ce vecteur.

Les applications concernent l'Hydrodynamique et l'Électrodynamique. C'est, d'abord, les équations fondamentales de l'Hydrodynamique (Euler) et les théorèmes d'Helmholtz sur les vortex. On remarquera la façon dont l'auteur établit les équations de Maxwell, la déduction de leurs trois intégrales, leur extension, d'après Hertz, aux milieux en mouvement, ... Les dernières

pages sont consacrées à la théorie des électrons, d'après M. Lorentz.

Le lecteur trouvera, dans le Livre de M. Gans, une matière très riche, traitée d'une façon brève et élégante.

Le Livre de M. Jahnke est moins bref que celui de M. Gans, et d'une nature plus élémentaire. Il reproduit des leçons qui ont été faites dans une école technique; il garde, pour ainsi dire, le ton de l'enseignement; d'ailleurs, le caractère pédagogique s'accuse par la multiplicité des exemples et des exercices qui suivent chaque leçon. L'auteur ne s'adresse plus seulement à des étudiants qui ont hâte d'apprendre, de l'Analyse vectorielle, ce qui leur est nécessaire pour étudier les travaux récents des physiciens, mais à des auditeurs qu'il faut mener graduellement, auxquels on veut faire admirer la puissance de la méthode par la multiplicité de ses applications, et dont on veut accroître les connaissances dans des domaines divers. M. Jahnke, d'ailleurs, ne se borne pas à la pure Analyse vectorielle : il lui donne comme point de départ quelques notions empruntées au *Calcul barycentrique* et prend soin de relier, d'enchaîner les divers concepts qu'il introduit. J'ajoute qu'il se montre aussi fidèle que possible aux idées de Grassmann.

Son Livre est divisé en deux parties : l'une est consacrée à la Géométrie plane, l'autre à la Géométrie dans l'espace : cette distinction se justifie par la différence que comportent certaines opérations, suivant qu'on est dans un cas ou dans l'autre : par exemple, le produit extérieur de deux vecteurs, dans le plan, peut être regardé comme un nombre; dans l'espace, c'est un vecteur ou, à un autre point de vue, un bivecteur.

Le point de départ de M. Jahnke est dans la considération de la somme de deux points, dont chacun est affecté d'un coefficient numérique (d'une masse, si l'on veut); le vecteur *libre* (*freie Vector*), qu'on regarde comme identique à tous les vecteurs équipollents, apparaît alors comme la différence de deux points. Le vecteur *contraint* (*gebundene Vector*), qui ne peut que glisser sur sa ligne d'action, apparaît, au sens de Grassmann, comme le *produit* de deux points; signalons la façon dont l'auteur relie la multiplication extérieure à la multiplication intérieure en introduisant le complément (*Erganzung*) d'un vecteur : à savoir le

vecteur qu'on a fait tourner dans son plan de l'angle $+\frac{\pi}{2}$: le produit intérieur de deux vecteurs A, B est alors le produit extérieur de l'un par le complément de l'autre. Un Chapitre est consacré à diverses applications qui concernent la Mécanique, l'Optique et l'Électricité. Cette première partie se termine par la définition de la multiplication régressive et diverses applications intéressantes.

Dans la seconde partie, l'auteur reprend la théorie de la multiplication : si l'on désigne par e_1, e_2, e_3 trois vecteurs égaux à l'unité portés par les arêtes d'un trièdre trirectangle, le complément du vecteur e_1 est alors le produit extérieur des vecteurs e_2, e_3, et cette définition conduit aisément à celle du complément d'un vecteur quelconque. La considération du complément d'un vecteur relie encore les définitions du produit intérieur et du produit extérieur.

Trois Chapitres successifs sont consacrés aux applications à la Géométrie analytique, à la Statique et à la Cinématique. Un Chapitre, consacré à la multiplication régressive, contient de belles applications géométriques : la théorie du *Nullsystem*, des tétraèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre, les considérations générales sur la génération des courbes gauches, des surfaces, des congruences et des complexes. Les exemples traités par l'auteur montrent bien la puissance de la méthode.

Les deux derniers Chapitres se rapportent aux propriétés différentielles : vitesse, accélération, cinématique et dynamique du corps solide, équations relatives au vecteur qui représente la somme des quantités de mouvement d'un système (*Impulsgleichungen*), extension aux électrons [vecteur électrique, vecteur magnétique (Hertz), vecteur d'énergie (Poynting)], tourbillon, divergence, gradient, équations de Maxwell-Hertz, etc. Quelques indications sur les tenseurs (au sens de M. Gibbs) et les fonctions vectorielles linéaires terminent cet intéressant Ouvrage.

On remarquera que les *quaternions* ne sont introduits ni dans le Livre de M. Gans, ni dans celui de M. Jahnke; ils ne figuraient pas davantage dans celui de MM. Gibbs et Wilson. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CHOMÉ (F.). — *Cours de Géométrie descriptive de l'École militaire.* Deuxième Partie : *Plans cotés ;* à l'usage des élèves de l'Enseignement supérieur. Texte in-4° VI-172 p. Atlas in-4° de 36 planches. Bruxelles, Office de Publicité. Paris, Gauthier-Villars, 1904. 10 fr.

Extrait de la Table des Matières. — Chapitre premier : Représentation du point, de la droite et du plan considérés isolément ou l'un par rapport à chacun des autres. Chapitre II : Autres problèmes relatifs à la représentation des figures. Chapitre III : Lignes et surfaces d'égale pente. Chapitre IV : Surfaces topographiques. Chapitre V : Tableaux graphiques. Appendice. Programmes d'épures.

G. HOLZMULLER. — *Vorbereitende Einführung in die Raumlehre.* Im Anschluss an die preussischen Lehrpläne von 1901 zur freien Auswahl für den Anfangsunterricht bearbeitet und mit Anleitungen zum Herstellen von Unterrichts-Modellen verschen. In-8°, X-123 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1904.

A.-H. BUCHERER. — *Mathematische Einführung in die Electronentheorie.* In-8°, 147 p. Leipzig, Teubner, 1904.

BRUNO SCHULZE. — *Das militärische Aufnehmen*, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der königlichpreussischen Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischer Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten, nach den auf der koniglichen Kriegsakademie gehaltenen Vortragen. In-8°, XIII-305 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1903.

Extrait de la Table des Matières. — I. Teil : Die Vorarbeiten für die topographische Aufnahme. II. Teil : Die topographische Aufnahme. III. Teil : Die kartographische Verwertung der Messtischaufnahme.

GIAN ANTONIO MAGGI. — *Principii di Stereodinamica.* Corso sulla Formazione, l'Interpretazione e l'Integrazione delle equationi del movimento dei solidi. In-8°, XI-262 p. Milan, U. Hoepli, 1903.

Extrait de la Table des Matières. — Parte prima : Il Teorema di d'Alembert. Parte seconda : Il teorema di Hamilton. Parte terza : Il Teorema di Jacobi.

Iwan Alexandroff. — *Aufgaben aus der niederen Geometrie nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Uebungsbuche zusammengestellt;* mit einem Vorwort von M. Schuster. In-8°, vi-123 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1903.

Exposé systématique des principales méthodes de résolution des problèmes de Géométrie. A déjà paru en édition française.

G. Holzmüller. — *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.* Dritter Teil : *Lehr- und Uebungstoff* zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollanstalten und hörerer Fachschulen nebst Vorbereitungen auf die Hochschulmathematik. Zweite Auflage; in-8°, iv-370 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1903.

Extrait de la Table des Matières. — Erste Abteilung : Geometrie. Zweite Abteilung : Stereometrie. Dritte Abteilung : Sphärische Trigonometrie. Vierte Abteilung : Algebraische Analysis, mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Fünfte Abteilung : Von den Gleichungen höheren Grades.

J. Schenk. — *Festigkeitsberechnung grösserer Drehstrommaschinen;* mit 45 Figuren. In-8°, 59 p. Leipzig, Teubner, 1903.

P. Stephan. — *Die technische Mechanik;* elementares Lehrbuch für mittlere Maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil : Mechanik starrer Körper. In-8°, viii-344 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1904.

Extrait de la Table des Matières. — Erste Abteilung : Grundlehren und Statik des Massenpunktes. Zweite Abteilung : Statik starrer Körper. Dritte Abteilung : Statik starrer Körpersysteme. Vierte Abteilung : Dynamik des Massenpunktes. Fünfte Abteilung : Dynamik starrer Körper. Allgemeine Sätze und fortschreitende Bewegung. Drehbewegung. Der Stoss.

Arnold Emch. — *An introduction to projective Geometry and its applications an analytic and synthetic treatment.* In-8°, vii-267 p. New-York, John Wiley et Sons, 1905.

Chapter I : General considerations anharmonic ratio. Projective ranges and pencils. Polar involution of the circle. Chapter II : Collineation. Chapter III : Theory of conics. Chapter IV : Pencils and ranges of conics. The Steinerian transformation cubics. Chapter V : Applications in mechanics. Geometrie of stresses in a plane. Realization of collineations by linkages.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CHOLLET (M.). — Remboursement des emprunts a long terme. 1 vol. in-8°. 99 pages. Paris, L. Dillac, 1905.

Dans cet Ouvrage, l'auteur s'attache principalement à l'étude des emprunts représentés par des obligations remboursables par tirages au sort, et du mode mathématique de reconstitution du capital à rembourser aux obligataires.

La première partie comprend une étude rapide du remboursement des rentes perpétuelles; la seconde partie traite des emprunts remboursables par tirages au sort avec ou sans lots.

C'est un Ouvrage capable d'intéresser tous ceux qui s'occupent d'opérations financières et de mathématiques appliquées.

J. G.

HEFFTER (L.) et KOEHLER (C.). — Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Band. Geometrie in den Grundlagen erster Stufe und in der Ebene. 1 vol. in-8°; XVI-526 pages, 136 figures. Leipzig, Teubner, 1905.

Lorsque la connexion des diverses propositions dont l'ensemble constitue une science particulière a été assez profondément étudiée pour qu'il soit possible de les voir se dérouler dans un ordre naturel de généralité décroissante, à partir de quelques vérités qui contiennent toutes les autres et qui sont directement accessibles, doit-on, pour exposer la Science, suivre cet ordre naturel, s'élever du premier coup aux vérités générales et redescendre peu à peu jusqu'à la foule des vérités particulières, en faisant admirer à ceux

que l'on guide l'extraordinaire richesse de la contrée qu'ils ont dominée tout d'abord, d'un point si élevé qu'ils ne distinguaient presque rien? Doit-on, au contraire, les retenir longtemps dans les chemins de la plaine, avant de commencer la pénible ascension, les faire monter peu à peu, se retourner pour regarder le chemin parcouru, l'horizon qui grandit, n'arriver que lentement à ce faîte d'où l'on se sent vraiment en possession de la science?

On discutera tant que l'on voudra sur les avantages et les inconvénients des deux méthodes : au reste, les partisans les plus déterminés de l'une ou de l'autre admettent sûrement des tempéraments dans l'application. Les résultats dépendent, non seulement du maître, mais des étudiants, de leur âge et de leur force intellectuelle. MM. Heffter et Koehler, qui tiennent pour la première méthode, ne sont pas des intransigeants. Ils n'ont pas eu la prétention d'écrire leur *Lehrbuch* pour des étudiants qui ne connaîtraient pas les éléments de la Géométrie et n'ont pas déguisé les quelques emprunts qu'ils ont faits à ces éléments.

Leur livre, qui est à la fois élémentaire et systématique, rendra par là même de grands services. Il est dominé, d'un côté, par la considération des sous-groupes du groupe projectif, d'un autre côté, par la classification des figures géométriques fondamentales en figures à une, deux ou trois dimensions (*Stufe*). La Géométrie projective n'étudie que des propriétés d'*incidence*, des faits comme celui-ci : un point est sur une droite ou dans un plan; une droite, un plan, passant par un point. Parmi les points, droites ou plans dont elle s'occupe, il n'y a pas d'éléments *distingués :* les points ou les droites à l'infini, le plan de l'infini ne tiennent pas de rôle spécial. Elle ne traite pas d'ailleurs de figures particulières : ses raisonnements s'appliquent à toutes les figures où les relations d'incidences qu'ils supposent sont vérifiées. A cette Géométrie correspond le groupe des transformations collinéaires qui changent un point en un point, une droite en une droite, un plan en un plan. Dans la Géométrie *affine* (*affine Geometrie*), les éléments à l'infini (ou éléments impropres) sont des éléments distingués : à cette Géométrie correspond le groupe des transformations collinéaires qui laissent invariable le plan de l'infini. Dans la Géométrie *équiforme* (*æquiforme Geometrie*), s'introduit, en outre, la notion de l'orthogonalité, d'une relation

réciproque entre deux points à l'infini, entre un point à l'infini et une droite à l'infini, entre deux droites à l'infini.

En admettant qu'on puisse reconnaître de deux éléments impropres, s'ils satisfont ou non à cette relation, les propositions de la Géométrie équiforme deviennent des propositions qui ne concernent que des incidences : on dira, par exemple, de deux plans qu'ils sont orthogonaux si leurs droites de l'infini coïncident avec des droites orthogonales. A cette Géométrie équiforme correspond le groupe des transformations collinéaires qui laissent invariable le plan de l'infini et qui conservent les relations d'orthogonalité : il en résulte que les angles sont conservés et qu'une figure est changée en une figure semblable. Les relations d'orthogonalité se trouvent ainsi tenir un rôle capital, que les auteurs ont mis pleinement en lumière.

Dans leur livre, on descend de la Géométrie projective à la Géométrie affine, et de celle-ci à la Géométrie équiforme, chacune de ces Géométries étant regardée comme une particularisation de la précédente; d'un autre côté, les formules qui concernent une Géométrie particulière sont disposées, autant que possible, pour qu'on puisse en saisir la signification dans la Géométrie projective.

Tout en procédant ainsi du général au particulier, il est naturel de commencer l'étude par les domaines les plus simples, à une ou deux dimensions (*Stufe*). En fait, le premier Volume de ce *Lehrbuch* est partagé en deux sections, d'importance très inégale, consacrées, la première, à la Géométrie des points sur une droite et des faisceaux plans de droites; la seconde, à la Géométrie des points et des droites dans un plan. Elles sont précédées d'une introduction où les idées générales sont largement exposées. La première Partie (p. 24-91) contient trois Chapitres; les titres de ces Chapitres sont indiqués par ce qui précède; ils sont séparés par un Chapitre relatif à l'involution. La seconde Partie (p. 92-501) contient quinze Chapitres, dont les dix derniers se rapportent à la théorie des coniques.

Un court Supplément (502-517) contient les propositions de la théorie des déterminants qui peuvent être utiles au lecteur.

J. T.

FRICKE (R.). — HAUPSAETZE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG ALS LEITFADEN ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN. 4e édition. 1 vol. in-8°, XV-217 pages, 74 figures. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1905.

Le succès de cet excellent petit livre, dont nous sommes heureux d'annoncer la quatrième édition, n'a rien de surprenant : il est court, il est clair, il est aussi complet que possible dans sa brièveté; l'auteur a présenté les choses de façon que le lecteur puisse *voir*, autant que possible, les énoncés et les démonstrations, qui se gravent ainsi dans l'esprit. Il est, à ce que je crois, nécessaire pour tous les étudiants en Mathématiques, d'avoir cette *vue* des éléments de l'Analyse et elle suffit à beaucoup; à ceux, notamment, qui apprennent les Mathématiques pour des fins pratiques. Ce qu'elle a d'insuffisant, au point de vue logique, est assez évident pour que personne ne s'y trompe. J. T.

FISHER (J.). — KURZE EINLEITUNG IN DIE DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG, AUS DER DURCH MEHRERE VERBESSERUNGEN DES VERFASSERS VERVOLLSTÄNDIGTEN DRITTEN ENGLISCHEN AUSGABE übersetzt von N. PINKUS. 1 vol. in-8°, VI-72 pages, 11 figures, Leipzig, Teubner, 1905.

Ce petit livre a été écrit en vue de ceux qui étudient l'Économie politique et qui veulent acquérir les connaissances indispensables pour lire les ouvrages de Jevons, Walras, Marshall, Pareto, ... et les articles des revues spéciales (*Economic Journal*, *Journal of the Royal statistical Society*, *Giornale degli Economisti*, etc.), consacrées à l'Economie politique, où interviennent quelques notions mathématiques. Il peut d'ailleurs servir à toutes les personnes qui, avec des connaissances mathématiques rudimentaires, veulent se rendre compte de ce qu'est le Calcul infinitésimal et des services qu'il peut rendre dans les sciences appliquées.

J. T.

BIERMANN (O.). — VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE NÄHERUNGSMETHODEN. 1 vol. in-8°, IX-227 pages, 35 figures. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1905.

Le livre de M. Otto Biermann sur les méthodes mathématiques d'approximation est intéressant et utile. L'auteur, qui a été un des premiers à publier un résumé de la doctrine de Weierstrass, est professeur dans la *Technische Hoeschule* de Brünn; les renvois, assez nombreux, à ses propres recherches sur la solution de divers problèmes dont l'intérêt pratique est incontestable, montrent à quel point il est préoccupé de la matière de son enseignement. Il a conservé le goût d'une entière rigueur dans l'exposition.

Son livre ne suppose d'ailleurs que ces connaissances mathématiques qui sont évidemment indispensables à tout élève d'une haute école technique : formule de Taylor pour les fonctions d'une ou de plusieurs variables, notion de l'intégrale définie, etc. L'exposition est claire et scientifique ; l'auteur a su se limiter aux choses essentielles et, d'un autre côté, il a réuni bon nombre de renseignements qu'on aurait de la peine à retrouver ailleurs.

Les premières pages sont consacrées aux opérations arithmétiques et, en particulier, aux méthodes de Fourier pour la multiplication et la division; c'est là un sujet que M. Lüroth, en particulier, avait développé dans ses belles leçons sur le calcul numérique : ces méthodes étaient là tout à fait à leur place; malgré leur grand intérêt, il me semble qu'on pourrait se dispenser de les exposer dans une école technique, et qu'il vaudrait autant recommander aux auditeurs l'emploi d'une table de multiplication, ou d'une table de logarithmes.

M. Biermann passe ensuite aux calculs approchés : les règles relatives aux erreurs sont fondées systématiquement sur l'emploi de la formule des accroissements finis. Signalons l'application de la notion d'erreur relative à l'établissement de la formule approchée de Poncelet

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 0.961\,x - 0.398\,y \qquad (x > y > 0).$$

Après s'être occupé du calcul des séries et en particulier de la

série logarithmique et de la série du binome, l'auteur traite de la résolution approchée des équations; signalons, en dehors des méthodes qui sont tout à fait classiques, la méthode des images logarithmiques de M. Mehmke pour la résolution approchée des équations algébriques et celle de M. Van den Berg pour la résolution graphique d'un système de n équations du premier degré à n inconnues [1].

Deux Chapitres sont consacrés aux formules d'interpolation, soit par des fonctions entières, soit par les fonctions trigonométriques; l'auteur insiste à chaque fois sur l'expression du reste; on trouvera dans le premier de ces Chapitres la formule de M. Markoff pour le cas où l'on se donne les valeurs de la fonction et de ses dérivées. Entre ces deux Chapitres, l'auteur traite de l'interpolation des fonctions de deux variables, qui servira pour les cubatures approchées, et développe les points les plus essentiels de la théorie des différences. Signalons les applications aux Tables numériques, spécialement aux Tables de logarithmes.

Les formules d'interpolation sont ensuite appliquées aux quadratures et aux cubatures approchées; on remarquera la façon dont est présentée la règle pour le meilleur choix des points de division de l'intervalle; l'auteur donne enfin quelques indications, d'après M. Runge, sur la résolution approchée des équations

---

[1] Cette dernière est, je crois, peu connue en France; elle est assez simple pour pénétrer dans l'enseignement. Considérons deux équations

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b_{n+1} = 0.$$

Convenons de dire d'une équation qu'elle est *représentée* sur un axe quand, après avoir pris sur cet axe une origine, on a marqué les points dont les abscisses sont les $n+1$ coefficients de l'équation. Supposons que les deux équations soient ainsi représentées sur deux axes parallèles et de même sens (A) et (B), soit (Δ) la droite qui joint les origines; menons aussi les droites qui joignent deux points correspondants, sur les deux axes, aux coefficients d'une même inconnue; coupons la figure par une droite (C) parallèle à (A) et à (B) et prenons sur cette droite, comme origine, le point où elle est rencontrée par Δ; les points d'intersection avec les autres droites représenteront une équation du premier degré qui est manifestement une combinaison linéaire des deux proposées; elle représente l'équation obtenue en éliminant x_1, si l'on fait passer (C) par le point où (Δ) est rencontrée par la droite qui joint les points correspondants aux coefficients de x_1. Le reste est évident.

différentielles ordinaires. Un dernier Chapitre concerne les instruments mathématiques les plus simples : règle à calcul, intégraphe d'Abakanowicz, planimètre polaire d'Amsler. L'analyseur harmonique a été décrit précédemment. Une courte note sur la méthode des moindres carrés termine le livre de M. Biermann. J. T.

CORRESPONDANCE D'HERMITE ET DE STIELTJES publiée par les soins de *B. Baillaud* et de *H. Bourget*, avec une préface de M. *Emile Picard*. Tome II, 18 octobre 1889-15 décembre 1894. 1 vol. in-8°, VI-464 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Il y a moins d'un an, dans notre Numéro d'avril 1905, nous avions le plaisir de signaler l'apparition du premier Volume de la Correspondance échangée, depuis 1882 jusqu'à la fin prématurée de Stieltjes, entre Charles Hermite et le jeune géomètre qui devait promptement devenir un des amis préférés de l'illustre Analyste. Nous annoncions à nos lecteurs que le travail de publication se poursuivait régulièrement et nous leur faisions espérer qu'ils auraient bientôt sous les yeux l'ensemble de cette belle correspondance, que les directeurs de la publication ont eu la bonne fortune de pouvoir reproduire, pour ainsi dire, intégralement. Notre espoir s'est trouvé réalisé plus tôt encore que nous ne l'avions pensé, et le second Volume que l'éditeur, M. Gauthier-Villars, a publié depuis quelques mois déjà, contient la fin de la Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Nous avions insisté sur l'intérêt que présentait la première partie de la publication. Le second Volume ne le cède en rien au premier et sera accueilli avec la même faveur par tous ceux qui s'intéressent à l'évolution de la pensée et des recherches mathématiques.

Les lecteurs trouveront en tête un beau portrait d'Hermite, datant de sa vingt-cinquième année environ. M. Picard, qui le possède et qui l'a fait placer aussi en tête du premier Volume des *Œuvres d'Hermite*, a bien voulu en autoriser la reproduction. En tenant compte de la différence des âges, on retrouve une ressem-

blance entre ce portrait de première jeunesse d'Hermite et tous ceux qui nous ont été conservés de lui. La chevelure d'Hermite est bouclée, ses yeux brillants paraissent éclairés par une lumière intérieure; il a l'air doux et bienveillant.

Les éditeurs ont terminé le Volume en imprimant quatre lettres que Stieltjes avait adressées autrefois à M. Mittag-Leffler. Il leur a paru avec raison que ces lettres seraient intéressantes pour l'histoire des idées de Stieltjes et la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Enfin M. Gauthier-Villars a voulu que la publication nouvelle fût à la hauteur de toutes celles qui sortent de sa Maison et il a fait exécuter un très intéressant fac-similé de l'écriture de Stieltjes. Les fac-similés de l'écriture d'Hermite seront évidemment réservés pour la publication de ses Œuvres complètes qui se poursuit, nous le savons, avec une grande régularité.

Maintenant que l'œuvre est terminée, il est plus facile de l'apprécier dans son ensemble et de se rendre compte à la fois de son importance et de son intérêt. Nous l'avons déjà signalée aux jeunes géomètres en les engageant à suivre la correspondance la plume à la main et à y démêler les idées originales et fécondes qui s'y trouvent semées à profusion. Aujourd'hui nous voudrions insister surtout sur le côté moral de cet échange de lettres, sur les réflexions générales qu'échangent les deux amis à l'occasion de leurs recherches mathématiques. Le caractère et les idées d'Hermite, sa bienveillance et sa bonté aussi s'y montrent dans tout leur jour. Au début même de la Correspondance, ayant appris que son jeune ami n'aimait pas les examens et que, par une faveur spéciale, il en avait été dispensé, il lui écrit, en exagérant un peu :

« Moi aussi j'ai eu les examens en horreur et j'ai passé une année, étant élève de mathématiques spéciales, à lire, à la Bibliothèque Sainte-Geneviève, les Ouvrages d'Euler, etc., au lieu de me mettre en mesure de répondre sur les questions de Géométrie, de Statique, etc. : M. G... m'avait pris en aversion et j'ai expié par un humiliant échec mes fantaisies d'écolier savant. Plus tard je n'ai pu prendre sur moi de passer les examens de la licence ès Sciences lorsque cela eût été bien nécessaire, et ces examens, que je vais faire passer, dans quelques jours, en revenant à Paris, et

interrogeant sur mon cours, je les passerais fort mal, car, mes leçons faites, je les oublie. »

Et ailleurs :

« Les compositions de baccalauréat à noter, les examens à la Faculté, les leçons à préparer m'ont fait perdre le bénéfice des vacances de Pâques. Je ne puis vous dire à quels efforts je suis condamné pour comprendre quelque chose aux épures de Géométrie, que je déteste, et à des choses comme la formule des Annuités en Arithmétique, etc. Combien sont heureux ceux qui peuvent ne songer qu'à l'Analyse. »

Cette question des examens de baccalauréat revient fréquemment dans la Correspondance.

« Je viens, écrit Hermite, de lire et de noter trente compositions ; c'est ma dernière série et, après l'examen oral de demain, je serai libre. Il est temps ! je ne sais, si je continuais, ce que je deviendrais. S'il y a, comme disent les zoologistes, une série décroissante dans l'échelle des êtres, je suis arrivé aux derniers échelons, aux degrés les plus infimes. »

Et encore :

« Je sors du Collège Stanislas où j'ai interrogé sur les génératrices de l'hyperboloïde, la génération de l'ellipsoïde, l'équation en S, etc. Je suis excédé d'autant plus que, ce matin, j'ai eu, à la Faculté des Lettres, une séance d'examen du baccalauréat. »

Citons aussi le passage suivant :

« Si vous ne me prenez pas en compassion quand j'essaie de comprendre quelque chose aux épures de Géométrie descriptive, c'est que vous avez le cœur d'un tigre. »

Hermite avait des idées particulières sur la nature et le rôle des Sciences mathématiques. Dès le premier jour il les expose dans sa correspondance.

« Pour moi, écrit-il dès le début, je ne suis qu'analyste et jamais

je n'ai quitté la sphère des Mathématiques subjectives. Je suis toutefois bien convaincu qu'aux spéculations les plus abstraites de l'analyse correspondent des réalités qui existent en dehors de nous et parviendront quelque jour à notre connaissance. Je crois même que les efforts des géomètres reçoivent, à leur insu, la direction qui les fait tendre vers un tel but, et l'histoire de la Science me paraît prouver qu'une découverte analytique survient au moment nécessaire pour rendre possible chaque nouveau progrès dans l'étude des phénomènes du monde réel qui sont accessibles au calcul. »

Plus tard, Stieltjes lui ayant écrit à propos d'une recherche sur les fonctions continues :

« Je vous avouerai que je n'ai point la prétention d'éclaircir un sujet si difficile par la réflexion et l'imagination seules; je procéderai comme les naturalistes en appelant au secours l'*observation*. Pour le moment donc je fais des calculs numériques assez laborieux ».

Hermite lui répond immédiatement :

« Je me sens tout joyeux de vous savoir en si bonne disposition que vous vous transformez en naturaliste pour observer les phénomènes du monde arithmétique. Votre doctrine est la mienne; je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et que nous les rencontrons ou les découvrons comme les physiciens, les chimistes, les zoologistes, etc. »

Et ailleurs :

« Les recherches d'Arithmétique exigent absolument des exemples où l'observation puisse s'exercer. Autrement on reste dans le vide, ce qui m'est arrivé pour mon malheur, etc. »

Les deux amis s'adressent donc à la voie de l'observation; mais cette voie, qui est souvent décevante, Hermite vient de nous le

dire, est toujours pénible. C'est ce qui amène l'illustre géomètre aux réflexions suivantes :

« Je suis maintenant à porter envie et jalousie aux professeurs des Universités allemandes qui donnent à leurs élèves, heureux et reconnaissants de les recevoir de leur mains savantes, des calculs algébriques dont ils tirent, en se faisant naturalistes, des observations utiles qui peuvent les conduire au but. Ces calculs je les ferai moi-même en me trompant et les recommençant, en invoquant vainement, je le crains bien, la devise de Guillaume d'Orange (je n'ai pas besoin d'espérer pour entreprendre, ni de réussir pour persévérer). »

Et ailleurs :

« Vous regrettez de n'avoir pas d'élèves à qui confier une question à traiter. Hélas! il n'en est pas autrement à la Sorbonne qu'à Toulouse et dans toute Faculté des Sciences de France. Un élève de Clebsch, M. Paquier, astronome à Louvain, m'a appris que l'éminent géomètre, qui a produit tant de beaux Mémoires, travaillait très peu. Les idées lui venaient heureuses et abondantes; il les livrait à de jeunes ouvriers, enchantés de travailler sous ses yeux, sous sa direction, qui lui supprimaient, en faisant les calculs avec grand soin, tout travail matériel; et c'était au grand profit de la Science, comme de ses auxiliaires. »

Parmi les réflexions purement mathématiques, je me bornerai à signaler les suivantes : d'abord une remarque de Stieltjes à propos des simplifications qui ont été apportées aux démonstrations d'Hermite et de M. Lindemann relatives aux nombres e et π.

« M. Baillaud m'a dit que M. Molk fera un article dans le *Bulletin de Darboux* où il exposera la démonstration de M. Weierstrass de la transcendance de π et de e. Tout en admirant beaucoup cette démonstration, je regrette que ce qui a été votre point de départ, l'approximation de plusieurs quantités par des fonctions de même dénominateur, s'y trouve presque effacé, et il me semble qu'il y aurait grand intérêt à mettre bien en vue ce point; car enfin, sans cette idée mère, on ne serait jamais arrivé au but, je crois. »

Nous terminerons par ces deux réflexions d'Hermite :

« Je ne puis sortir du domaine elliptique ; là où la chèvre est attachée, dit le proverbe, il faut qu'elle broute. »

Et ailleurs :

« Je me détourne avec effroi et avec horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. »

G. D.

STOLZ (O.) et GMEINER (A.). — EINLEITUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der *Theoretischen Arithmetik*, nicht berücksichtigten Abschnitte der *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* von *O. Stolz*. II. Abteilung. (Tome XIV, 2 de la *Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*.) 1 vol. in-8° : VIII-356 pages, 11 figures. Leipzig, Teubner, 1905.

Le lecteur trouvera dans cette seconde partie de l'Introduction à la théorie des fonctions de MM. Stolz et Gmeiner les qualités que nous avons eu plusieurs fois l'occasion de signaler : l'exposition est claire, précise, rigoureuse ; les auteurs savent dire en peu de mots ce qui est nécessaire et, parce qu'ils savent être brefs, ils peuvent mettre beaucoup de choses dans leurs livres ; nous devons, comme pour la première partie, signaler le nombre et l'intérêt des exercices qui terminent chaque chapitre.

Cette seconde partie traite surtout des fonctions de variables complexes.

Les auteurs, après avoir établi les propositions principales concernant la convergence des séries à termes positifs, établissent les propriétés fondamentales des séries entières : c'est, si je ne me trompe, M. Stolz qui a donné le premier (1884) la généralisation, maintenant classique, du théorème d'Abel sur la convergence uniforme d'une telle série. La conception d'une fonction mono-

gène comme provenant d'un *élément de fonction* est développée dans le Chapitre suivant. Les auteurs établissent ensuite les propriétés fondamentales des fonctions a^x, $\log x$, x^m, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, ..., en insistant comme il convient sur la signification des fonctions à détermination multiple, et en particulier sur la détermination principale : $\operatorname{arc\,sin} x$, par exemple, est défini dans tout le plan, où l'on a pratiqué deux coupures allant, sur l'axe des quantités réelles, de $+1$ à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$, comme ayant sa partie réelle comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La façon dont les auteurs insistent sur ce sujet, d'ailleurs facile, mais sur lequel on a parfois le tort de ne pas s'arrêter suffisamment, montre chez eux un sens très sûr des incertitudes et des erreurs où tombent facilement les débutants. Le Chapitre suivant commence par les produits infinis; on y remarquera, en particulier, la façon dont est présenté, et étendu au cas des variables complexes, le théorème de M. Arzelà sur la continuité en un point d'un pareil produit. Il se termine par le développement en produits de $\sin x$ et de $\cos x$; par le développement en séries de fractions rationnelles de $\cot x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{coséc} x$, $\operatorname{séc} x$, par l'étude des séries entières pour $\cot x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{coséc} x$, $\operatorname{séc} x$, $\log \frac{\sin x}{x}$, $\log \cos x$, ...

Les deux derniers Chapitres enfin se rapportent aux fractions continues; quelques exemples simples font prévoir l'intérêt de cet algorithme dans la théorie des fonctions; mais les auteurs se bornent à quelques indications sur ce sujet, qui aurait dépassé la cadre qu'ils s'étaient tracé.

Le second volume des *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* de M. Stolz, où l'auteur traite du calcul différentiel et intégral pour les fonctions d'une variable complexe, peut être regardé comme se reliant directement à la seconde partie de cette *Einleitung in die Funktionentheorie* et comme en formant la suite naturelle. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BAIRE (R.). — *Leçons sur les fonctions discontinues.* In-8°, VIII-128 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

BOREL (E.). — *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.* In-8°, VIII-162 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 50 c.

BUCHANAN (R.). — *Mathematical theory of eclipses, according to Chauvenet's transformation of Bessel's method. Transit of Mercury and Venus; Occultations of fixed stars.* In-8°, 248 p. London, Lippincott. 21 sh.

CUNNIGHAM (A.). — *Quadratic partitions.* In-8°. London. Hodgson. 12 sh.

DUMONT (F.). — *Introduction à la Géométrie du troisième ordre.* In-8°, 310 p. Paris, Hermann. 7 fr.

HERZ (NORB.). — *Geodasie. Eine Darstellung der Methoden für die Terrainaufnahme, Landesvermessung u. Erdmessung.* In-8°, 418 p. avec 3 pl. et 160 fig. Wien, Deuticke (*Die Erdkunde*, 25e volume). Einzelpreis, 14 m.

KIEPERT (LUDW.). — *Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung.* 1. Tl. *Differential-Rechnung.* 10. Aufl. des gleichnam. Leitfadens von M. Stegemann. Gr. in-8°, XX-816 p. avec 181 fig. Hannover, Helwing. 12 m. 50 pf.; relié, 13 m. 50 pf.

LE VAVASSEUR (R.). — *Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus.* In-8°, 100 p. Paris, Gauthier-Villars.

TANNERY (J.). — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 2e édit. 2 vol. gr. in-8°, t. I, IV-430 p. Paris, Hermann. 15 fr.

TURNER (H.-H.). — *Astronomical Discovery.* In-8°, 238 p. avec planches. London, Arnold. 10 sh. 6 d.

VRIES (H. DE). — *Die Lehre von der Zentralprojektion in vierdimensionalen Raume.* Gr. in-8°, 78 p. avec 25 fig. Leipzig, Goschen. 3 m.

BALL (SIR R.). — *Popular Guide to Heavens.* Series of 83 plates, with explan. text. In-4°. London, Philip. 17 sh.

NEUE *Beiträge zur Frage des mathematischen u. physikal. Unterrichts an den höheren Schulen.* — Vorträge. Gesammelt von F. Klein u. E. Riecke. 1 Tl., gr. in-8°, VII-190 p. avec 6 fig. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

CHARLIER (CARL-LUDW.). — *Die Mechanik des Himmels.* Vorlesungen. 2. Bd., 1. Abtlg. Gr. in-8°, 320 p. avec fig. Leipzig, Veit et C°. 12 m.

DARBOUX (G.). — *Etude sur le développement des méthodes géométriques.* In-8°, 35 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50 c.

FOERSTER (W.). — *Astrometrie oder die Lehre von der Ortsbestimmung in Himmelsraume, zugleich als Grundlage aller Zeit- u. Raummessung.* 1. Heft : *Die Sphärik u. die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnung u. die sphär. Koordinatenmessungen.* Gr. in-8°, 160 p. Berlin, G. Reimer. 4 m.

ASTRONOMISCHER *Kalender für* 1905. — Berechnet für den Meridian u. die Polhöhe von Wien. Herausgeg. von der k. k. Sternwarte. Neue Folge, 24. Jahrg. In-8°, 138 p. Wien, Gerold's Sohn. Cart. 2 m. 40 pf.

LOEWY (M.) et P. PUISEUX. — *Atlas photographique de la Lune.* 8e fasc. In-4°, 52 p. et 3 planches. Paris, Impr. nationale.

SCHILLING (FR.). — *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere über die Photogrammetrie.* Mit ein. Anhang : *Welche Vorteile gewährt die Benutzg. des Projektionsapparates im mathemat. Unterricht.* Gr. in-8°, VI-198 p. avec 151 fig. et 5 planches. Leipzig, Teubner. Gebd. 5 m.

SOLTA (FR.-M.). — *La meccanica dell' infinito ; teoria nuova.* In-8°. Milano, Manini-Wiget. 15 l.

APPELL (P.). — *Éléments d'Analyse mathématique, à l'usage des ingénieurs et des physiciens.* 2e édit. In-8°, 722 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 24 fr.

BOLZA (O.). — *Lectures on the Calculus of Variations.* In-8°, 272 p. avec 48 diagrams. London, Wesley. 18 sh.

CLARK (J.-B.). — *Mathematical and physical Tables.* In-8°. London, Oliver et B. 6 d.

FOERSTER (W.) u. P. LEHMANN. — *Die veränderlichen Tafeln des*

astronomischen und chronolog. Teils des preuss. Normalkalenders f. 1906. Gr. In-8°. v-268 p. Berlin, Königl. statist. Bureau. 6 m. 80 pf.

HALL (H.-S.) and STEVENS (F.-H.). — *Lessons in experimental and practical Geometry*. Gr. in-8°. London, Macmillan. 1 sh. 6 d.

JAHRESBERICHT *der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. In Monatsheften herausgeg. von A. Gutzmer. 14. Bd. 12. Hefte. (1re fasc., 84 p. avec 1 portrait). Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 18 m.

OCAGNE (M. D'). — *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*. Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et monogrammes. In-8°, VI-320 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

PICARD (E.). — *Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres Sciences* (conférences). In-8°, 26 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

— *Traité d'Analyse*. 2e édit. T. II. In-8°, XV-587 p. av. fig. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

POINCARÉ (H.). — *Leçons de Mécanique céleste*, professées à la Sorbonne. T. I : *Théorie générale des perturbations planétaires*. In-8°, VI-368 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

SCHUR (FRDR). — *Johann-Heinrich Lambert als Geometer* (Rektoratsrede). In-8°, 20 p. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchdr. 60 pf.

VOS (M. DE). — *Leerboek der lagere Geodesie*. Gr. in-8°, 494 p. avec 196 fig. Groningen, Wolters. 8 fl. 50 c.

ZORETTI (L.). — *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (thèse). In-4°, 57 p. Paris, Gauthier-Villars.

STURM (C.). — *Cours de Mécanique à l'Ecole Polytechnique*. Revu et corrigé par L. Prouhet. 5e édit. 2 vol. in-8° avec fig. T. I : XIV-279 p.; t. II : XI-436 p. Paris, Gauthier-Villars. Les 2 vol. 14 fr.

BAIRE (R.). — *Théorie des nombres irrationnels des limites et de la continuité*. In-8°, 64 p. Paris, Vuibert et Nony.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXIX.

341

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIX; 1905. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

AHRENS (W.). — Scherz und Ernst in der Mathematik 32-33

APPELL (P.). — Éléments d'Analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens..... 96

ANDRAE (A.). — Hilfsmittel zu einer allgemeinen Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung..... 93-94

Atti del Congresso internazionale de Scienze storiche (1903). Volume XII : Storia delle Scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche 69-73

BACHMANN (P.). — Zahlentheorie. Funfter Theil 315-317

BAIRE (R.). — Leçons sur les fonctions discontinues..... 249-252

BAIRE (R.). — Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité..... 122-12

BIERMANN (O.). — Vorlesungen uber mathematische Naherungs Methoden 329-331

BOLTZMANN (L.). — Leçons sur la théorie des gaz. 2e Partie. 167-175

BOREL (E.). — Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynomes, rédigées par M. Fréchet, avec des Notes de P. Painlevé et H. Lebesgue..... 62-67

BRANISLAS PETRONICVICS. — Principien der Metaphysik. I. Band, I. Abtheilung..... 58-60

BRITICH ASSOCIATION MEETING AT GLASGOW 1901..... 281

BRUNS (H.). — Grundlinien der Wissenschaftlichen Rechnens..... 255-258

Pages

CESARO (E.). — Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der infinitesimal Rechnung 125-126
CHOLLET (M.). — Remboursement des emprunts à long terme 325
COUTURAT (L.). — L'algèbre de la logique 194-196
DAVENPORT (C.). — Statistical methods with special reference to biological variation 29
DOBRINER (H.). — Theorie der Flachen mit ebenen und sphærischen Krummungslinien 68-69
Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française, publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Fascicule I 126-129
ENRIQUEZ (F.). — Vorlesungen uber projektive Geometrie-Deutsche Ausgabe von H. Fleischer 252-255
FIEDLER (W.). — Die darstellende Geometrie in organischen Verbindung mit der Geometrie der Lage 31-32
FISCHER (J.). — Kurze Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung 328
FORSYTH SCOTT (R.). — The theory of determinants and their applications. 2e édition, revue par G. B. Mathews 60-62
FOUËT (E.). — Leçons élémentaires de la théorie des fonctions analytiques. Seconde Partie 84-88
FOURIER (J.-B.). — Die Auflösung der bestimmten Gleichungen, übersetz und herausgegeben von A. Loewy 79
FRICKE (R.). — Haupsätze der Differential- und Integral-Rechnung ... 328
FUHRMANN (A.). — Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Erster Theil 154
GANS (R.). — Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik 318-322
GMEINER (A.). — *Voir* Stolz (O.) und Gmeiner (A.).
GOURSAT (E.). — Cours d'Analyse mathématique, t. II, 2e Partie 258-272
GRASSMANN (H.). — Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von F. Engel. II. Band, I. und II. Theil 67-68
GRAY AND MATHEWS. — A treatise on Bessel functions and their applications to Physic 5-19
HAENTZSCHEL (E.). — Das Erdsphäroid und seine Abbildung 75-76
HAMEL (G.). — Die Lagrange- Euler'schen Gleichungen der Mechanik 157-177
HEFFTER (L.) und KŒHLER (C.). — Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Band 325-327
HERMITE (C.). — Œuvres publiées par E. Picard. T. I. 313-315
HERMITE et STIELTJES. — Correspondance publiée par B. Baillaud et H. Bourget. T. I 96-99
T. II 331-336
KAHNKE (E.). — Vorlesungen uber die Vektoranalysis mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik 318-322
JESSOP (C.-M.). — A treatise on the Line-Complex 196-197
KLEIN (F.). — Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen 281
KOEHLER (C.). — *Voir* Heffter und Koehler.
LAGALLY (M.). — Ueber Flachen mit spharischen Krummungslinien

Pages.

von Kugelgeometrischen Standpunkt aus betrachtet und die entsprechenden Flächen des Linienraumes..... 91-93
LAGUERRE. — (Œuvres) T. II 158-161
LINDELÖF (E.). — Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions..... 190-193
LORENZ (L.). — Œuvres scientifiques. T. II, 2e fascicule..... 57-58
MAILLET (E.). — Essais d'hydraulique souterraine et fluviale..... 222-225
MAROTTE (F.). — L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne..... 281-306
MATHEWS. — *Voir* Gray and Mathews.
MORS (B.). — Valeur approximative d'une intégrale définie..... 154-156
MÜLLER (C.) und PRESLER (O.). — Leitfaden der Projektions-Lehre. 73-74
NETTO (E.). — Elementare Algebra..... 129-130
OCAGNE (M. D'). — Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques..... 72-73
PERRY (J.). — Practical Mathematics..... 281
PFISTER (A.). — Die geodätischen Linien einer Klasse von Flächen deren Linienelement der Liouville'schen Typus hat..... 76-78
PICARD (E.). — La Science moderne et son état actuel. 317
— Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences. 121
PIONCHON (J.). — Grandeurs géométriques..... 130
POINCARÉ (H.). — La Science et l'hypothèse. La valeur de la Science.. 185-189
— Wissenschaft und Hypothese. Deutsche Ausgabe mit Anmerkungen von F. und L. Lindemann..... 30-31
PRESLER (O.). — *Voir* Müller und Presler.
QUIDDE (W.). — Ueber Gauss'sche Kreise auf Rotationsflächen..... 89-90
REICHEL (O.). — Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie..... 167
RIECKE (E.). — Beiträge zur Frage des Unterricht in Physik und Astronomie..... 281
RIEDLER (A.). — Zur Frage der Ingenieur..... 281
ROUSE BALL (W.). — Histoire des Mathématiques. Traduction française par L. Freund, t. I..... 318
SALMON (G.). — Analytische Geometrie der Kegelschsnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, frei bearbeitet von W. Fiedler. 6e édition, 2e Partie..... 75
SAUERBECK (P.). — Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach der Methoden von Jean Paul de Gua de Malves..... 157-158
SCHILLING (F.). — Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere über die Photogrammetrie..... 281
SCHLOMILCH (O.). — Uebungsbuch zum Studium der hoheren Analysis. Erster Theil, 5e edition..... 89
SEGUIER (J. DE). — Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits..... 94-95
SELIVANOFF (D.). — Lehrbuch der Differenzenrechnung..... 306-307
STIELTJES. — *Voir* Hermite et Stieltjes.
STOLZ (O.) und GMEINER (A.). — Einleitung in die Funktionenlehre.
I. Abteilung..... 153-154
II. Abteilung..... 336-337

Pages.

TANNERY (J.). — Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 25-29
TEIXEIRA (G.). — Obras. T. I 29-30
Verhandlungen der Breslauer Naturforscher-Versammlung uber den naturwissenchafthichen und mathematischen Unterricht an der boheren Schulen 281
Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker Kongresse zu Heidelberg (1904), herausgegeben von A. Krazer 217-222
VINTEJOUX (F.). — Nouvelles Tables d'intérêts composés et d'annuités et Précis de la théorie et de la pratique des opérations financières à long terme 99-101
VIVANTI (G.). — Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations, traduites par A. Boulanger 19-21
WHITAKER (E.). — A Treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies 80-84
WEBER (H.) und WELLSTEIN (J.). — Encyclopädie der Elementar-Mathematik. Erster Band, bearbeitet von H. Weber 161-166
WELLSTEIN (J.). — *Voir ci-dessus.*
Bulletin bibliographique 88, 119, 152, 183, 215, 247, 278, 323, 338

MÉLANGES.

ANONYME. — Paul Tannery 101-104
BOUSSINESQ (J.). — Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques 131-151
CLAIRIN (J.). — Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, z)$ 177-183
DARBOUX (G.). — Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable 34-35
— Sur les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution 104-129
DOLBNIA (J.). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair 203-214
ESTANAVE (E.). — Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution définies par M. G. Darboux 225-246
KOLLROS (L.). — Sur l'approximation périodique des irrationnelles cubiques 91-94
LEBESGUE (P.). — Remarques sur la définition de l'intégrale 272-275
LELIEUVRE. — Sur quelques questions concernant les fonctions elliptiques. 308-310
LE VAVASSEUR (R.). — Sur l'énumération des sous-groupes du groupe linéaire homogène, à quatre variables : sous-groupes à un et deux paramètres 197-203
MEDAILLE GUCCIA 55-56
Préparation d'une édition complète des Œuvres de Leibniz 278
ZORETTI (L.). — Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques 276-277

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXIX.

36416 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1904 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIX. — ANNÉE 1905.

(XXXIXe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE. IIe série. Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, éditeur [1].

Tome XXVIII; 1895.

Visalli (P.). — [N² I *g* ref. P6*a*]. Sur les congruences engendrées par deux plans ponctuels en correspondance (1, 2). (114-126).

Ferrini (R.). — [T7*a*]. Sur le théorème de Lord Kelvin relatif au calcul des conducteurs électriques. (194-199).

Kantor (S.). — [P4 ref. Q2]. Sur les transformations quadratiques périodiques dans l'espace de *r* dimensions. (244-263, 298-312).

Suite à la Note du Tome XXVII, page 760.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVIII, p. 24.

Visalli (*P.*). — [N° 1 *f* ref. P6*a*]. Sur certaines congruences de la deuxième classe. Note I (264-270, 319-323).

Crotti (*F.*). — [J2*a*. *e*]. Le postulatum de l'impartialité mis à fondement de la théorie de Gauss pour les erreurs accidentelles. (271-293).

Vivanti (*G.*). — [O6*g*]. Sur les surfaces à courbure moyenne constante. (353-364).

Pieri (*M.*). — [N° 2 ref. Q2]. Sur le problème des espaces sécants. Note III (441-454).

A un espace [*s*] sont imposées une condition fondamentale arbitraire et celle de couper un espace donné [*r*] suivant un [*r* − 1] appartenant à une forme fondamentale donnée. Cette condition composée est exprimée par l'auteur au moyen (somme) de plusieurs conditions fondamentales *simples*.

Notes précédentes du même auteur sur le même sujet : I, Tome XXVI, page 534 ; II, Tome XXVII, page 108.

Levi-Civita (*T.*). — [J4 ref. H1*d*]. Sur les groupes d'opérations fonctionnelles. (458-468).

Étant A une opération, on définit de la manière usuelle un *groupe* d'opérations. L'auteur considère un groupe formé par les opérations représentables par $\varphi(A)$, étant φ une fonction analytique. Mais, afin que le groupe soit déterminé, il faut que la loi de multiplication soit établie, c'est-à dire qu'il soit fixé quelle est l'opération $\varphi(A)$ qu'on doit prendre comme produit des deux opérations $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$. L'auteur se borne au cas où l'on pose

$$\varphi(A) = \Pi[\varphi_1(A), \varphi_2(A), A], \tag{1}$$

en prenant ainsi le produit comme fonction analytique des facteurs; et aussi il borne ses recherches aux groupes définis par des équations différentielles, en cherchant quelles sont les équations

$$W\left[\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots, A\right] = 0,$$

pour lesquelles $\varphi(A)$ est une solution en même temps que $\varphi_1(A)$ et $\varphi_2(A)$. Il trouve que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de groupes continus est que la loi de multiplication ait la forme

$$\varphi = \lambda[\lambda(\varphi_1) + \lambda(\varphi_2)], \tag{2}$$

λ étant une fonction arbitraire et $\bar{\lambda}$ son inverse. Pour toute loi de multiplication comprise en (2) les équations qui définissent le groupe sont du type

$$p_0(A)\frac{d^2\lambda(\varphi)}{dA^2} + \ldots + p_r(A)\bar{\lambda}(\varphi) = 0.$$

Pour reconnaître si une loi (1) de multiplication a la forme (2), on a les conditions (nécessaires et suffisantes)

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2, A) = \Pi(\varphi_2, \varphi_1, A),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2} \log \frac{\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}}{\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2}} = 0.$$

En dehors des propriétés relatives aux groupes, on déduit des résultats précédents :

1° Que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'équations dont les intégrales soient liées par

$$\varphi = \Pi(\varphi_1, \varphi_2, A)$$

est que Π ait la forme (2);

2° Que si, entre trois intégrales de $W = 0$, il y a une relation de la forme (2), en posant $\varphi = \lambda(\psi)$, l'équation transformée en ψ est linéaire.

Pascal (*E.*). — [F1*g*]. Sur les fonctions elliptiques σ paires. (489-493).

Expression des σ paires. Résumé d'un travail plus étendu que l'auteur annonce comme étant à publier dans les *Annali di Matematica.*

Levi-Civita (*T.*). — [J4]. Sur les groupes d'opérations fonctionnelles et sur l'inversion des intégrales définies. (529-544, 565-577).

On dit que A est une opération fonctionnelle transformant $v(y)$ en $u(x)$, si l'on a

$$u(x) = A\,v(y).$$

Dans ce travail l'opération est supposée être une intégration définie suivant une ligne l, et par conséquent

$$u(x) = A\,v(y) = \int_l a(x, y)\,v(y)\,dy,$$

où $a(x, y)$ est appelée *la fonction caractéristique.* L'opération

$$A\,v(x) = \int_l a(x, y)\,v(x)\,dx$$

est appelée *associée* de A.

Étant

$$Av = \sum_0^n p_r(y)\,v^{(r)}(y)$$

une forme différentielle linéaire, où les p sont des fonctions régulières de y, une opération

$$A(v(y)) = \int_l a(x, y)\, v(y)\, dy$$

a la propriété

$$A\Delta v(y) = \Delta A v(y),$$

alors et alors seulement que la fonction caractéristique $a(x, y)$ satisfait à certaines conditions de régularité et à l'équation

$$(1) \qquad \sum_0^n (p_r(x) \frac{\partial^r a(x, y)}{\partial x^r} - (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial y^r} [a(x, y)\, p_r(y)]) = 0.$$

Ces opérations, permutables avec Δ forment un groupe et à l'exception d'une classe spéciale d'opérations, déjà étudiée par M. Pincherle, tout groupe défini par une équation d'ordre fini n est compris dans la (1) et est, par conséquent, permutable avec une forme différentielle.

Les opérations du groupe permutable avec Δ transforment les solutions de toute équation

$$(2) \qquad (\Delta + t)\, v(y) = 0,$$

t étant une constante arbitraire, en solutions de la même équation, et les équations

$$(\Delta' - t)\, v(y) = 0,$$

où Δ' est la forme adjointe de Δ, ont la même propriété par rapport aux opérations A' associées des A.

Si Δ est une forme linéaire du premier ordre, l'équation (1) est aussi du premier ordre. Dans ce cas, l'auteur se propose l'inversion de l'intégrale

$$w(z) = \int_l a(z, y)\, v(y)\, dy,$$

qu'il ramène à celle de l'intégrale plus simple

$$w(\zeta) = \int_\gamma \Phi(\zeta - \eta)\, v(\eta)\, d\eta,$$

c'est-à-dire à déterminer une fonction $\Phi(\xi - \zeta)$ et une ligne λ de manière que que l'on ait

$$v(\xi) = \int_\lambda \Phi(\xi - \zeta)\, w(\zeta)\, d\zeta.$$

La fonction $\Phi(\xi - \zeta)$ doit être déterminée de façon que l'opération dont la fonction caractéristique est

$$\int_\gamma \Phi(\xi - \zeta)\, \Phi(\zeta - \eta)\, d\zeta,$$

et qui est le *produit* (fonctionnel) de celles qui ont respectivement pour fonctions caractéristiques φ et φ, soit l'*identité*; comme il a assigné précédemment

la forme que doivent avoir de telles fonctions, il pose

$$\int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta)\,\Phi(\zeta - \eta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i(1 - e^{\xi - \eta})} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{\infty} e^{t(\xi - \eta)}.$$

Pour satisfaire à cette relation, il observe que les équations (2) se réduisent dans le cas actuel à

$$(3) \qquad (D + t)\,v_1(\eta) = 0,$$

D étant la dérivation simple, et, par suite, la transformée de la fonction

$$v_1(\eta) = Ce^{t\eta}$$

doit avoir aussi la même forme

$$w_1(\zeta) = C'e^{t\zeta}.$$

Cela lui permet de poser

$$\Phi'(\xi - \zeta) = \sum_{0}^{\infty}{}_t\, C_t e^{t(\xi - \zeta)}$$

avec

$$C_t = \frac{1}{2\pi i \int_{\lambda'} \Phi(\zeta)\,e^{t\zeta}\,d\zeta},$$

la ligne λ' étant prise de manière que l'une au moins des deux séries

$$\sum C_t e^{t(\xi - \zeta)}, \quad \sum C_t e^{t(\xi - \zeta)}$$

soit convergente.

Suit l'application au cas où la ligne λ est une circonférence de rayon R, ayant le centre à l'origine et $\Phi(\zeta)$ a toutes les singularités dans un cercle de rayon $< \frac{R}{3}$.

Enfin l'auteur montre comment la propriété invariantive des équations (2) peut servir de fondement pour l'inversion de l'intégrale dans le cas général, ainsi que celle des (3) a servi dans le cas particulier où la (1) était du premier ordre.

Ciani (*E.*). — [N° I *b* ref. M¹ 6]. Sur les séries quadratiques de coniques enveloppant la quartique plane. (659-685).

L'équation d'une telle série est

$$\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda b_i^2 + c_i^2 = 0,$$

et

$$f = (b_i^2)^2 - a_i^2 c_i^2 = 0$$

est celle de la quartique enveloppée. Toute conique de la série est quadritan-

gente à la quartique et les huit points de contact de deux coniques de la série avec l'enveloppe sont sur une même conique. La quartique étant donnée, il y a soixante-trois séries de coniques quadritangentes et chaque série contient six coniques dégénérées qui sont six couples de droites bitangentes. Les coniques d'une série peuvent se regarder comme les coniques polaires des points d'une courbe φ par rapport à une courbe ψ et cela de deux manières différentes :

1° Étant φ une conique et ψ une cubique;
2° Étant φ une droite et ψ une quartique.

Ces deux cas sont examinés séparément par l'auteur, qui étudie ensuite les configurations formées par des groupes de bitangentes.

Beltrami (*E.*). — [R6*b*α]. Sur les équations dynamiques de Lagrange. (744-752).

L'auteur rappelle le principe

$$\sum (X - m x'') \delta x = 0,$$

dont Lagrange déduit les équations du mouvement et qui a été trop souvent laissé de côté dans les applications qu'on fait de ces équations. Ce principe, en coordonnées générales, est

$$\delta L = \left(\sum \frac{dT}{dq} \delta q \right) = \delta T,$$

et il est particulièrement avantageux dans les cas où l'on peut diviser les variables q en deux groupes distincts q et r.

On a alors

$$\delta L = \left(\sum \frac{dT}{dq} \delta q + \sum \frac{dT}{dr} \delta r \right) = \delta T,$$

où

$$\delta L = \sum Q \delta q + \sum R \delta r,$$

Q et R étant les composantes suivant les coordonnées q et r respectivement, et, en introduisant des nouvelles quantités ρ par les relations

$$\rho = \frac{dT}{dr},$$

on a

$$\sum \rho \, dr = \sum \frac{dT}{dr} dr,$$

$$d \sum \rho r = \sum r \, d\rho + dT = \sum \frac{dT}{d\alpha} d\alpha,$$

α étant l'une quelconque des quantités qui entrent en T, exception faite pour les r.

En posant

$$U = \sum \rho r' - T,$$

on a

$$r = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Cette transformation conduit aux équations dynamiques

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q} - \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right),$$

$$R = \frac{\partial U}{\partial r} - \rho,$$

$$o = \frac{\partial U}{\partial \rho} - r.$$

Dans le cas où T ne contient pas les r, les équations peuvent se réduire à une forme qui contient comme cas particulier celles de Thomson et Tait (page 323, 2e édition du *Treatise on natural Philosophy*) et celles de C. Neumann (*Hydrod. Unters.*, 1883, et *Beiträge zu einzelnen Theilen der Math. Physik*, 1893).

Cerri (*A.*). — [T3*a*]. Sur les équerres d'arpenteur à reflexion. (796-803).

Schiaparelli (*G.*). — [U]. Sur quelques nouvelles apparences dans la planète Vénus. (816-820).

Levi-Civita (*T.*). — [H1*d*]. Quelques observations sur la Note : *Sur les groupes d'opérations fonctionnelles*. (864-873).

Si, φ_1, φ_2 étant deux intégrales de l'équation

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^r\varphi}{dA^r}, A\right) = o,$$

on a que

$$\varphi = H(\varphi_1, \varphi_2, A)$$

en est aussi une intégrale, on peut, par un changement de la fonction

$$\varphi = \lambda(\psi)$$

(λ pouvant contenir la variable indépendante A), réduire l'équation à la forme linéaire. La démonstration de ce théorème que l'auteur a donnée dans sa Note : *Sui gruppi di operazioni funzionali* (*voir* ce Tome, p. 458), est assujettie à certaines restrictions, relatives à la fonction H, qui, tout en laissant son importance au théorème pour ce qui se rapporte à la théorie des groupes, la diminuent considérablement au point de vue de la théorie des équations différentielles. Ici l'auteur, dont l'attention a été rappelée sur ce point par M. Vessiot, donne de ce théorème une démonstration qui lui laisse sa généralité. Suit une lettre de M. Vessiot, contenant une autre démonstration.

Bassi (*A.*). — [D4]. Sur les racines de la dérivée d'une fonction holomorphe de genre *zéro* ou *un*. (979-985).

Pour les fonctions de genre *un*, n'ayant pas de racines réelles, il ne peut exister des racines de la dérivée dans le quadrant opposé à celui qui renferme des racines de la fonction. Lorsque les racines de la fonction se trouvent toutes dans un octant, celles de la dérivée peuvent seulement se trouver dans cet octant même et dans les deux qui lui sont adjacents.

Ascoli (*G.*). — [Aref. II]. Sur les fondements de l'Algèbre. (Première Partie). (1060-1071).

Bassi (*L.*). — [D4]. Sur les racines de la dérivée d'une fonction holomorphe de genre quelconque. (1119-1123).

Depuis les travaux de Laguerre et d'autres, et ceux plus récents de Césaro, on sait que pour les fonctions de genre quelconque, n'ayant pas de racines nulles et dont les zéros sont sur une droite passant par l'origine, les zéros de la dérivée sont sur cette même droite. Le théorème est vrai pour les fonctions de genre 0 et 1, aussi dans le cas qu'il y ait des racines nulles. L'auteur se propose de chercher si la même propriété a lieu, dans ce même cas, pour des fonctions de genre quelconque et il arrive à une conclusion négative.

Tome XXIX; 1896.

Somigliana (*C.*). — [S2*ea*]. Sur l'expression de la force vive dans le problème du mouvement d'un corps rigide dans un fluide incompressible, illimité. (147-156).

L'auteur donne les formes réduites que prend l'expression de T dans les cas où le corps satisfait à des conditions de symétrie: en posant chaque fois la condition que T soit invariable pour les transformations qui conduisent le corps sur lui-même. Il traite successivement le cas où il y a un axe de symétrie de période *n* (axe de première espèce), puis l'autre cas où il y a aussi une réflexion sur un plan normal à l'axe (axe de deuxième espèce de période *n*). De ces deux cas fondamentaux dépendent les autres plus particuliers, où il y a plusieurs axes et plusieurs plans et les opérations correspondantes peuvent se classifier en trois genres de groupes de première espèce et neuf de groupes de deuxième espèce, suivant la division adoptée par Schoenflies. Pour chacun des cas, l'auteur indique la forme de T.

Bardelli (*G.*). — [R4]. Sur l'emploi des coordonnées obliques dans la Mécanique rationnelle. (174-185).

Enriquez (*F.*). — [H5*e*]. Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre qui deviennent intégrables en étant connue une intégrale particulière. (257-299).

Cela peut arriver dans cinq cas que l'auteur trouve d'abord par voie géométrique, en considérant les *n* intégrales (d'un système fondamental) y_1, y_2, y_3

y_i de l'équation

$$A_0 y + A_1 y' + A_2 y'' + A_3 y''' + A_4 y^{IV} = 0$$

comme coordonnées homogènes projectives d'un point de l'espace.

A toute intégrale

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_4 y_4$$

correspond un point. Les transformations du groupe Picard-Vessiot sont représentées par les homographies d'un groupe contenu dans l'espace. L'équation est intégrable lorsque ces homographies laissent invariables au moins un point, une droite passant par ce point et un plan passant par cette droite. Lorsqu'une intégrale particulière est donnée, le groupe se réduit à un sous-groupe, qui ne change pas cette intégrale et, afin que l'équation soit intégrable, les homographies doivent alors être telles qu'en fixant un point, il en suive nécessairement qu'une droite (au moins) passant par ce point et un plan par cette droite restent fixes aussi. De cette manière, l'auteur arrive à assigner cinq cas auxquels correspondent autant de cas d'intégrabilité de l'équation. La réduction se fait toujours aux quadratures et à une ou deux équations de Riccati, à l'exception du dernier cas où l'on a, entre quatre intégrales convenablement choisies et constituant un système fondamental, une relation

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 + 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = a e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(a étant une constante et φ une fonction algébrique des coefficients A_i), qui toutefois ne diffère pas essentiellement du cas où le second membre est zéro, déjà étudié par Goursat.

Visalli (*P.*). — [P1, 2 ref. Q2]. Sur les collinéations et corrélations ordinaires et exceptionnelles en deux espaces de quatre dimensions. Note I (351-359), Note II (459-459), Note III (521-528, 559-565).

Il y a neuf collinéations exceptionnelles et quinze corrélations exceptionnelles, qui sont toutes assignées et étudiées par l'auteur.

Pincherle (*S.*). — [J4*g*]. Les opérations distributives et les homographies. (397-405).

Somigliana (*C.*). — [T2*a*]. Sur les déformations élastiques des solides cristallins. (423-435).

L'auteur démontre l'existence d'une série de solutions des équations

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial x_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial x_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial x_z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial y_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial y_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial y_z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial z_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial z_z} = 0$$

(H étant le potentiel des forces élastiques). Il emploie la méthode de Poincaré, qui consiste à prouver, par une application du principe de Dirichlet, l'existence d'une série de solutions, aux moyens desquelles on peut composer la solution générale. L'auteur se borne au cas d'un corps isotrope limité par une surface sphérique et à celui d'une couche sphérique. Il montre les relations qui passent entre ces méthodes d'intégration et celles de Lamé. La détermination des déplacements u_i, v_i, w_i est faite en observant qu'on peut partir de la condition de rendre minimum l'intégrale

$$-\int H\,ds$$

Pascal (*E.*). — [B1*c*]. Sur les relations entre les déterminants formés avec les mêmes éléments. (436-438).

On suppose de faire des permutations entre les éléments dans k colonnes (en laissant ces éléments dans leurs colonnes respectives).

Cazzaniga (*T.*). [B1*c*]. Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique. (541-558).

Bertini (*E.*). — [N1*c* ref. Q4*a*]. Sur les configurations de Kummer plusieurs fois tétraédroïdales. (566-570).

Ces configurations correspondent à elles-mêmes dans six complexes donnés, deux à deux en involution. L'auteur trouve qu'il y en a ∞ qui sont deux fois tétraédroïdales, divisées en quarante-cinq séries; ∞ qui le sont trois fois (vingt séries); soixante qui le sont quatre fois et trente qui le sont six fois. Il n'y en a pas qui soient cinq fois ou plus de six fois tétraédroïdales. L'auteur énonce aussi ces résultats sous une forme immédiatement applicable à la théorie des complexes.

Gobbi (*U.*). — [A1*a*]. L'élément de simple épargne dans l'assurance sur la vie. (612-621).

Vivanti (*G.*). — [H9*d*]. Contribution à la théorie des équations aux dérivées partielles du 2e ordre. (777-792).

L'auteur donne la forme que doivent avoir en général les équations du 2e ordre, à un nombre quelconque de variables, afin que leur intégration puisse se réduire à celle d'un système linéaire du premier ordre et il fait, comme application, la réduction effective à un système linéaire pour la forme particulière d'équation

$$\sum_i R_i^2 p_{ii} + 2\sum_{i,h} R_i R_h p_{ih} + U = 0,$$

p_{ih} étant les dérivées secondes de z par rapport aux n variables $x_1, \ldots, x_n$ et R_i, U étant des fonctions de z, des x_i et des premières dérivées p_i.

Beltrami (*E.*). — [D6*f*]. Sur la théorie des fonctions sphériques. (793-799).

Tome XXX: 1897.

Del Prete (*G.*). — [P1 ref. Q2]. Les correspondances projectives dégénérées. Note I (400-409), Note II (464-479).

Détermination des collinéations dégénérées entre deux espaces de r dimensions, par une voie purement géométrique. Étude analytique de ces collinéations.

Montesano (*D.*). — [P4*g*]. Sur deux transformations rationnelles et involutives de l'espace, du 4e ordre et de genre zéro. (563-571).

Correspondances dans lesquelles aux plans correspondent des surfaces de Steiner. Il y en a deux. L'une a un cône uni du second ordre et une droite unie isolée, et donne naissance à un complexe linéaire spécial. L'autre a une conique unie et un point uni isolé; elle donne naissance à un complexe du troisième degré.

Bardelli (*G.*). — [R2*b*]. Sur la détermination géométrique du point déterminé par un système de plans non concurrents, par la méthode des moindres carrés. (1014-1015).

Notice abrégée des résultats.

Pincherle (*S.*). — [J4*g*]. Observations sur le calcul fonctionnel distributif. (1031-1039).

Une opération fonctionnelle distributive A peut se définir, ou par les fonctions qu'elle fait correspondre aux puissances de la variable, ou bien par son développement suivant les puissances du symbole D de dérivation, c'est-à-dire par

$$A(x^n) = \xi_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

ou bien par

$$A(\varphi) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n(x)}{n!} D^n \varphi,$$

les fonctions $\xi_n(x)$ et $\alpha_n(x)$ étant, en conséquence, liées entre elles par les relations

$$\xi_n = \alpha_0 x^n + n\alpha_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n.$$

L'auteur se propose de déterminer les fonctions invariantes de l'opération A. En supposant les ξ_n données par

$$\xi_n = \sum_{\nu=3}^{\infty} a_{n\nu} x^{\nu} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

et que la série double $\sum_{n,\nu} a_{n\nu}$ soit absolument convergente, les fonctions invariantes

$$\omega = \sum g_\nu x^\nu$$

sont données par un système d'équations linéaires à un nombre infini d'inconnues, sous la condition que le déterminant infini

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} a_{00} z - 1 & a_{01} z & \ldots \\ a_{10} z & a_{11} z - 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

soit nul. Ce déterminant est une fonction (transcendante) entière de z.

Suivent des propriétés qui sont particulières aux opérations ayant pour fonctions invariantes les puissances de la variable et à celles pour lesquelles dans le tableau des coefficients $a_{n\nu}$ sont nuls tous ceux qui se trouvent d'un côté d'une parallèle à la diagonale principale, opérations qui se distinguent en deux types suivant que les coefficients $a_{n\nu}$ sont à la droite d'une parallèle située à droite, ou bien à la gauche d'une située à gauche de la diagonale principale. L'auteur relève aussi certaines ressemblances et certaines différences qui passent entre la théorie des opérations distributives et celle des homographies (dans un espace d'un nombre infini de dimensions).

Cazzaniga (*T.*). — [B1*c*β]. Sur les déterminants gauches. (1303-1308).

Ferrini (*R.*). — [T7*a*]. Sur la distribution du courant alterné dans un circuit comprenant un arc multiple, avec effets d'auto-induction et de capacité dans les conducteurs. (1346-1351).

Tome XXXI; 1898.

Veneroni (*E.*). — [N¹1*f*]. Sur une classe de surfaces-complexe. (25-26).

On peut représenter sur le plan une congruence de degré n contenue dans un complexe linéaire et douée d'un faisceau de droites $(n-1)^{\text{uples}}$. Si le complexe est spécial, d'axe r et si, à une droite p de la congruence, on fait corres-

pondre le point de contact de cette droite avec l'enveloppe, qui est dans le plan rp, on a une représentation de la surface focale de la congruence, qui est une surface-complexe. Klein [*Ueb. die Abbildung der Complexfläch. vierter Ordn. und vierter Kl.* (*Math. Ann.*, t. II) a traité le cas d'une congruence spéciale du 1e degré. L'auteur étend les résultats de Klein, et la représentation plane qu'il obtient donne naissance à des systèmes remarquables de courbes.

Ciani (*E.*). — [Q 4*a* ref. M¹ 6 *l*α]. Sur une certaine configuration de points et de droites, relative à la quartique plane. (310-311).

Configuration formée par les droites polaires des vingt sept points ou une bitangente de la quartique est rencontrée par les autres bitangentes.

Ciani (*E.*). — [Q 4*a* ref. M¹ 6 *l*α]. Les bitangentes de la quartique plane étudiées au moyen de la configuration de Kummer. (312-324).

La configuration de Kummer peut servir (par section) à l'étude des bitangentes, en vertu du théorème :

Par une quartique plane générale, on peut conduire ∞^3 *surfaces de Kummer* (*Monatsberichte d. Berl. Akad. d. Wissensch.*, 1864, p. 246).

L'auteur énonce les résultats en réservant les démonstrations et les détails pour un autre travail (Mémoires de l'*Instituto Lombardo*, 1898, p. 86).

De Marchi (*L.*). — [T 4*b*]. Sur un Mémoire de M. S. Arrhenius, relatif aux causes des variations des climats. (466-478).

Ferrini (*R.*). — [T 4*c*]. Sur la transmission de la chaleur à travers les murailles. (479-496).

Cazzaniga (*T.*). — [B 1*c*]. Relations entre les mineurs d'un déterminant de Hankel. (610-614).

Severini (*C.*). — [H 2]. Sur l'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre. (657-667).

Méthode pour construire une série de polynomes rationnels entiers, qui puisse représenter la courbe intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

f étant réelle, finie et absolument continue dans un champ fini et satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$\left| \frac{f(x, y) - f(x, y')}{y - y'} \right| < K.$$

Une telle courbe intégrale est une courbe limite de la variété de courbes intégrales des équations

$$\frac{dy}{dx} = P_n(x, y),$$

les P_n étant des fonctions approchées à f et pouvant aussi être remplacées par des polynomes.

Pieri (*M.*). — [K7]. Nouvelle manière de développer déductivement la Géométrie projective. (780-798).

Développement fondé sur la notion d'*homographie*, posée comme primitive, ou, pour mieux dire, donnée par des postulats. Cette notion vient ainsi à jouer dans cette exposition un rôle semblable à celui qu'a le mouvement dans la Géométrie élémentaire.

Severini (*C.*). — [H2]. Sur l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires du premier ordre. (950-959).

Suite de la Note qui est à la page 657. Ici l'auteur indique quelle doit être l'approximation des P_n à la fonction f, afin que la courbe intégrale de

$$\frac{dy}{dx} = P_n(x, y)$$

ait une approximation déterminée à celle de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Cazzaniga (*T.*). — [D4*b*]. Sur le théorème de Weierstrass dans le champ elliptique. (1065-1071).

En appliquant une méthode donnée par Hermite (*Cours d'Analyse*, 1882), l'auteur fait la décomposition en facteurs primaires d'une fonction paire ou impaire, ou ayant les périodes de $\operatorname{sn} x$.

Veneroni (*E.*). — [N¹1*j*]. Sur certaines congruences de droites et sur quelques propriétés des faisceaux d'un complexe général du 3e degré. (1079-1088).

Voss [*Ueb. Complexe und Congruenzen* (*Math. Ann.*, t. IX)] avait démontré que, dans un complexe cubique, il y a une série ∞ de faisceaux. L'auteur prend pour point de départ une congruence du 9e degré qui est liée à chacun de ces faisceaux et qui est représentable sur le plan, et il déduit de cette représentation plusieurs propriétés remarquables.

Amati (*A.*). — [V9]. Sur Pierre Agnesi et sur ses filles Maria Gaetana, Maria Teresa et Paolina. (1380-1394).

Scarpis (*U.*). — [B1*c*]. Sur les déterminants de valeur maximum. (1441-1446).

Amati (*A.*). — [V9]. Honneurs centenaires à Maria Gaetana Agnesi. Projets. (1493-1520).

S. R.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série. Tome XXX; 1903 (1).

Zaremba (*S.*). — Contribution à la théorie des fonctions fondamentales. (9-26).

Les termes de la série par laquelle on résout, au moyen des polynomes sphériques, le problème de Dirichlet pour la sphère, peuvent être regardés, ainsi que l'a remarqué M. Poincaré, comme les produits, par des constantes, de certains potentiels de simples couches répandues sur la sphère.

Ces potentiels, ou *fonctions fondamentales* relatives à la sphère, jouissent de propriétés caractéristiques, dont l'une a été prise par M. Poincaré comme définition des fonctions fondamentales relatives à une surface quelconque, Mais l'existence même de ces fonctions n'était pas établie rigoureusement.

M. Le Roy, et bientôt après lui M. Stekloff, ayant étendu à des points de vue différents la notion de fonction fondamentale, ont cru pouvoir affirmer que les fonctions fondamentales qu'ils ont imaginées se réduisent à celles de M. Poincaré quand on choisit convenablement la fonction arbitraire qui intervient dans leur définition. M. Stekloff s'est ensuite aperçu que sa démonstration et celle de M. Le Roy n'étaient pas concluantes.

L'existence des fonctions de M. Poincaré n'est point mise en jeu par cette constatation, attendu que M. Zaremba l'a démontrée rigoureusement pour toute surface astreinte à vérifier certaines conditions très peu restrictives. Mais il y avait intérêt à savoir de quelles surfaces on peut affirmer en toute certitude les propositions de MM. Le Roy et Stekloff.

La conclusion du présent Mémoire est que ces propositions ne sont valables que pour les surfaces très particulières (S) pour lesquelles il existe une fonction de point $\psi(M)$ jouissant de la propriété qu'exprime l'équation

$$\psi(A)\cos\beta = \psi(B)\cos\alpha,$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVII$_2$, p. 122.

ou A et B sont deux points quelconques de la surface, α et β les angles que les normales intérieures en A et B font avec les directions AB et BA.

M. Zaremba avait remarqué après Robin (*Œuvres : Physique mathém.*, p. 89) que l'ellipsoïde est l'une des surfaces (S), ce qui permet de résoudre très simplement le problème de l'équilibre électrique sur un ellipsoïde conducteur isolé et soustrait à toute influence extérieure. Depuis MM. Hadamard et Levi-Civita ont démontré que les surfaces (S) sont toutes des quadriques.

Riquier (*Charles*). — Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels. (27-74).

Les systèmes dont il s'agit sont certains systèmes *phanéronomes*.

Voici d'abord comment l'auteur définit ces systèmes. Désignant par $x, y, \ldots$ des variables indépendantes, par $u, v, \ldots$ des fonctions de ces variables (variables et fonctions étant en nombre limité), il fait correspondre à chacune des fonctions un entier, qui est appelé *cote* de cette fonction; l'ordre total d'une dérivée, augmenté de la cote de la fonction elle-même, est dit la *cote* de cette dérivée. Cela posé, un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables $x, y, \ldots$ est dit *phanéronome*, si, moyennant un choix convenable des cotes attribuées à $u, v, \ldots$, il remplit à la fois les deux conditions suivantes :

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres et ces derniers, si l'on y considère pour un instant comme autant de variables indépendantes, $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, sont, dans un même domaine, tous développables par la série de Taylor;

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe *au-dessous* de celle du premier membre correspondant.

Sous le bénéfice de cette définition, l'auteur traite en particulier des systèmes qui possèdent la triple propriété d'être : 1° *phanéronomes;* 2° *passifs;* 3° *linéaires par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées;* il commence par établir le théorème que voici :

Étant donné un système doué de la triple propriété ci-dessus, si l'on considère les intégrales particulières répondant à des conditions initiales données, les développements de ces intégrales, effectués à partir des valeurs initiales des variables, ne peuvent manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les développements des coefficients et ceux des fonctions données figurant dans les conditions initiales.

(Dans cet énoncé, on entend par *coefficients* du système les fonctions des seules variables indépendantes qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des inconnues ou de leurs dérivées, soit comme termes indépendants de ces quantités.)

Ce théorème une fois établi, M. Riquier montre comment on pourra effectuer par cheminement le calcul des intégrales des systèmes qu'il concerne.

Guichard (*C.*). — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. Deuxième Partie. (75-132. 181-288).

Introduction. — Ce Mémoire forme la suite d'un travail publié dans ce Recueil en 1897 et 1898. Il contient le développement d'une partie des Notes publiées par l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, en 1897, 1898, 1899 et 1900.

Depuis la publication de la première Partie, les nouvelles méthodes en Géométrie ont pris une extension considérable; elles ont permis, en outre, d'établir très simplement un grand nombre de propriétés géométriques nouvelles. De là découle naturellement la division de ce Mémoire en deux parties principales.

En premier lieu, il était nécessaire de compléter la théorie générale pour la mettre en harmonie avec les résultats acquis: c'est à ce résultat que sont consacrés les sept premiers Chapitres du présent Mémoire.

Le Chapitre I contient les compléments à la théorie générale des réseaux et congruences.

Le Chapitre II renferme l'exposé de la loi des éléments orthogonaux. Ce nouveau principe me paraît devoir jouer dans la Géométrie infinitésimale un rôle aussi important que le principe de dualité dans la Géométrie algébrique.

Le Chapitre III est consacré à l'étude de certains systèmes particuliers (réseaux et congruences) dans un espace d'ordre quelconque. Quelques modifications ont été introduites à la notation adoptée dans la première partie : ces modifications s'imposaient par la nécessité de tenir compte de la loi des éléments orthogonaux. D'autre part, il était nécessaire d'indiquer quelques propriétés des *réseaux orthogonaux singuliers*.

Les Chapitres IV, V et VI sont consacrés à l'étude de ces systèmes particuliers dans les espaces à trois, quatre ou cinq dimensions. Il nous a paru inutile de poursuivre cette étude dans d'autres espaces, attendu que les éléments que nous avons introduits suffisent pour établir les propriétés géométriques de l'espace ordinaire, ce qui est au fond notre but final.

Le Chapitre VII contient l'étude des systèmes de cercles et de sphères. Cette étude nous a permis de combler une lacune de notre théorie. Autrefois, notre méthode indiquait simplement les propriétés qui ne dépendent que de la direction des éléments: c'est ainsi que dans certains problèmes nous avons signalé des réseaux qui ont même représentation sphérique qu'une surface isothermique; mais si, l'on voulait trouver la surface isothermique elle-même, il fallait recourir aux procédés ordinaires; de là une imperfection de la théorie, imperfection qui n'existe plus aujourd'hui.

En second lieu, il importait d'appliquer la théorie générale à des exemples. Les applications faites découlent toutes d'un problème unique : le problème des systèmes de sphères plusieurs fois C.

Nous avons montré les aspects variés sous lesquels se présente ce problème; nous en avons déduit un certain nombre de transformations et nous avons indiqué les relations qui existent entre ces diverses transformations. Les Chapitres VIII et IX sont consacrés à l'étude générale de ce problème.

Dans le Chapitre X, nous énumérons rapidement les propriétés des cas particuliers.

Le Chapitre XI est consacré à un cas particulier important : la théorie des

surfaces isothermiques. Ce dernier Chapitre renferme un paragraphe traitant de la déformation des quadriques de révolution; on y trouvera la démonstration des résultats indiqués par l'auteur dans une Note insérée le 20 janvier 1899 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Korn (*A.*). — Les vibrations universelles de la matière. Théorie mécanique de la gravitation, du frottement dans les masses continues et des phénomènes électriques. (133-154).

L'auteur se propose d'expliquer divers phénomènes physiques à l'aide d'hypothèses qui se rattachent aux expériences connues de M. C.-A. Bjerkness et qui tendent à remplacer les actions à distance par des actions se propageant d'une manière continue dans un éther incompressible et infini.

La matière pondérable étant supposée formée de particules faiblement incompressibles, nageant dans ce milieu, le système admet un nombre infini de vibrations dont les durées

$$T_j = 2\pi \frac{\alpha}{k_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

dépendent du nombre, de la forme et de la situation relative des particules compressibles; la constante α est un coefficient propre à la matière pondérable; les k_j sont des nombres déterminés qui croissent indéfiniment avec l'indice j.

Ces vibrations peuvent être regardées comme la cause des forces apparentes que les particules de la matière pondérable semblent exercer les unes sur les autres. Comme il y a superposition des forces correspondant aux vibrations d'ordres différents, il suffit d'étudier chaque vibration séparément.

L'auteur retrouve au préalable les deux propositions suivantes :

I. *Le centre de gravité d'un système de particules faiblement compressibles se meut en ligne droite avec une vitesse constante.*

II. *Pour les forces apparentes entre deux particules faiblement compressibles, il y a égalité entre l'action et la réaction.*

Il traite ensuite des vibrations d'ordre zéro et des vibrations d'ordre 1 :

III. *La vibration de l'ordre zéro produit dans un système de particules faiblement compressibles des forces attractives entre deux particules i et k,*

$$\frac{c^2}{\rho_{ik}},$$

ρ_{ik} désignant la distance des particules i et k, et c^2 une constante positive, qui ne dépend nullement des ρ_{ik}; on suppose que les particules soient des sphères de même rayon R *et que* R *soit extrêmement petit en comparaison des distances ρ_{ik}.*

On retrouve ainsi la loi de la gravitation newtonienne.

Voici quel est le résultat relatif à la vibration d'ordre 1 :

V. *Deux systèmes de particules faiblement compressibles, composés respec-*

tivement de n et de n' particules, exerceront l'un sur l'autre, en conséquence d'une vibration du premier ordre, une force répulsive

$$\frac{\beta n n'}{\rho^2},$$

où ρ représente la distance des deux systèmes et β une constante positive qui ne dépend ni de ρ ni des nombres n et n' ; on suppose que les particules soient des sphères de même rayon R, *que* R *soit très petit par rapport aux distances des particules de même système et celles-ci très petites par rapport à ρ.*

C'est la force répulsive de Maxwell, qui permet d'expliquer les phénomènes du frottement dans les gaz.

Quant à l'explication des phénomènes électriques, M. Korn la cherche dans les vibrations de l'ordre zéro, en supposant que les corps *conducteurs* sont des masses continues douées de frottement. Cette théorie hydrodynamique, où interviennent les équations de Maxwell-Hertz, lui paraît à l'abri de diverses objections qui ont été faites contre l'assimilation des petits corps électrisés avec des sphères pulsantes.

L'auteur ne s'est point occupé dans le présent Mémoire des vibrations de l'ordre 2; il dit seulement que ces vibrations sont la cause des forces capillaires.

Cotton (*Émile*). — Application de la géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du déplacement d'un solide autour d'un point fixe. (155-179).

Extrait de l'Introduction. — Le Chapitre I de ce travail est consacré à des notions de Géométrie cayleyenne infinitésimale. Je suppose connus les principes de cette Géométrie, que M. Darboux a exposés dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. Après avoir précisé les notations, je définis la courbure et la torsion cayleyennes d'une courbe. Je donne ensuite une généralisation des formules de Frenet : les coordonnées des sommets d'un certain tétraèdre associé à un point d'une courbe gauche interviennent dans cette généralisation comme le font, dans les formules de Frenet, les cosinus directeurs des arêtes du trièdre fondamental. Je généralise enfin les théorèmes de Meusnier et d'Euler relatifs aux courbes tracées sur une surface.

Au début du Chapitre II, je considère, dans l'espace euclidien ordinaire, deux trièdres trirectangles T_1, T de même sommet O et je définis les coordonnées de T relativement à T_1. Ces coordonnées sont un système particulier de paramètres d'O. Rodrigues. Dans les paragraphes suivants, je cherche l'influence de la substitution à l'un des trièdres T ou T_1 d'un autre trièdre T' ou T'_1 invariablement lié au premier. J'établis ces formules de changement de coordonnées par un calcul direct; on pourrait les déduire également des formules de la composition des rotations.

L'interprétation géométrique de ces formules constitue l'idée fondamentale de ce travail.

Je considère les coordonnées de T relativement à T_1 comme définissant un point d'une multiplicité à trois dimensions, le *point image du système* T_1, T.

Le trièdre T se déplaçant relativement à T_1, d'une manière continue, le point image décrit une figure image du déplacement. C'est une ligne ou une surface selon que le déplacement est à un ou deux paramètres.

L'étude analytique du déplacement d'un solide ayant un point fixe O se ramène à celle du déplacement relatif de deux trièdres de sommet O : l'un T est invariablement lié au solide, l'autre T_1 à l'espace fixe. Le choix de ces deux trièdres et, par suite, de la figure image du déplacement est possible d'une infinité de façons ; il comporte, en général, six arbitraires.

Les formules du changement de coordonnées conduisent à définir, dans la multiplicité remplie par les points images, une quadrique fondamentale et à envisager cette multiplicité comme un espace cayleyen :

Les diverses figures images d'un même déplacement se déduisent de l'une d'entre elles par les mouvements dans cet espace cayleyen.

Les conséquences de cette proposition sont développées dans la fin du Chapitre II.

Je passe très rapidement sur les déplacements algébriques, pour aborder l'étude infinitésimale d'un déplacement à un paramètre. La courbure et la torsion cayleyennes d'une courbe image d'un déplacement à un paramètre sont rattachées par des relations simples aux courbures des roulettes sphériques fixe et mobile.

J'applique enfin l'étude des courbes tracées sur une surface de l'espace cayleyen à la recherche des propriétés infinitésimales des déplacements à un paramètre compris dans un déplacement à deux paramètres.

Kapteyn (*W.*). — Sur un cas particulier de l'équation différentielle de Monge. (289-329).

Ce Mémoire fait suite à un travail antérieur sur le même sujet (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1900). L'auteur recherche les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Hr + Lt + M = 0$$

admette deux intégrales intermédiaires et détermine ces intégrales elles-mêmes.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur la détermination des fonctions algébriques uniformes sur une surface de Riemann donnée. (331-348).

Dans divers travaux antérieurs, l'auteur s'est occupé du problème dit *de Riemann*, relatif à la théorie des équations linéaires :

Étant donnés $\sigma - 1$ points $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ et σ substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ linéaires et homogènes par rapport à n variables, on joint les points $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ au point $a_{\sigma+1}$ par des coupures $l_1, \ldots, l_\sigma$. On demande de déterminer n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de la variable complexe x qui soient holomorphes dans le voisinage de tout point x, sauf les points $a_1, \ldots, a_\sigma$, qui éprouvent les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ quand la variable x franchit les cou-

pures $l_1, \ldots, l_\sigma$ une fois dans le sens positif et qui, aux points $a_1, \ldots, a_{\sigma-1}$ eux-mêmes, ne soient pas indéterminées.

Comme toute fonction algébrique d'une variable vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, il est naturel d'appliquer à la théorie des fonctions algébriques les résultats relatifs au problème précédent.

M. Schlesinger les applique ici au célèbre problème de Riemann :

Déterminer une fonction algébrique y de la variable x qui soit uniforme sur une surface R *à m feuillets et aux points de ramifications $a_1, \ldots, a_\sigma$, supposés tous simples.*

Il s'agit de déterminer convenablement les polynomes de degré ν

$$\varphi_k(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{k\lambda} x^\lambda \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

qui figurent comme coefficients dans l'équation

$$F(y, x) = \varphi_0(x) y^m + \varphi_1(x) y^{m-1} + \ldots + \varphi_m(x) = 0,$$

par laquelle la fonction inconnue y sera définie. Si l'on fait $A_{00} = 1$, on aura à trouver $(m+1)(\nu+1) - 1$ constantes $A_{k\lambda}$.

Le discriminant Q de l'équation $F = 0$ (relatif à y) doit être de la forme

$$Q = (x - a_1)^{\ldots} (x - a_\sigma)^{\ldots} X^2,$$

X étant un polynome en x de degré $(m-1)(\nu-1) - p$ si p est le genre de la surface R.

En écrivant qu'il en est ainsi, on obtient un système de $2\nu(m+1)+1$ équations entre les coefficients $A_{k\lambda}$ et ceux de X; c'est le système $(M) = 0$, dans lequel le nombre $N = 2m\nu + p + 2$ des inconnues surpasse de $2\nu - p + 1$ celui des équations. Suivant un procédé indiqué par Kronecker, on peut remplacer le système $(M) = 0$ par une équation résolvante

$$R_1 R_2 \ldots R_N = 0,$$

chacun des facteurs R_h (dit *de rang h*) définissant celles des solutions de $(M) = 0$ qui sont fonctions algébriques de $a_1 \ldots a_\sigma$ et qui, en outre, dépendent de $N - h$ quantités arbitraires. La fonction cherchée y, uniforme sur la surface R, reprenant m fois chaque valeur, comporte $2\nu - p - 1$ paramètres arbitraires. On n'a donc besoin que du facteur R_M de rang $N - 2\nu + p - 1$ du système $(M) = 0$.

Dans le domaine de rationalité des $a_1, \ldots, a_\sigma$ considérés comme des variables, on décompose R_M en facteurs irréductibles dont chacun représente un système irréductible d'équations $(M_1) = 0$, $(M_2) = 0, \ldots$. Chacun de ces systèmes définit les N inconnues et en particulier les $A_{k\lambda}$ comme fonctions algébriques des $a_1, \ldots, a_\sigma$ contenant encore $2\nu - p + 1$ paramètres arbitraires, que l'on regarde comme fixés une fois pour toutes. D'après le théorème de Puiseux généralisé, les diverses solutions $A_{k\lambda}^{(i)}$ d'un système tel que $(M') = 0$ se transforment les

unes dans les autres quand on fait décrire aux $a_1, \ldots, a_\sigma$ tous les chemins fermés possibles.

Formant toutes les équations $F(y, x) = 0$ qui correspondent aux diverses solutions $A_{k\lambda}^{(1)}$, on est assuré que l'une au moins de ces équations est irréductible. Soit $A_{k\lambda}^{(1)}$ la solution qui donne cette équation irréductible

$$F_1(y_1, x) = 0,$$

et $R^{(1)}$ la surface de Riemann relative à cette équation. En faisant décrire aux points $a_1, \ldots, a_\sigma$ des chemins fermés convenablement choisis, on transformera la surface $R^{(1)}$ successivement en diverses surfaces $R^{(2)}, \ldots, R^{(q)}$ qui se déduiront toutes de l'une d'elles par *monodromie des points de ramification*, tandis que l'équation $F_1 = 0$ sera changée en autant d'autres équations $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$. Or M. Schlesinger et M. Hurwitz ont démontré que toutes les surfaces de Riemann à m feuillets qui ont les mêmes points $a_1, \ldots, a_\sigma$ pour points de ramification simples proviennent les unes des autres par monodromie des points de ramification. En conséquence la surface R, donnée d'avance, est nécessairement l'une des surfaces $R^{(1)}, \ldots, R^{(q)}$ et par suite l'une des équations $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ appartient à la surface R.

Le problème de Riemann est donc résolu, non plus comme Riemann lui-même l'avait traité à l'aide du principe de Dirichlet, non plus par des méthodes d'un caractère entièrement transcendant, comme celles de MM. Schwarz et Neumann, mais par un procédé *purement algébrique* dont l'importance saute aux yeux.

En outre, de l'analyse de M. Schlesinger résulte une conclusion capitale pour la théorie des fonctions algébriques : c'est qu'il est indispensable de considérer non pas une *seule* surface R de Riemann *spéciale*, mais à la fois *toutes* les surfaces $R^{(1)}, \ldots, R^{(q)}$ qui proviennent de R par monodromie des points de ramification. Au lieu de l'unique fonction y de Riemann appartenant à une surface R donnée, il faut envisager l'ensemble de toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_q$ appartenant aux diverses surfaces $R^{(1)}, \ldots, R^{(q)}$, ensemble qui constitue une seule fonction monogène si on la regarde comme fonction des $\sigma + 1$ variables x, $a_1, \ldots, a_\sigma$.

Par là se trouve élargie et complétée la conception classique de Riemann et l'auteur montre en terminant que la considération des fonctions algébriques comme fonctions des points de ramification est utile dans l'étude des équations linéaires de Fuchs auxquelles satisfont les périodes des intégrales abéliennes considérées comme fonctions d'un point de ramification.

Picard (Émile). — Sur certaines surfaces algébriques dont les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques. (349-377).

L'objet de ce Mémoire est de faire connaître certaines surfaces pour lesquelles *toutes* les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques.

L'auteur commence par démontrer que tel est le cas des surfaces ayant pour équation

$$z = f(x) F(y),$$

où f et F sont des polynomes du troisième degré respectivement en x et y,

sans relation particulière l'un avec l'autre : cela tient à ce qu'on ne peut alors satisfaire à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} \qquad (C = \text{const.})$$

par une fonction rationnelle x de y.

Il y a donc lieu d'approfondir le cas où $F(y)$ se réduit à $f(y)$. En étudiant à part le cas où les fonctions elliptiques qui correspondent au polynome $f(x)$ n'admettent pas la multiplication complexe et le cas où elles l'admettent, M. Picard prouve que sa conclusion subsiste pour les surfaces

$$z^2 = f(x)f(y).$$

Il examine ensuite les surfaces plus générales dont l'équation est

$$z^2 = f(x)F(y),$$

$f(x)$ désignant un polynome de degré $2p+1$ à racines simples et $F(y)$ un polynome *arbitraire :* dans ce cas encore toutes les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques.

La même conclusion est établie ensuite relativement aux surfaces

$$z^m = x^m \cdot P(y),$$

$P(y)$ étant un polynome *arbitraire* de degré m.

Pour ces dernières surfaces le nombre p (*Annales de l'École Normale,* 1901) est égal à $(m-1)^2 - 1$.

Raffy (*L.*). — Détermination des surfaces de Joachimsthal à courbures principales liées par une rotation. (379-410).

Enneper a déterminé (*Göttinger Nachrichten,* 1868) les surfaces à courbure totale constante, qui admettent pour lignes de courbure une famille de courbes planes dont les plans passent par une droite et qui sont, à ce titre, des surfaces de Joachimsthal. Dans le présent Mémoire, M. Raffy est allé plus loin et a obtenu par de simples quadratures toutes les surfaces de Joachimsthal dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre (surfaces de Weingarten) :

« Les formules, dit-il, par lesquelles j'exprime la solution complète de ce problème fournissent, entre autres, de nombreux exemples, que je crois les premiers, de surfaces *algébriques* (et même unicursales) à courbures principales liées par une relation et qui ne sont ni de révolution, ni parallèles à des surfaces minima. »

L'auteur commence par établir une propriété commune à toutes les surfaces de Weingarten qui admettent une famille de lignes de courbure planes; *l'argument dont dépendent les courbures principales est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v, u et v étant les paramètres des lignes de courbure.*

Cela posé, si l'on prend pour axe des z la droite par laquelle passent les

plans des lignes de courbure planes (θ = const.), et si v = const. est l'équation des lignes de courbure sphériques, on peut représenter toute surface de Joachimsthal par les formules

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}(\Theta + V)}}, \qquad z = v - \frac{\mathrm{Sh}(\Theta + V)}{\sqrt{\mathrm{Ch}(\Theta + V)}},$$

où les Sh et Ch sont des sinus et cosinus hyperboliques; Θ une fonction arbitraire de θ, V une fonction arbitraire de v, V′ sa dérivée. Avec ces notations, les rayons de courbure R_θ et R_v des sections principales respectivement tangentes aux lignes de courbure θ = const. et aux lignes de courbure v = const. ont pour expressions

$$R_\theta = \sqrt{\frac{W}{T}}\left(\mathrm{Sh} - \frac{W'}{2W}\mathrm{Ch}\right), \qquad R_v = -\sqrt{\frac{W}{T}}\left(\mathrm{Sh} - \frac{T'}{2T}\mathrm{Ch}\right)^{-1},$$

si l'on sous-entend l'argument $\Theta + V$ des fonctions hyperboliques et si l'on pose

$$W = \frac{1}{V'}, \qquad W' = \frac{dW}{dV}, \qquad T = \frac{d\theta^2}{d\Theta^2}, \qquad T' = \frac{dT}{d\Theta};$$

cela revient à prendre pour variables Θ et V; on n'exclut ainsi que les surfaces de révolution. On voit que, si l'on parvient à déterminer W en fonction de V, ainsi que T en fonction de Θ, on obtiendra séparément v et θ et par suite les coordonnées de la surface, au moyen de deux quadratures.

Si, conformément au lemme préliminaire, on exprime que R_θ et R_v sont des fonctions de $\Theta_0 + V_0$, Θ_0 étant une fonction de Θ et V_0 une fonction de V, on obtient les deux équations du problème, qui déterminent, à certaines constantes près, les quatre fonctions inconnues T, W, Θ_0 et V_0. La discussion complète de ces équations conduit à distinguer deux cas, dont l'un est le cas général, l'autre un cas limite, qui doit être traité à part. Dans les formules qui résument cette discussion, on a posé

$$\xi = e^{-\Theta}, \qquad \eta = e^{-2V};$$

toutes les autres lettres désignent des constantes arbitraires.

Cas général. — Les fonctions cherchées sont ainsi définies

$$\frac{dT}{T} = \frac{\xi(1 + m\eta)(\xi + c - m\eta)}{\xi(1 - m\eta)(\xi - c - m\eta)}\,d\xi, \qquad \frac{dW}{W} = \frac{\eta(1 + m - \eta)(\eta - c - m\eta)}{\eta(1 - m - \eta)(\eta - c - m\eta)}\,\frac{d\eta}{\eta};$$

$$d\Theta = \frac{d\xi}{\xi(1 - m - \eta)(\xi - c - m\eta)}, \qquad dV = \frac{d\eta}{\eta(1 - m - \eta)(\eta - c - m\eta)}$$

Il n'y aura donc que *deux* quadratures distinctes à effectuer pour obtenir les quatre fonctions.

Si l'on fait abstraction de constantes de position et d'une homothétie, on obtient une série *doublement infinie* de surfaces dont les courbures principales satisfont *à la même relation*. Par là, ces surfaces se rapprochent des hélicoïdes; mais leur détermination n'exige que deux quadratures, tandis que celle des

hélicoïdes dont les courbures principales satisfont à une relation donnée dépend de l'intégration d'une équation du premier ordre et d'une quadrature. Un paramètre arbitraire n figure dans les expressions des rayons principaux de ces surfaces; *pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de ce paramètre, la relation entre les rayons principaux est algébrique et de genre zéro;* les surfaces correspondantes, en nombre doublement infini, sont déterminées par deux intégrales abéliennes. A la valeur particulière $n = 0$ correspondent les surfaces à courbure totale constante.

Cas limite. — Les fonctions T et W sont ainsi déterminées

$$T = \frac{p}{\xi}(\xi + k)^{\frac{2c}{c+1}}, \qquad W = \frac{q}{\eta}(\eta - k)^{\frac{2c}{c+1}}.$$

Les rayons de courbure principaux ont pour expressions

$$R_\theta = \frac{\sqrt{q}}{(1+c)\sqrt{p}}\left(\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{\frac{c}{c+1}}\left(c\frac{\xi + k}{\eta - k} - 1\right),$$

$$R_\nu = -\frac{\sqrt{q}(1+c)}{\sqrt{p}}\left(\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{\frac{c}{c+1}}\left(1 - c\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{-1}.$$

La relation entre R_θ et R_ν est donc *algébrique et du genre zéro* pour toute valeur *entière ou fractionnaire* de c. Elle est indépendante de la constante R, qui figure, au contraire, dans les expressions des coordonnées de la surface, de sorte que l'on trouve *une série simplement infinie* de surfaces dont les rayons de courbure *satisfont à la même relation.* Leur détermination dépend de deux intégrales abéliennes. La valeur particulière $c = 1$ donne des surfaces à courbure totale constante, parmi lesquelles figurent les hélicoïdes de Dini (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1865) engendrés par des courbes aux tangentes égales.

Dans la dernière partie de son travail, M. Raffy examine de plus près quelques exemples choisis de manière à donner des résultats particulièrement remarquables : surfaces algébriques, elliptiques ou même unicursales, à deux côtés analytiquement distincts, à lignes de courbure algébriques dans les deux systèmes, dont les rayons principaux vérifient des relations de genre zéro et de forme simple.

Vessiot (*E.*). — Sur la théorie des groupes continus. (411-451).

Introduction. — Ce travail a pour but de faciliter l'application de la théorie des groupes continus à l'intégration des équations aux dérivées partielles, par l'exposition systématique de résultats connus, que nous avons cherché à compléter sur divers points.

Bien que ces résultats s'appliquent aussi aux groupes continus finis, c'est surtout les groupes infinis que nous avons eus en vue : aussi les groupes qui y interviennent sont-ils toujours définis par leurs équations de définition. En dehors de quelques propositions de la théorie des groupes continus finis, nous ne supposerons connues que les propositions générales contenues dans le Mémoire

de S. Lie *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen Gruppen* (*Leipziger Berichte*, 1891).

C'est à M. Engel qu'est due l'idée très féconde de donner une forme commune aux équations de définition de tous les groupes ponctuels qui appartiennent à un même type, c'est-à-dire tels que l'on passe de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

M. Engel ne s'était occupé que des équations de définition des transformations infinitésimales. M. Medolaghi a donné la forme correspondante pour les équations de définition des transformations finies. Nous avons repris les résultats de ces deux auteurs par une méthode nouvelle et simple, en approfondissant les problèmes auxiliaires dont dépend la séparation effective des divers types de groupes.

Nous avons montré comment la théorie de la similitude des groupes infinis découle de cette théorie de la recherche des types de groupes ponctuels.

Nous étendons ensuite la méthode à la recherche des types de sous-groupes d'un groupe donné : c'est un sujet qui, à notre connaissance, n'avait pas été traité. Nous avons, en particulier, précisé la nature des opérations nécessaires pour la détermination des sous-groupes invariants, qui est si importante dans les théories d'intégration fondées sur la considération des groupes.

Nous terminons en donnant une définition de l'isomorphisme des groupes infinis, qui permette l'application de cette notion fondamentale aux théories d'intégration.

Lebesgue (*H.*). — Sur les séries trigonométriques. (453-485).

En traitant des séries trigonométriques, l'auteur s'est surtout proposé de montrer l'utilité que pouvait avoir, dans l'étude des fonctions discontinues de variable réelle, la notion d'intégrale qu'il a introduite dans sa thèse de Doctorat (*Annali di Matematica*, 1902).

Il applique ici cette notion à l'étude du développement trigonométrique des fonctions non intégrables au sens de Riemann : la recherche de conditions suffisantes pour la possibilité d'un pareil développement n'a pas encore été abordée à cause de l'ignorance où l'on était de la forme de ses coefficients.

Or, M. Lebesgue démontre que, pour *toute fonction bornée, le développement ne peut être que celui de Fourier*, les intégrales ayant le sens qu'il leur donne. Une fois connue la forme du développement, on peut discuter la convergence en s'aidant des méthodes ordinaires, notamment de celles qu'emploie M. Dini dans son Ouvrage sur les séries de Fourier. C'est ainsi que M. Lebesgue obtient des caractères assez larges de convergence, qui figurent dans l'Ouvrage de M. Dini, mais la généralisation de la notion d'intégrale permet de donner à leurs énoncés un sens plus étendu.

Ces cas de convergence pourraient être déduits des théorèmes généraux de Riemann ; mais M. Lebesgue les obtient plus simplement à l'aide de la remarque suivante. En étudiant les développements relatifs à des fonctions non bornées, Riemann observe incidemment que l'étude de la convergence vers $f(\varphi)$ de la somme des n premiers termes du développement de Fourier

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\varphi}{2}}^{\pi - \frac{\varphi}{2}} f(\varphi + 2t) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} dt$$

revient à l'étude de la convergence vers zéro de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\xi}{2}}^{+\frac{\xi}{2}} \frac{f(\xi+2t)-f(\xi)}{\sin t}\sin(2m+1)t\,dt,$$

c'est-à-dire à l'étude de la convergence vers zéro des coefficients de la série de Fourier relative à

$$\frac{f(\xi+2t)-f(\xi)}{\sin t}.$$

Or Riemann a donné le moyen de prouver cette convergence dans des cas étendus.

Maillet (*Edmond*). — Sur les séries divergentes et les équations différentielles. (487-518).

M. Le Roy, généralisant certaines méthodes de M. Borel pour la sommation des séries divergentes, a montré (*Ann. Fac. des Sc. de Toulouse*, 1900) que, dans des cas très étendus, une série divergente de la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_0^\infty a_n \Gamma(pn+1) z^n,$$

où p est un nombre positif et a_n le coefficient général d'une série entière à rayon de convergence fini, était sommable, *au sens de M. Borel*, c'est-à-dire que la somme $f(z)$ que l'on pouvait lui assigner par ses procédés satisfait aux équations algébriques ou différentielles entières par rapport à la variable y et à ses dérivées dont cette série (A) était une solution formelle.

Ces résultats subsistent pour des séries divergentes dans lesquelles le coefficient de z^n croît moins vite que $\Gamma(p'n+1)$, p' étant un nombre positif fini quelconque. D'où l'intérêt du théorème que M. Maillet démontre d'abord :

Soit

$$(\mathrm{A}') \qquad \sum_0^\infty \theta_n (x-x_0)^n \qquad (\theta_0 \neq 0)$$

une solution formelle, à rayon de convergence nul, d'une équation différentielle rationnelle

$$(1) \qquad \sum \mathrm{A} y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)i_k} = 0,$$

dont les coefficients A *sont des polynomes entiers en* x; *on a toujours, dès que* n *est assez grand,*

$$|\theta_n| \leq \mu_1 n^{(\mathrm{P}'+\mathrm{N}'+1)n},$$

μ_1 *étant fini*, P'' *et* N'' *étant les plus grandes valeurs des sommes*

$$i_0 + i_1 + \ldots + i_k \quad \textit{et} \quad i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k$$

dans l'équation (1).

Il suit de là, en effet, que la série (A') rentre dans la catégorie de celles auxquelles on peut appliquer les procédés précités.

Plus généralement, M. Le Roy a indiqué que l'on pourra essayer de prendre comme somme de la série $\sum \alpha_n z^n$ l'intégrale

$$f_p(z) = \frac{1}{p\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\varepsilon^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{p}}} F(zx)\, dx$$

avec

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)},$$

$F(z)$ étant une série convergente quelconque, pourvu que cette intégrale $f_p(z)$ et l'intégrale

$$\frac{1}{p\varepsilon} \int_0^\infty \left| e^{-\varepsilon^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{p}}} F(zx) \right| dx$$

existent.

M. Maillet applique ces vues au cas où $F(z)$ est une fonction entière d'ordre réel inférieur à l'ordre apparent d (évidemment entier)

$$F(z) = e^{\alpha_0 z^d} \Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à d. Il montre que le produit dp doit être supérieur ou égal à 1 et fait connaître les régions d'existence de l'intégrale $f(z)$ dans l'une ou l'autre de ces deux hypothèses.

Il prouve de plus que les séries divergentes correspondantes et celles qu'on en déduit par addition, soustraction et multiplication des intégrales $f(z)$, sont sommables au sens de M. Borel.

La théorie des fonctions entières permet de former *toutes les séries divergentes* auxquelles ceci s'applique. En particulier, l'auteur est conduit à faire ce que M. Borel avait pressenti comme n'étant pas absurde *a priori, à attribuer un sens et une valeur à une série divergente dont tous les termes sont positifs.*

Picard (*Émile*). — Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales. (519-529).

M. Picard a déjà signalé les difficultés qui se présentent dans l'évaluation précise du nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

sans autres singularités que les singularités ordinaires et placée d'une manière quelconque par rapport aux axes. Si l'on désigne par $Q(x, y, z)$ un polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double, le point capital consiste à reconnaître si l'on peut satisfaire à l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où A et B sont des fonctions rationnelles de x, y et z.

L'auteur montre aujourd'hui qu'on sera en mesure de reconnaître si une pareille identité est possible et par suite de *dénombrer les intégrales distinctes de seconde espèce,* quand on connaîtra un système de courbes algébriques

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1},$$

telles qu'il existe une intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques une autre courbe algébrique arbitrairement choisie et la totalité ou une partie des courbes C et de la courbe à l'infini de la surface.

M. Picard applique ensuite ses théories générales aux surfaces

$$z^2 = f(x, y),$$

bien qu'elles ne rentrent pas dans la catégorie des surfaces à singularités ordinaires : pour les surfaces

$$z^2 = f(x) F(y)$$

en particulier, où $f(x)$ et $F(y)$ sont des polynomes arbitraires de degrés $2p+1$ et $2q+1$, le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est en général égal à $4pq$.

Il est remarquable que ce résultat devient inexact dans certains cas particuliers. Si, par exemple, f et F sont du troisième degré ($p = q = 2$), on aura bien $\rho_0 = 4$ s'il est impossible de satisfaire à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

par une fonction rationnelle $y(x)$ pour quelque valeur que ce soit de la constante C. Mais si f et F sont les mêmes polynomes en x et en y, on a $\rho_0 = 3$, pourvu toutefois que les fonctions elliptiques correspondant au polynome $f(x)$ n'admettent pas la multiplication complexe. Dans ce cas, au contraire, on a $\rho_0 = 2$.

De là résulte une conséquence extrêmement importante : c'est le *caractère arithmétique de l'invariant* ρ_0. La valeur de cet entier dépend, en effet, non seulement de questions de configurations et de singularités sur la surface algébrique, mais aussi de la valeur *arithmétique* des coefficients de son équation.

En terminant, M. Picard établit, en vue du Mémoire qui suit, que l'on peut trouver une intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où P est un polynome nul le long de la courbe double, qui ne soit pas de seconde espèce et qui admette, relativement à la ligne à l'infini de la surface, $2p$ résidus *arbitrairement choisis*.

Picard (*Émile*). — Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. (531-584).

Dans la première partie de ce Mémoire, M. Picard reprend et complète les résultats auxquels il était parvenu, relativement aux *périodes des intégrales doubles de première espèce*

$$(1) \qquad \int\int \frac{\Omega(x, y, z)\, dx\, dy}{f_z}$$

attachées à une surface algébrique d'ordre m,

$$f(x, y, z) = 0.$$

Pour y arbitraire, la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0$$

est de genre p et l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{\Omega(x, \bar{y}, z)}{f_z}\, dx$$

est de première espèce. Elle admet $2p$ périodes qui sont des fonctions de y satisfaisant à une équation différentielle linéaire E. Soit $\omega(y)$ l'une d'elles. M. Picard commence par montrer que, quand y décrit un contour fermé C, l'intégrale

$$(3) \qquad \int_C \omega(y)\, dy,$$

prise le long de ce contour, est égale à une expression de la forme

$$(4) \qquad \sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy,$$

où $\Omega_i(y)$ est définie sans ambiguïté le long du chemin qui joint un point critique b_i de l'équation E à un point a du plan des y, et les m_i sont des entiers vérifiant l'identité

$$(5) \qquad \sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

Réciproquement, *toute expression* (4) *peut, quand l'identité* (5) *est vérifiée, être considérée comme une période de l'intégrale double* (1).

Il y a lieu dès lors de rechercher si les cycles à deux dimensions que M. Picard considère sont propres à engendrer *toutes* les périodes de l'intégrale

double (1) : la réponse à cette question doit être affirmative, ainsi que l'auteur parvient à l'établir par une analyse délicate qui exige que les axes coordonnés n'aient pas de position particulière par rapport à la surface, de sorte que *tous* les cycles à deux dimensions de la surface algébrique *ne pourront pas toujours* être engendrés de cette manière.

Quand l'équation E est supposée irréductible, il y a $2p$ fonctions Ω linéairement indépendantes et *le nombre des périodes de l'intégrale* (1) *est au plus égal à* $N - 4p$, N *étant la classe de la surface* $f = 0$.

Avec la seconde division du Mémoire, on aborde les intégrales doubles de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f_z} dx\, dy,$$

où P est un polynome en x, y, z, nul tout le long de la courbe double de $f = 0$. M. Picard démontre que les périodes d'une telle intégrale sont au nombre de

$$N - 4p - (m - 1)$$

et que ces périodes sont *distinctes,* si le polynome P reste arbitraire dans la mesure où il peut l'être.

En ne comptant pas les $2p$ périodes qui correspondent aux résidus relatifs à la courbe à l'infini, il reste

$$N - 4p - (m - 1)$$

périodes distinctes correspondant à des cycles à distance finie. C'est exactement le nombre des périodes d'une intégrale double de *seconde espèce* correspondant à des cycles à distance finie.

Ces conclusions tombent en défaut si la surface a une situation particulière par rapport aux axes, comme l'auteur le montre par l'exemple de la surface remarquable

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Dans la troisième section, M. Picard traite de l'un des objets les plus essentiels du présent Mémoire, en comparant le nombre des périodes des intégrales doubles de seconde espèce et le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce. Dans cette comparaison intervient le nombre ρ qui a été défini dans le Mémoire précédent (*voir* ci-dessus) :

Si, pour la surface $f = 0$, *le nombre* ρ *est égal à* 1, *le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est donné par l'égalité*

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1).$$

Ainsi, il est égal au nombre des périodes de l'intégrale double générale de seconde espèce. Il est remarquable qu'on arrive exactement au même résultat que dans la théorie des intégrales abéliennes de seconde espèce. Mais l'analogie s'arrête au cas $\rho = 1$. M. Picard démontre en effet que :

Si, pour la surface $f = 0$, *le nombre* ρ *est différent de* 1, *on a*

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) - (\rho - 1).$$

c'est-à-dire que *le nombre des intégrales doubles de seconde espèce est égal au nombre des périodes, diminué de* $\rho - 1$.

Il importe de remarquer que le nombre ρ_0 est un invariant *absolu*, c'est-à-dire un invariant pour toute transformation birationnelle, tandis qu'il n'en est pas de même du nombre ρ.

Dans les dernières pages de son Mémoire, M. Picard revient sur une hypothèse relative aux périodes Ω de l'intégrale arbitraire

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f_z},$$

attachée à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0.$$

Cette hypothèse consistait à admettre que l'on peut trouver $2p + m - 1$ fonctions Ω qui ne soient pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Elle est en général vérifiée. L'auteur précise davantage en prouvant qu'elle est certainement réalisée, si la surface algébrique $f = 0$ n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes), c'est-à-dire si sa connexion linéaire se réduit à l'unité.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

5e série, Tome V; 1899 (1).

Picard (*Émile*). — Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. (5-54).

On sait de quelle importance est, dans la théorie des courbes algébriques, la distinction des intégrales abéliennes en trois espèces. Il était naturel de chercher à établir une classification analogue pour les *intégrales doubles attachées* à une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

c'est-à-dire pour les intégrales

$$(1) \qquad \int\int R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

dont l'élément différentiel est une fonction rationnelle en x, y et z.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVII, p. 162.

M. Picard avait déjà étudié spécialement les intégrales doubles de *première espèce* attachées aux surfaces algébriques et montré tout le parti qu'on peut tirer de leur emploi dans l'étude analytique de ces surfaces.

Dans le présent Mémoire, il pose les bases d'une théorie des intégrales de *seconde espèce* et se trouve amené à introduire un nouveau nombre invariant, relatif à toute surface algébrique, nombre qui est distinct des nombres invariants considérés jusqu'ici.

Voici d'abord comment il définit l'intégrale double de seconde espèce. L'intégrale (1) sera dite présenter le *caractère* d'une intégrale de seconde espèce en un point simple A, si l'on peut trouver deux fonctions rationnelles U et V de x, y, z, telles que la différence entre l'intégrale (1) et l'intégrale

$$(2) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

reste finie au voisinage de A. Ce *caractère* s'étend au cas où A est un point multiple au moyen des transformations birationnelles qui font correspondre à la surface $f = 0$ des surfaces sans point multiple dans les domaines qui correspondent aux régions avoisinant le point A. Cela posé, l'intégrale (1) est dite *intégrale de seconde espèce* attachée à la surface $f = 0$, si elle présente le *caractère* d'une intégrale de seconde espèce en tout point A de cette surface, qu'il soit à distance finie ou à l'infini.

L'objet principal du Mémoire de M. Picard est de démontrer le théorème fondamental suivant :

Pour toute surface algébrique il existe un nombre limité ρ *d'intégrales* J *de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme*

$$(3) \qquad \iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(P *et* Q *étant rationnelles en* x, y, z), *et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des* ρ *intégrales* J, *à un terme additif près, de la forme* (3).

Pour y arriver, l'auteur commence par établir cette proposition préliminaire :

Étant donnée une surface $f(x, y, z) = 0$ *que l'on peut supposer à singularités ordinaires* (*ligne double avec points triples*), *toutes les intégrales doubles de seconde espèce, attachées à cette surface, se ramènent, par la soustraction d'une intégrale de la forme*

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(U, V *rationnelles en* x, y, z), *au type*

$$(4) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f_z},$$

P *étant un polynome qui s'annule sur la courbe double.*

Il prouve ensuite que le degré du polynome P peut être abaissé jusqu'à une certaine limite qui est le nombre $2m-4$, si f est un *polynome arbitraire* de degré m.

Ayant ainsi mis hors de doute le théorème fondamental, M. Picard donne les conditions pour qu'une intégrale de la forme (4) soit effectivement de seconde espèce, et démontre qu'une intégrale double de seconde espèce conserve son caractère spécifique quand on effectue une transformation birationnelle sur la surface à laquelle elle est attachée.

Il donne ensuite deux exemples, celui des intégrales doubles de fonctions rationnelles (le nombre ρ est ici égal à zéro), et celui des surfaces qui correspondent birationnellement à l'ensemble de deux courbes algébriques; pour ces dernières, il forme très simplement des intégrales doubles qui sont de seconde espèce et ne peuvent se réduire à une intégrale du type (2).

M. Picard indique, en terminant, une nouvelle définition des intégrales doubles de seconde espèce, où il fait intervenir la considération des *résidus* d'intégrales doubles, étudiés déjà par M. Poincaré. La surface $f=0$ ne présentant que des singularités ordinaires, si

$$(1)\qquad \int\int R(x,y,z)\,dx\,dy$$

est une intégrale double attachée à cette surface, on peut supposer que cette intégrale ne devient infinie que le long de certaines courbes C de la surface et pour les points à l'infini. Pour chacune de ces lignes C et pour la ligne à l'infini, l'intégrale (1) aura un certain nombre de résidus, qui sont des périodes d'intégrales abéliennes. On peut définir cette intégrale comme intégrale de seconde espèce en disant que *pour toutes les courbes* C *et pour la courbe à l'infini, tous ses résidus sont nuls*. De là résulte un moyen immédiat de reconnaître si l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{Q(x,y)},$$

où P et Q sont des polynomes, est une intégrale de seconde espèce : l'intégrale abélienne $\int \frac{P(x,y)}{Q'_y(x,y)}\,dx$, relative à la courbe $Q=0$ (supposée indécomposable), doit être une fonction rationnelle de x et de y.

De Séguier (le P.). — Sur certaines sommes arithmétiques. (55-115).

Le Mémoire débute par une étude des sommes

$$\sum_s \binom{s}{h} e^{s\frac{2k\pi i}{h}}, \qquad \sum_s \binom{h}{s} e^{s\frac{2k\pi i}{h}},$$

où s parcourt un certain système de restes (mod h), lorsque les arguments sont des entiers quelconques.

Il traite ensuite des relations des sommes précédentes avec les sommes

$$(S) \qquad \sum_{s} \left(\frac{D}{s}\right) f(s), \qquad D \equiv 0, 1 \pmod 4.$$

Les résultats obtenus sont appliqués au cas où

$$f(s) = \log \Gamma\left(\frac{s}{|D|}\right) \qquad (D < 0),$$

la moyenne géométrique de la fonction

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{n}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{-n\pi i \omega}),$$

lorsque ω parcourt les racines (à partie imaginaire positive) des formes représentantes des classes d'un genre, ainsi que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{n},$$

étant alors exprimables par (S).

M. de Séguier donne ensuite la détermination selon le module D, lorsque $f(s)$ est une puissance de s, des sommes (S) et de la partie de (S) qui se compose de termes positifs.

Il étend au cas d'un degré N quelconque la décomposition (par adjonction d'un radical) de l'équation aux racines primitives de l'unité, donnée par Dirichlet pour le cas où N est sans diviseur carré.

Enfin, il étend au cas d'un discriminant négatif quelconque les expressions elliptiques analogues aux sommes ψ données par Kronecker pour certaines séries de Rosenhain dans le cas d'un discriminant négatif fondamental.

Boussinesq (*J.*). — Aperçu sur la théorie de la bicyclette. (117-135).

Voici les subdivisions de ce Mémoire, qui a été résumé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CXXVII, 1898, p. 843 et 895) :

I. Principales données approchées du problème mécanique de la bicyclette.

II. Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison.

III. Équilibre du cavalier.

Note. — Remarques complémentaires : essai sur l'explication du virage.

Appell (*P.*). — Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons. (137-153).

Un milieu matériel continu subissant une déformation finie, qui n'altère pas sa continuité, soient a, b, c les coordonnées rectangulaires d'une molécule avant la déformation et ρ_0 la densité au point qu'occupe cette molécule; soient x, y, z les coordonnées et ρ la densité après la déformation.

Les quantités x, y, z sont des fonctions uniformes et continues de a, b, c dans l'intérieur de la masse primitive; a, b, c sont des fonctions uniformes et continues de x, y, z dans le milieu déformé.

M. Appell établit, relativement aux familles de courbes qui se correspondent ainsi point par point dans les deux milieux, quelques théorèmes généralisant les théorèmes bien connus sur les lignes de tourbillons.

Soit, dans le milieu primitif, une famille de lignes dépendant de deux paramètres et représentées par le système différentiel

$$\frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}.$$

Par la déformation ces courbes se changent en une famille de courbes à deux paramètres ayant pour équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

En multipliant A, B, C, X, Y, Z par une fonction convenable de a, b, c on peut faire en sorte d'avoir

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

On sait alors qu'il existe trois fonctions p_0, q_0, r_0 de a, b, c telles qu'on ait

$$A = \frac{\partial r_0}{\partial b} - \frac{\partial q_0}{\partial c}, \qquad B = \frac{\partial p_0}{\partial c} - \frac{\partial r_0}{\partial a}, \qquad C = \frac{\partial q_0}{\partial a} - \frac{\partial p_0}{\partial b},$$

et trois fonctions p, q, r de x, y, z telles qu'on ait

$$X = \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad Z = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

L'auteur montre que l'expression

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz - (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc)$$

est une différentielle totale exacte.

De cette proposition résultent des conséquences identiques à celles que l'on rencontre dans la théorie des tourbillons.

Jahnke (*E.*). — Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur

2me Partie -

application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. (155-174).

Extrait de l'Introduction. — Dans un Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, Mme de Kowalevsky a ramené aux quadratures un nouveau cas important du problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Dès lors, l'attention des géomètres les plus distingués s'est dirigée vers d'autres cas du même problème.

Mme de Kowalevsky a réussi à exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de deux arguments, les trois composantes de la vitesse de rotation suivant les axes rectangulaires fixes et trois des neuf cosinus directeurs. Cependant, à cause des difficultés du calcul, elle s'est dispensée de représenter les six autres cosinus et les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles. C'est M. F. Kotter qui a comblé les lacunes laissées par Mme de Kowalevsky.

De plus, M. A. Wangerin et, quelques années plus tard, M. V. Volterra ont traité un cas très intéressant et important de la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. M. Wangerin a montré que ce cas se ramène aux quadratures et M. Volterra a représenté, au moyen des fonctions sigma de Weierstrass, les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles et trois des neuf cosinus directeurs; mais les expressions *définitives* des six autres cosinus directeurs et des trois composantes de rotation suivant les axes manquent encore.

Dans ce Mémoire, je m'occupe du même problème pour en donner la solution *complète*. En même temps, je ferai voir qu'on peut obtenir tous les éléments dudit problème d'un seul coup et presque sans aucun calcul, de sorte que la solution en paraît être réduite à un haut degré de simplicité et d'élégance.

Duhem (*P.*). — Sur l'égalité de Clausius. (175-190).

Tout le monde, dit l'auteur, connaît la forme sous laquelle Clausius a étendu le théorème de Carnot à tous les cycles réversibles et la méthode qui lui a permis de déduire du théorème de Carnot cette forme plus générale. G. Kirchhoff a quelque peu modifié cette méthode sans en changer l'esprit essentiel.

Ces démonstrations ne peuvent être rendues rigoureuses que moyennant l'emploi de précautions longues et minutieuses; dans la seconde partie de notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, au Chapitre III, nous avons indiqué quelles précautions exigeait la démonstration de Clausius; ce que nous avons dit pourrait être presque textuellement répété en ce qui concerne la démonstration de G. Kirchhoff.

Nous nous proposons d'indiquer ici une démonstration qui, tout en étant susceptible de la même rigueur, nous semble plus brève et plus élégante.

De la Vallée-Poussin (*Ch.-J.*). — Réduction des intégrales multiples généralisées. (191-205).

Voici comment l'auteur expose l'objet de son Mémoire :

J'ai publié, en 1892, dans ce même Journal, un Mémoire étendu dans lequel j'ai étudié les propriétés des intégrales généralisées de fonctions illimitées. J'y ai recherché sous quelles conditions l'intégrale double étendue à une aire T

$$\int_T f(x, y)\, dT$$

est réductible à deux intégrales généralisées simples, consécutives, entre les limites de T.

Le cas le plus intéressant, les autres s'y ramenant d'ailleurs, est celui où la fonction $f(x, y)$ est toujours de même signe. Dans ce cas, moyennant une restriction (vérifiée dans toutes les applications que je connaisse), la condition nécessaire et suffisante pour que la réduction soit possible est qu'elle conduise à un résultat déterminé.

J'ai cherché à supprimer toute restriction à ce théorème : je n'y suis pas parvenu ; mais la méthode nouvelle que je vais exposer conduit à des résultats plus généraux que celui-là. Il me paraît intéressant de les faire connaître, car ils jettent une certaine lumière sur une question importante et conduisent, en tous cas, à une solution générale du problème de la réduction des intégrales doubles.

Maillet (Edm.). — Sur la détermination du groupe des équations numériques. (205-216).

L'auteur commence par déterminer toute une série d'équations numériques de degré premier dont le groupe est symétrique ou alterne, en démontrant le théorème suivant :

Soit l'équation algébrique irréductible

$$(1) \qquad f(x) = x^p - qA_1x^{p-1} + \ldots - qA_{p-1}x - q = 0$$

(*p et q nombres premiers, différents ou non, p impair,* $A_1, \ldots, A_{p-1}$ *entiers*).

On peut toujours déterminer une infinité de systèmes de valeurs des coefficients $A_1, \ldots, A_{p-1}$ *de façon que l'équation* (1) *ait au moins* $p-2$ *racines réelles et deux racines imaginaires, et, par suite, que son groupe contienne le groupe alterne si* $p-2$ *quand* $p = 3$ *et si*

$$p > 1 + 2\varphi(p),$$

$\varphi(p)$ *étant une fonction telle que*

$$\varphi(p) < \frac{1}{4} + 2\log\frac{p}{2},$$

quand $p > 3$.

Il prouve ensuite que l'équation

$$x^p - qx - q = 0,$$

où p et q sont premiers, a son groupe deux fois transitif quand q est supérieur à une certaine limite fonction de p.

Boussinesq (J.). — Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette : influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier. (217-230).

Ce complément au Mémoire publié dans le même Volume (voir ci-dessus, a

été résumé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CXXVIII, p. 766 et 859).

Voici les titres de ses quatre paragraphes :

IV. Déplacement du centre de gravité général par les mouvements latéraux que s'imprime le bicycliste sur la selle.

V. Calcul de ces déplacements dans deux hypothèses simples.

VI. Leur influence sur l'équilibre; leur rôle essentiel dans les virages.

VII. Loi générale du mouvement; multiplicité des moyens d'action qu'elle offre au cavalier.

VIII. Analogie des organes d'un être vivant avec la bicyclette, en tant qu'ils réclament aussi une direction; comment se pose, au point de vue mécanique, le mystérieux problème de l'organisme.

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes singulières (premier Mémoire). (233-350).

Introduction. — Considérons un système de fonctions abéliennes, à deux variables u et v, ayant pour périodes normales

$$u : \quad 1, 0, g, h$$
$$v : \quad 0, 1, h, g$$

Nous dirons que ces périodes vérifient une *relation de forme singulière* ou *relation singulière*, si elles sont liées par l'équation

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h' - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers, qu'on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, n'avoir aucun diviseur commun.

Les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient une ou plusieurs relations singulières, et que nous appellerons *fonctions abéliennes singulières*, jouissent de propriétés importantes; on peut leur rattacher des *fonctions intermédiaires singulières* qui ne sont pas des fonctions thêta aux mêmes périodes. De plus, les fonctions abéliennes singulières admettent des *transformations* qui n'existent pas dans le cas général, et ce sont enfin les seules qui soient susceptibles d'une *multiplication singulière*, extension de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Le présent Mémoire est consacré à quatre questions principales qui correspondent à ses quatre parties :

1° La réduction, au moyen de transformations du premier ordre, d'une relation singulière; on y verra apparaître un invariant entier, qui joue un rôle capital;

2° et 3° L'étude des *fonctions* intermédiaires singulières et des courbes qui leur correspondent sur la surface de Kummer;

4° La formation de l'équation *algébrique* qui lie les modules d'une fonction abélienne dont les périodes vérifient une relation singulière.

Nous réserverons, pour un second Mémoire, l'étude des transformations singulières et celle des multiplications complexes.

Il va sans dire que toutes ces théories s'étendent aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables; nous aurons à revenir sur ce sujet général.

Beudon (*Jules*). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution. (351-364).

On sait que certains systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles contenant une seule fonction de plusieurs variables sont tels que leur solution générale dépend d'une fonction arbitraire de certains arguments et de constantes arbitraires en nombre fini. Ce sont ces systèmes que l'auteur étudie.

Il établit d'abord que, quel que soit l'ordre des équations qui composent un pareil système, on peut leur donner une *forme normale* qui mette en évidence l'existence de multiplicités caractéristiques dépendant d'un nombre fini de paramètres.

M. Beudon indique ensuite les opérations à effectuer pour arriver à l'intégration complète.

Enfin, il considère spécialement les systèmes linéaires du second ordre, dont il étudie les conditions d'intégrabilité.

Leau (*Léopold*). — Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. (365-425).

L'objet de ce Mémoire est l'étude des fonctions d'une variable, tant sur le cercle de convergence de la série entière qui les définit qu'à l'extérieur de ce cercle.

Le Chapitre premier est consacré à l'étude des séries de Taylor sur le cercle de convergence. Au début de ce Chapitre, M. Leau expose sa méthode, dont voici l'idée directrice. On sait que, lorsqu'on veut se rendre compte de la convergence d'une série, il y a lieu de considérer non pas *simultanément* mais *successivement*, la suite des coefficients; de même la possibilité du prolongement de la fonction, sur le cercle ou dans le plan, dépend, non pas de la totalité des coefficients pris simultanément, mais d'*ensembles de pareils coefficients envisagés dans leur succession*. Ce fait rend possible la comparaison d'une série donnée avec d'autres plus simples, déjà connues.

Ensuite l'auteur aborde la formation de séries ayant sur le cercle de convergence des singularités données et celle de séries régulières le long d'un arc du cercle de convergence. Il donne des exemples variés de séries admettant leur cercle de convergence comme coupure (notamment une extension du théorème de Weierstrass) et des types assez généraux de séries dont les singularités sont connues sur ce cercle.

Le Chapitre II contient l'étude, dans le plan, des fonctions représentées par des séries de Taylor. M. Leau applique sa méthode à la formation de fonctions holomorphes dans certaines régions du plan. Pour obtenir des fonctions douées de singularités connues dans le plan, il étend un théorème de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1892) et obtient de cette manière des résultats très variés, dont quelques-uns avaient déjà été trouvés autrement par M. Fabry et M. Le Roy.

Il ressort nettement des recherches de l'auteur que la comparaison d'une série donnée avec des séries connues, qui est le procédé fondamental dans l'étude de la convergence, peut servir très efficacement à la recherche des singularités sur le cercle de convergence et même à son extérieur.

Lerch. — Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel. (427-433).

Il s'agit de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-u}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2-u}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}}\right],$$

antérieurement considérée par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1886). Le développement en série trigonométrique de cette fonction ayant des coefficients qui ne sont pas exprimés sous forme finie, l'auteur a cherché un autre développement à convergence rapide, dont les termes fussent des fonctions élémentaires simples : il communique ici le résultat auquel il est parvenu.

Saltykow (N.). — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (435-466).

Les recherches de Cauchy et de Jacobi ont établi un lien étroit entre l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et celle des équations aux différentielles totales. Ce que ces géomètres ont fait dans le cas où l'on n'a qu'une seule équation aux dérivées partielles, M. Saltykow le fait pour les systèmes simultanés d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue.

Dans un premier Chapitre il apporte diverses modifications à la méthode des caractéristiques de Cauchy, que S. Lie a étendue aux systèmes d'équations simultanées. Le point important de la théorie est le calcul des *intégrales complètes* au sens de Lagrange : la question ayant été résolue complètement dans le cas d'une seule équation par Mayer et Lemonnier, l'auteur étend leurs résultats aux systèmes d'équations simultanées.

Les Chapitres suivants traitent, l'un des équations dans lesquelles la fonction inconnue ne figure pas explicitement, l'autre des systèmes qui la contiennent. C'est en généralisant la *fonction principale* de Jacobi que M. Saltykow obtient ses résultats et son mode d'exposition offre cet intérêt qu'il conduit immédiatement aux théorèmes dont S. Lie a enrichi la théorie des équations dont il s'agit.

L. R.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Tome XXXI; 1900 [1].

Glaisher (*J.*). — **Congruences relatives aux sommes de produits des n premiers nombres et à d'autres sommes de produits.** (1-35).

M. Glaisher reprend la méthode de Lagrange pour le développement du produit

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

méthode fondée sur l'identité

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(x+n)(x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_n) \\ &= (x+1)^n + A_1(x+1)^{n-1} + \ldots + A_n(x+1). \end{aligned}$$

Les relations entre les A_i qui résultent de cette identité permettent de calculer de proche en proche ces coefficients; M. Glaisher donne les expressions explicites de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et des Tables numériques pour les valeurs des sommes S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des produits r à r des nombres $1, 2, \ldots, n$ jusqu'à $n = 50$. L'intérêt principal de son Mémoire est d'ailleurs dans la conséquence arithmétique de l'identité (1), d'où Lagrange a, comme on sait, tiré une démonstration du théorème de Wilson, démonstration qui est peut-être la première de celles qui ont été publiées.

Voici quelques-unes de ces conséquences : si n est premier,

$$A_{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \quad (\text{Wilson}),$$

$$A_{n-2} \equiv 0 \pmod{n} \quad (\text{Wolstenholme}),$$

$$A_2 \equiv 0 \pmod{n} \quad (\text{Ferrers}),$$

$$A_r \equiv 0 \pmod{n} \quad (r \text{ impair} > 1),$$

$$A_{\frac{n-1}{2}} \equiv \frac{n-1}{2} A_1 \pmod{n} \quad (r \text{ impair} > 3).$$

D'autres propositions analogues concernent le cas où n est un nombre premier augmenté d'une unité, ou n est le double d'un nombre impair, etc.

Walker (*G.-W.*). — **La dispersion des ondes électro-magnétiques sur une sphère.** (36-49).

Le problème a été étudié par l'auteur dans le Tome précédent du *Quarterly*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIV, p. 56.

Journal pour le cas de petites sphères peu conductrices. Il reprend le problème général, sur l'invitation du professeur Thomson, afin d'éclaircir la raison des différences entre les lois de la dispersion dans les deux cas extrêmes : un conducteur parfait, un isolateur parfait.

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes transitifs de substitution de degré 17. (49-57).

Il y a huit groupes primitifs de degré 17 qui ne contiennent pas le groupe alterné de ce degré. Cinq sont inclus dans le groupe métacyclique et leurs ordres sont respectivement 17, 34, 68, 136, 272. Chacun des trois autres contient 120 sous-groupes d'ordre 17 et les ordres de ces groupes sont respectivement 4080, 8160, 16320. Le groupe d'ordre 4080 est simple et il est un sous-groupe distingué des deux autres.

Richmond (*W.-H.*). — Note sur les invariants d'un sextic binaire. (57-59).

Sur les expressions telles que

$$= a_0(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)\ldots(\gamma_1 - \gamma_6),$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_6$ sont les racines d'une forme

$$(a_0, a_1, \ldots, a_6)(x, y)^6,$$

et où le signe $=$ doit être convenablement choisi. Ces expressions sont les sommes de six invariants asymétriques, vérifiant une équation du sixième degré dont l'auteur établit diverses propriétés intéressantes.

Dickson (*L.-E.*). — Une classe de groupes linéaires comprenant le groupe abélien. (60-66).

Soit S une substitution linéaire homogène générale portant sur mq variables

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} (\alpha'_{k1} x_{k1} + \alpha'_{k2} x_{k2} + \ldots + \alpha'_{kj} x_{kj}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, q).$$

L'auteur étudie le groupe $G_{m,q}$ des substitutions S telles que, en opérant d'une façon cogrédiente sur q systèmes indépendants de mq variables, dont le $j^{\text{ième}}$ est représenté par

$$x_{1j},\ x'_{2j},\ \ldots,\ x'_{mj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

la fonction

$$= \sum_{i=1}^{i=m} \begin{vmatrix} x'_{i1} & x_{1} & \ldots & x_{1} \\ x'_{i2} & x_{2} & \ldots & x_{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x'_{im} & x'_{m} & \ldots & x'_{m} \end{vmatrix}$$

reste absolument invariante.

Pearson (*K.*) et *Filon* (*L.*). — Sur la flexion de poutres pesantes soumises à des charges continues. (66-109).

Troisième partie d'un Mémoire inséré dans le Tome XXIV du *Quarterly Journal* (p. 63-110) : elle se rapporte au cas d'un cylindre elliptique soumis à son poids seulement.

Glaisher (*J.*). — Résidus des coefficients du binome relativement au module p^3. (110-124).

Extension au module p^3 (p premier) d'une suite de propositions établies dans le Volume précédent pour le module p, qui repose en partie sur une congruence établie dans le Mémoire qui commence le présent Volume, à savoir, en supposant que m soit un nombre naturel quelconque,

$$(mp-1)(mp-2)\ldots(mp+p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Richmond (*H.-W.*). — La figure formée par six points dans l'espace à quatre dimensions. (125-160).

L'étude de la figure formée par quatre points dans un plan conduit à la théorie de l'involution et de la section harmonique à une dimension; l'étude de la figure formée par cinq points dans l'espace conduit à la théorie de l'homologie à deux dimensions. L'étude de la figure formée par six points dans l'espace à quatre dimensions (*hexastigm*) se relie de même à de belles propriétés de l'espace ordinaire et du plan. C'est ce que l'auteur développe dans le présent travail, qui comporte les divisions suivantes :

Sur la nature de l'hexastigm. Sections spatiales de l'hexastigm et leurs projections sur un plan. Méthodes analytiques. Sur l'hexagramme de Pascal. Généralisation des précédents résultats.

On remarquera en particulier la façon dont apparaissent, de ce point de vue, les propriétés des courbes du quatrième degré, des surfaces du troisième, des surfaces du quatrième degré à quinze ou seize points doubles.

Campbell (*D.*). — Sur les équations différentielles linéaires du troisième et du quatrième ordre, dont les solutions vérifient certaines relations homogènes. (161-192).

Extension de la méthode exposée par Brioschi dans son Mémoire sur *Les invariants des équations différentielles linéaires* (*Acta mathematica*, t. XIV, 1890). La nature des relations homogènes qui peuvent exister entre les solutions d'une équation différentielle linéaire du troisième ou du quatrième ordre, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de telles relations sont discutées en détail.

Glaisher (*J.*). — Sur les valeurs des sommes

$$1^n \pm 2^n \pm q^n \pm 3^n \pm 2q^n \pm \ldots \pm 1^n$$

et

$$x^m - (x-q)^m + (x-2q)^m - \ldots \pm r^m.$$

(193-227).

q désigne un nombre naturel quelconque, r a une des valeurs $0, 1, 2, \ldots, q$; enfin on a $x \equiv r \pmod{q}$. M. Glaisher donne des expressions simples de ces sommes; en particulier, des expressions ordonnées suivant les puissances de x, pour les petites valeurs de m. La théorie de ces sommes se relie à la théorie des polynomes de Bernoulli.

Miller (*G.-A.*). — **Sur les groupes primitifs de substitutions de degré 10.** (228-233).

En dehors du groupe symétrique et du groupe alterné, il y a sept groupes primitifs de degré 10, que l'auteur caractérise.

Elliot (*E.-B.*). — **Démonstration simple de la réalité des racines de l'équation aux inégalités séculaires; quelques faits connexes.** (233-240).

Développement et extension de la démonstration de Lagrange

Glaisher (*J.*). — **Sur la somme**

$$1^n(x-1)^n - 2^n(x-2)^n + \ldots + (x-1)^n 1^n,$$

et quelques autres semblables. (241-247).

Dans l'expression précédente x désigne un nombre naturel; l'objet principal de l'auteur est d'obtenir cette somme et la somme analogue où les signes sont alternés, sous forme d'un polynome ordonné suivant les puissances de x. Suivant les cas, les coefficients de ces polynomes dépendent des nombres de Bernoulli ou d'Euler.

Morton (*W.-B.*). — **Note sur les équations algébriques dans lesquelles les termes de degré supérieur à 2 ont de petits coefficients.** (247-251).

On modifie une équation du second degré en ajoutant au premier membre des termes de degré plus élevé avec des coefficients très petits; l'équation ainsi obtenue a deux racines voisines des racines de l'équation du second degré; l'auteur cherche une condition approximative pour que ces deux racines soient égales.

Walker (*G.-W.*). — **Correction d'une erreur dans un précédent Mémoire.** (252).

Renvoi aux pages 36-49 du présent Volume

Glaisher (*J.*). — Congruence relative aux nombres de Bernoulli. (253-263).

Soient B_n le n^{me} nombre de Bernoulli, p un nombre premier impair et $j = \frac{p-1}{2}$, on a

$$\frac{B_n}{n} \equiv (-1)^j \frac{B_{n-tj}}{n-tj} \pmod{p},$$

t est un nombre naturel tel que $n - tj$ soit positif.

Barnes (*E.-W.*). — La théorie de la fonction G. (264-314).

La fonction que l'auteur désigne sous le nom de *fonction* G est une fonction entière liée à la fonction Γ et jouissant de propriétés analogues à celles de la fonction Γ : elle peut être définie par l'équation aux différences

$$G(z+1) = \Gamma(z)\, G(z),$$

par la condition $G(1) = 1$, et enfin par la condition de devenir infinie comme

$$(2\pi)^{\frac{z}{2}} z^{\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2}} e^{-\frac{1}{12}}$$

pour z égal à $-z$. A est une constante que M. Glaisher a considérée dans divers Mémoires du *Messenger* (t. VI, p. 71; t. VII, p. 43; t. XXIII, p. 145; t. XXIV, p. 1), et qui peut être définie par le théorème suivant, dû à M. Kinkelin :

$$\log 1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots n^n = \log A - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12}\right) \log n - \frac{n^2}{4} + \varepsilon,$$

$$\left(\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

Sa valeur est

$$A = 1,28242713\ldots$$

La fonction $G(z)$ est liée à diverses autres fonctions considérées antérieurement par MM. Kinkelin, Hölder, Alexeiewsky, Glaisher.

Son logarithme est susceptible d'une expression par une intégrale prise le long d'un contour qui se prête à de nombreuses transformations. Elle ne vérifie aucune équation différentielle dont les coefficients soient des fonctions algébriques de z, des fonctions périodiques de z, des fonctions Γ ou des combinaisons finies de pareilles fonctions.

Richmond (*H.-W.*). — Sur le développement suivant les puissances de l'arc des coordonnées des points d'une courbe dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions. (315-320).

Extension d'une méthode développée, pour l'espace ordinaire, par M. G. Mathews (*Quarterly Journal*, t. XXVI, p. 97).

Glaisher (*J.*). — Sur les résidus, pour les modules p^2 ou p^3, des sommes des produits des $p-1$ premiers nombres et de leurs puissances (p premier impair). (321-353).

Nouvelles conséquences de ces formules de Lagrange, relatives au produit $(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1)$, que l'auteur a considérées dans le Mémoire qui figure en tête du présent Volume.

Jessop (*C.-M.*). — Les surfaces quartiques avec quatorze, quinze et seize points doubles. (354-357).

L'auteur établit divers résultats énoncés par Kummer dans le Mémoire bien connu sur la surface quartique à seize points doubles inséré dans les *Abhandlungen der Akademie zu Berlin* de 1866.

Everett (*J.-D.*). — Sur l'algèbre des tables de différences. (357-376).

Étude de la disposition des éléments dans une table indéfinie à droite et à gauche où chaque colonne contient les différences des éléments qui figurent dans la colonne précédente à gauche. Déduction systématique d'un grand nombre de formules symboliques relatives à la théorie des différences en partant de la relation

$$\Delta\delta = \Delta - \delta$$

où l'on suppose

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x); \qquad \delta f(x) = f(x) - f(x-h).$$

Michel (*J.-H.*). — La pression à l'intérieur d'une poutre plate en forme de I. (377-382).

Miller (*G.-A.*). — Sur l'holomorphe du groupe cyclique et quelques-uns de ses sous-groupes. (382-384).

Tome XXXII; 1901.

Glaisher (*J.*). — Sur les résidus de r^{p-1} pour les modules p^2, p^3, ... (1-27).

Sylvester (*Comptes rendus*, t. LII, p. 161) a donné une intéressante expression de $\frac{r^{p-1}-1}{p}$ (mod. p), en désignant par p un nombre premier et par r un nombre entier non divisible par p. C'est en cherchant à démontrer le théorème de Sylvester que l'auteur a été amené à écrire le présent Mémoire, où le résul-

tat obtenu par Sylvester est légèrement modifié; en outre, la méthode s'applique aisément aux modules p^2, p^4.

Michell (*J.*). — La théorie des poutres uniformément chargées. (28-42).

Dickson (*L.*). — Preuve du non-isomorphisme du groupe abélien simple à $2m$ indices et du groupe orthogonal simple à $2m+1$ indices pour $m > 2$. (42-63).

Ce travail fait suite à deux Mémoires insérés, l'un dans le *Quarterly Journal* (t. XXIX, p. 16[illegible]), l'autre dans l'*American Journal* (t. XXI, p. 19[illegible]) : l'auteur y a considéré, dans le champ de Galois $GF(p^n)$, $(p > 2)$ un groupe simple de substitutions abéliennes $A(2m, p^n)$ et un groupe simple de substitutions orthogonales $O(2m+1, p^n)$. $A(2, p^n)$ et $O(3, p^n)$ sont simplement isomorphes; de même $A(4, p^n)$ et $O(5, p^n)$; il montre actuellement que les groupes simples de même ordre $A(2m, p^n)$ et $O(2m+1, p^n)$ ne sont pas isomorphes pour $m > 2$.

Richmond (*H.*). — Sur les inflexions d'une courbe quartique binodale. (63-65).

Pour que les douze points d'inflexion d'une quartique soient sur une cubique, il faut une condition, et non deux, comme on pourrait s'y attendre.

Hardy (*G.*). — Sur la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$. (66-140).

Étude approfondie de la règle de Leibniz

$$(1) \qquad \frac{d}{d\alpha}\int_a^{x_1} f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{x_1} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$$

I. Conditions générales sous lesquelles cette règle est valable. L'auteur a tiré parti des recherches de M. Jordan (*Cours d'Analyse*), de Harnack (*Die Elemente der Differential und Integral-Rechnung*) et du Mémoire de M. de La Vallée-Poussin *Sur la convergence des intégrales définies*. Le sujet est toutefois repris à nouveau, sans considérer d'intégrales doubles, et les conditions obtenues sont plus larges que celles qui avaient été données antérieurement.

II. Établissement de la formule

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{x_1} f\,dx = \int_a^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx + \sum_i \left([f(x_i - 0) - f(x_i + 0)]\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right),$$

relative au cas où la fonction f, supposée partiellement continue, admet des discontinuités qui dépendent de α. Une intégrale généralisée peut, dans certains cas,

lors même que $\int_a^A \frac{df}{dx} dx$ n'existe pas, être calculée en lui substituant une somme d'intégrales ordinaires, dont elle est la limite, et en appliquant à celle-ci la règle de Leibniz.

III. Démonstration simple des théorèmes de la section précédente, dans le cas de fonctions qui deviennent infinies pour $x = a$, de manière que le quotient obtenu en les divisant par une expression de la forme

$$(x-a)^r(\log|x-a|)^s[\log\log|x-a|]^t\ldots$$

reste fini pour $x = a$, et dans des cas plus généraux. Diverses formules dont on peut se servir quand la règle de Leibniz tombe en défaut.

IV. Théorie des valeurs principales d'une intégrale qui n'est pas complètement déterminée. Sous certaines conditions, l'équation (1) subsiste lorsque l'intégrale qui figure dans le second membre n'est pas déterminée pourvu qu'on la remplace par sa valeur principale. Le coefficient différentiel d'une valeur principale est généralement représenté par une autre valeur principale.

V. Détermination, au moyen des théorèmes précédemment établis, d'une classe d'intégrales (valeurs principales) fort intéressantes obtenues par Cauchy dans son Mémoire sur les intégrales définies; l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx}\,\frac{dx}{1+x^2}$$

peut être considérée comme le type des intégrales de cette classe. Elles s'obtiennent en différentiant une suite d'intégrales qui sont elles-mêmes remarquables; telle est, par exemple, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\log\cos^2 \alpha x}{x^2}\,dx,$$

qui montre, en particulier, qu'une intégrale dont une limite est infinie peut être déterminée, lors même que la quantité sous le signe $\int$ garde le même signe et devient infinie une infinité de fois dans l'intervalle (A, ∞), quelque grand que soit A.

VI. Étude de la formule

$$\int_a^A dx \int_b^B \varphi\,dy - \int_b^B dy \int_a^A \varphi\,dx;$$

elle peut subsister lors même que les opérations indiquées ne sont pas inconditionnellement déterminées, si, pour ne mentionner que le cas le plus simple, $\int_a^A \varphi\,dx$, $\int_b^B \varphi\,dy$ représentent seulement des valeurs principales.

Roberts (*R.*). — Sur les foyers et les systèmes de courbes planes confocales. (141-184).

Les courbes considérées sont unicursales de degré n ; l'auteur fait usage de coordonnées circulaires, c'est-à-dire que le triangle de référence est formé par la droite de l'infini et les droites joignant un point arbitraire aux points cycliques. Il montre, en particulier, comment on peut déterminer ces courbes quand on se donne leurs foyers et rencontre ainsi un grand nombre de propriétés des courbes confocales.

Brill (*J.*). — Suggestions en vue de la construction d'une théorie générale des systèmes d'équations pfaffiennes. (185-208).

C'est la deuxième partie d'un Mémoire dont la première partie a paru dans le Tome XXX (p. 221) : elle porte ce sous-titre : « Suite de la discussion du premier groupe de cas et discussion de la suffisance des conditions de l'ordre le plus bas. »

Scott (Miss *Ch.*). — Études sur la transformation des courbes algébriques planes. (209-239).

Suite d'un Mémoire inséré dans le Tome XXIX (p. 229) : § 6. Les points fondamentaux ; les courbes correspondantes et les courbes complémentaires. § 7. Les courbes fondamentales ; les points correspondants et les points complémentaires.

Glaisher (*J.*). — Relations entre les résidus de r^{p-1} pour les modules p^2 et p^3. (240-251).

Ce Mémoire peut être regardé comme une suite de celui qui est en tête du Volume, et les notations sont les mêmes. Si l'on suppose $r = kp + r_1$, les restes de r^{p-1} pour les modules p^2 et p^3 se déduisent aisément des restes de r_1^{p-1}. Ce sont les relations de cette nature qui forment l'objet du présent travail.

Richmond (*H.*). — Extensions de la propriété de l'orthocentre. (251-256).

Ces extensions se rapportent à un espace à n dimensions, euclidien ou non.

Mathews (*G.*). — Multiplication complexe pour les fonctions lemniscatiennes de Weierstrass. (257-265).

En posant

$$[illegible] = [illegible], \quad u = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{[illegible]}},$$

on a

$$2u = \frac{\Lambda[illegible]}{B[illegible]}.$$

où μ désigne un entier complexe et $A(\mu)$, $B(\mu)$ des polynomes en pu; il s'agit de la détermination et des propriétés de ces polynomes.

Blythe (*W.*). — Sur les modèles de surfaces cubiques. (256-270).

Comment déterminer la forme de la surface entière, quand on donne en position une portion de chacune des vingt-sept droites (supposées réelles) qu'elle contient?

Glaisher (*J.*). — Sur les résidus des sommes des inverses des puissances de nombres en progression arithmétique. (271-305).

Nouvelle démonstration de résultats établis dans le Volume précédent du *Quarterly Journal* (p. 329 et suiv.).

Everett (*J.*). — Formules d'interpolation. (306-313).

Suite du Mémoire *On the algebra of difference Tables*, publié dans le Volume précédent

Jessop (*C.*). — La surface singulière du complexe quadratique. (313-321).

Formation de l'équation. Expression des coordonnées des seize points singuliers et des seize plans tangents singuliers. Forme de Kummer $\Phi^2 = 16pqrs$; relation entre les plans p, q, r, s et les points singuliers. Figure formée par les 32 droites dont les coordonnées, élevées au carré, ont des valeurs données.

Tennant (*J.*). — Factorisation des grands nombres. (322-342).

Miller (*G.*) et *Ling* (*G.*). — Liste des groupes intransitifs de substitution de degré 11. (342-368).

Hardy (*G.*). — Théorèmes généraux sur l'intégration le long d'un contour. Applications. (369-384).

L'auteur généralise et précise plusieurs des résultats signalés par Cauchy dans son Mémoire sur les intégrales définies : ces résultats se rapportent en partie à des *valeurs principales*. Les applications concernent d'abord les intégrales que l'auteur désigne sous le nom d'*intégrales de Laplace* et qui appartiennent au type

$$\int_{-x}^{+x} \cos[R(x)]\, R_1(x)\, dx,$$

où $R(x)$, $R_1(x)$ sont des fonctions rationnelles, puis les résultats qu'on tire de la considération d'intégrales de la forme

$$\int \frac{e^{ix}}{(\cos x)^n}\, \frac{dx}{x-\xi}, \qquad \int \frac{e^{ix}}{\sin x}\, \frac{dx}{x-\xi},$$

prises le long d'un contour convenable. Signalons, à titre d'exemple, la formule

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(1-a)(\xi-u)}{\sin(\xi-u)} \frac{du}{(\cos u)^a} = \frac{\pi}{(\cos\xi)^a},$$

$$0 < a < 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}.$$

J. T.

MATHEMATISCHE ANNALEN

Tome XLIV; 1894 (1).

Hilbert (*D.*). — Sur la décomposition des idéaux d'un corps en idéaux premiers. (1-8).

Tout idéal d'un corps algébrique peut être, et d'une seule manière, exprimé comme produit d'idéaux premiers.

Ce théorème fondamental, énoncé et démontré d'abord par Dedekind (*Leçons sur la théorie des nombres de Dirichlet*, Sup. XI), a été ensuite établi de façon différente par Kronecker (*Crelle*, t. 92); M. Hilbert en indique une nouvelle démonstration basée sur la théorie des *congruences* étendue aux idéaux et sur les propriétés des *idéaux ambigus* (identiques à leurs conjugués) d'un corps de Galois.

Kürschák (*J.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles du problème

$$\delta \int\int V(p, q)\, dx\, dy = 0.$$

(9-16).

Recherche des cas où l'équation $\frac{\partial V}{\partial p^2} r + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial p\, \partial q} s + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} t = c$ s'intègre par la méthode de Monge, c'est-à-dire admet une intégrale première dépendant d'une fonction arbitraire. L'auteur ramène par une transformation de contact cette équation à la forme

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi\, \partial \eta},$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVII, p. 5.

où ζ est l'inconnue. La question a déjà été traitée par M. L. Valyi dans un travail écrit en langue hongroise (*Klausenburg*, 1880), mais par une autre méthode.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les intégrales complètes des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (17-40).

L'auteur commence par rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'intégrales de m équations aux dérivées partielles du premier ordre à m inconnues et à un nombre quelconque de variables, système dépendant de constantes arbitraires, constitue un *système intégral complet* (généralisation de l'intégrale *complète* de Lagrange). Il recherche ensuite dans quel cas un tel ensemble d'équations aux inconnues $F_1, \ldots, F_m$ admet une solution générale de la forme

$$F_i = \varphi_i(f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{i\mu}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où les φ_i sont des fonctions arbitraires de leurs arguments et les quantités $f_{i1}, \ldots, f_{i\mu}$ ($i = 1, \ldots, m$) représentent μ systèmes de solutions particulières quelconques : le système d'équations est nécessairement forme d'équations linéaires et homogènes, les inconnues étant séparées :

$$g_{i1}(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial F_i}{\partial z_1} + \ldots + g_{in}(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial F_i}{\partial z_n} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

et l'on a :

$$\mu = n - 1$$

Pringsheim (*A.*). — Sur des fonctions qui possèdent en certains points des dérivées finies, de tous les ordres, sans y être développables en série de Taylor. (41-56).

Ce travail se rattache à un Mémoire antérieur de l'auteur (*Math. Ann.* t. XLII) sur la série de Taylor.

Si l'on choisit les nombres positifs a_ν de telle sorte que

a. $\lim_{\nu = \infty} \nu^p a_\nu = 0$, quelque grand que soit l'entier positif fixe p,

b. $\lim_{\nu = \infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$,

la fonction $f(x) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ qui possède le point singulier $x = 1$, donnera naissance aux deux fonctions de la variable réelle t

$$\sum_0^\infty a_\nu \cos \nu t, \qquad \sum_0^\infty a_\nu \sin \nu t,$$

qui satisfont aux conditions de l'énoncé au point $t = 0$. M. Pringsheim montre de même que la considération de séries de puissances qui admettent le cercle $|x| = 1$ comme coupure conduit à des fonctions de variable réelle satisfaisant *en tout point* aux conditions de l'énoncé.

Pringsheim (*A.*). — **Sur les conditions nécessaires et suffisantes du développement de Taylor pour les fonctions d'une variable réelle.** (57-82).

Pour que la fonction uniforme $f(x+h)$, définie dans l'intervalle $a-h<x<a+h$, y soit exprimable par la série de Taylor

$$f(a+h)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)h^{\nu},$$

il est nécessaire et suffisant :

1° Que $f(x)$ soit fini pour $a-h<x<a+h$ et possède pour $x=a$ une dérivée *à droite*, pour $a-h<x<a+h$ une dérivée *complète* de chaque ordre de dérivation, toutes ces dérivées étant finies;

2° Que pour toute valeur entière p, positive, négative ou nulle, on ait

$$\lim_{n=\infty}F_{p,n}(h,k)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{(n+p)!}f^{(n)}(a+\theta k)k^{n}=0,$$

et cela *uniformément* pour toutes les valeurs de h, k qui appartiennent au domaine

$$0<h<h+k<r \quad \text{ou} \quad r<h<k<0.$$

L'auteur montre ensuite comment on peut transformer cet important résultat en faisant intervenir les deux formes classiques du *reste* (Cauchy, Lagrange) de la série de Taylor. Il met enfin en évidence les caractères essentiels qui séparent les fonctions dont toutes les dérivées existent et sont finies en tout point, de celles qui sont développables en série de Taylor.

Hurwitz (*A.*). — **Sur le critère de convergence de Riemann.** (82-88).

Il s'agit du critère de convergence donné par Riemann dans son Mémoire sur la convergence des séries Θ à p indices; M. Hurwitz en indique une nouvelle démonstration plus directe que celle de Riemann.

Pasch (*M.*). — **Sur les déterminants évanouissants du troisième ordre, des formes bilinéaires ternaires.** (89-96).

Un travail antérieur de l'auteur (*Math. Ann.*, t. XXXVIII) l'a conduit à s'occuper ici du système linéaire de trois formes bilinéaires ternaires dont toutes les formes ont un déterminant nul. Une application est faite au système de trois formes quadratiques ternaires.

Fricke (*R.*). — **Sur la théorie de la transformation des fonctions automorphes.** (97-104).

M. Fricke se propose de résoudre la question suivante, dont l'importance est

manifeste pour la théorie de la transformation algébrique des fonctions automorphes :

Soient $u(\eta)$, $v(\zeta)$ deux fonctions uniformes automorphes, comment peut-on de la manière la plus générale établir entre leurs arguments une relation algébrique

$$f(\eta, \zeta) = 0,$$

qui entraîne entre les fonctions une relation également algébrique

$$F(u, v) = 0?$$

Un certain nombre de cas simples étant exclus, il établit que la relation entre η et ζ est linéaire : $\eta = W(\zeta) = \frac{A\zeta + B}{C\zeta + D}$. Le groupe $W^{-1}\Gamma_u W$ transformé de Γ_u par W doit être commensurable avec Γ_v : si les indices du sous-groupe commun à Γ_v et $W^{-1}\Gamma_u W$ sont respectivement m_u et n_v, les degrés de F en u et v sont respectivement $m = m_v\beta$, $n = n_v\alpha$ en désignant par α et β les *ordres* (nombres de zéros ou de pôles dans le domaine fondamental) respectifs de u et v.

Schönflies (A.). — Sur les triangles et les quadrilatères formés d'arcs de cercle. (106-124).

L'auteur se propose de classer morphologiquement tous les domaines à connexion simple qui sont limités par trois ou quatre arcs de cercle. Il admet que chaque côté peut comprendre un nombre quelconque de circonférences et que chaque angle au sommet peut recevoir une valeur positive quelconque, mais exclut la possibilité de points de ramification à l'intérieur du domaine. Dans ces conditions, par des opérations élémentaires telles que les suivantes (introduites par M. F. Klein) :

1° *Adjonction* au domaine (ou *suppression*) de l'une des deux parties du plan déterminées par un cercle ;

2° Adjonction au domaine (ou suppression) d'un plan complet ;

3° Adjonction (ou suppression) d'un anneau circulaire ;

opérations qui n'altèrent ni les sommets, ni les résidus des angles (mod 2π), *ni la direction des côtés*, on ramène le polygone qui limite le domaine à un triangle (ou à un quadrilatère) *réduits*, d'un type très simple, et que l'auteur caractérise.

Castelnuovo (G.). — Sur la rationalité des involutions planes. (126-155).

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes d'un point d'une surface S : dans le cas où l'on a

$$\rho x_i = f_i(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les f étant des fonctions entières homogènes du même degré, à un point α, β, γ du plan P correspond un point et un seul de la surface. La correspondance

entre P et S n'est biunivoque que si les équations

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \rho f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

n'admettent pas d'autre solution que $\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{matrix}$. Dans les autres cas à un point x de S correspondent tous les points d'une *involution plane*, c'est-à-dire un groupe de n points qui interviennent symétriquement comme solutions des équations

$$x = \rho f_i(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Peut-on aussi alors établir une correspondance algébrique biunivoque entre les points de S et les points d'un plan? (ou représenter tous les groupes d'une involution plane d'ordre n sur les points d'un plan?). M. Castelnuovo s'est proposé de le démontrer dans le travail actuel.

Il n'a pu utiliser pour cela les travaux antérieurs, relatifs à des involutions d'ordre n ou cycliques, qui font intervenir les propriétés des transformations crémoniennes, lesquelles n'ont rien à voir ici. Voici la méthode qu'il a adoptée : voulant reconnaître si la surface S qui correspond aux groupes d'une involution plane est rationnelle, il étudie les systèmes linéaires de courbes tracées sur cette surface et les compare aux systèmes linéaires de courbes du plan dont les propriétés sont connues. Il cherche ensuite des propriétés de ces systèmes qui soient *caractéristiques* pour une surface rationnelle, dans le cas où il en existerait. C'est ainsi qu'il établit :

1° Que si un système linéaire de courbes tracées sur S est *normal* (n'est pas contenu dans un système à un paramètre de plus, ayant le même degré), la série linéaire (des groupes) découpée sur une courbe du système par toutes les autres est *complète* (Vollschaar);

2° Qu'il existe sur la surface S un système linéaire dont la dimension surpasse le genre d'une courbe générale du système.

L'ensemble de ces deux propriétés est caractéristique des surfaces rationnelles. D'où la démonstration énoncée.

Korselt (*A.*). — Remarque sur l'Algèbre de la logique. (156-157).

Bertini (*E.*). — Transformation d'une courbe algébrique en une autre qui n'a que des points doubles. (158-160).

La méthode de M. Bertini revient, d'après M. Klein (remarque sur la Note précédente), à regarder le plan de la courbe comme la représentation univoque d'une surface gauche du troisième ordre, c'est-à-dire à la transformer en courbe gauche qu'on projette ensuite sur le plan d'un point suffisamment arbitraire.

Schilling (*Fr.*). — Contribution à la théorie géométrique de la fonction s de Schwarz. (161-200).

Ce travail considérable est consacré au fond à l'étude de la représentation conforme du plan complexe obtenue par la fonction s de M. Schwarz définie

par l'équation du troisième ordre

$$\{s, z\} = \frac{\dfrac{d^3 s}{dz^3}}{\dfrac{ds}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2 s}{dz^2}}{\dfrac{ds}{dz}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left[\frac{1-\lambda^2}{2}\frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\frac{(b-c)(b-a)}{z-b} - \frac{1-\nu^2}{2}\frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right]$$

les méthodes appliquées présentent en général un caractère géométrique et élémentaire.

Le Mémoire de M. Schilling comporte six parties dont nous nous bornerons à indiquer les titres :

I. Historique de la question et plan du Mémoire.

II. Le cas de deux points singuliers.

III. Sur le noyau (Kern) du domaine fondamental dans le cas de trois points singuliers. Soient A, B, Γ les trois substitutions relatives aux trois points singuliers (qui vérifient la relation identique $ABΓ = 1$); l'auteur appelle *noyau* le système des droites qui joignent, sur la sphère qui porte les valeurs de la variable complexe, les couples de points fixes des substitutions A, B, Γ.

IV. Sur la nature géométrique des triangles généraux formés d'arcs de cercle.

V. Discussion du domaine fondamental pour des exposants complexes.

VI. Le domaine fondamental pour des exposants complexes satisfaisant à la relation

$$-\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n - 1$$

Conclusion.

Ritter (*E.*). — Les formes multiplicatives dans un domaine algébrique de genre quelconque. Application à la théorie des formes automorphes. (261-375).

Dans un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLI) l'auteur a montré dans le cas de $p = 0$ comment les théorèmes d'existence et les propriétés des fonctions automorphes pouvaient s'établir en variables homogènes par la considération des *formes automorphes*. Il se propose d'étendre ce résultat à un domaine fondamental de genre quelconque.

Une des difficultés de la question consiste à choisir les variables homogènes ζ_1, ζ_2 dont le quotient définit la fonction automorphe ζ de façon qu'elles dépendent simplement des variables homogènes z_1, z_2, telles que $\frac{z_1}{z_2} = z$. On ne peut plus considérer toutes les formes automorphes ζ_1, ζ_2 comme algébriques en z_1, z_2, mais on peut les envisager comme des formes multiplicatives (ou à multiplicateurs constants). L'auteur a dû commencer par la théorie de ces formes à multiplicateurs, et l'un des premiers problèmes abordés a été la construction d'une *forme primaire multiplicative* (Primform) avec un seul zéro (analogue à celle que l'on doit à Klein, pour la variable z). Cette forme a été

obtenue par combinaison de la *forme de Klein* avec une racine de la *forme auxiliaire* (Mittelform), après une étude détaillée des propriétés de la *forme primaire de Klein* dans le domaine ou sur la surface de Riemann correspondante.

L'application aux fonctions automorphes constitue la troisième partie du travail : Domaine fondamental et groupe. Dédoublement des transformations linéaires de ζ en transformations linéaires entières sur ζ_1 et ζ_2. Les systèmes de multiplicateurs des formes automorphes uniformes. Existence des fonctions automorphes. Expression de ζ_1 et ζ_2 comme formes multiplicatives de z_1, z_2. Nombre des constantes arbitraires dans les formes automorphes; leurs infinis. Les formes automorphes élémentaires.

Ces recherches séparant, d'après l'auteur, parmi les propriétés des séries Θ de M. Poincaré (qui représentent les fonctions automorphes), celles pour l'étude desquelles la considération de la série est inutile, faciliteront les recherches profondes sur ces séries Θ : relation des modules du domaine fondamental avec les constantes du groupe; nature des séries Θ comme fonctions des coefficients des formes rationnelles qui ont servi à les construire, etc.

Landon (*F.*). — Sur la théorie de l'affinité trilinéaire de trois domaines fondamentaux à un paramètre. (3-5-{12).

Soient Ξ, Π, Z trois domaines à un paramètre (points sur une droite, faisceau de rayons, faisceau de plans); désignons par ξ les éléments de Ξ, par η et ζ ceux de Π et Z et supposons que chacun de ces éléments soit donné par deux coordonnées homogènes ξ_1, ξ_2 : η_1, η_2 : ζ_1, ζ_2. Un système de trois éléments ξ, η, ζ est un *terne* (tripel) et une relation trilinéaire

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{ijl} a_{ijl} \xi_i \eta_j \zeta_l = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

constitue ce que l'auteur nomme une *affinité* (Verwandtschaft) trilinéaire : elle donne une double infinité de ternes qui forment un *champ de ternes*; ces ternes sont nommés *ternes nuls* parce qu'ils annulent $f(\xi, \eta, \zeta)$. A chaque élément d'un terne correspondent, de manière à constituer un terne nul, une infinité de couples d'éléments, liés projectivement.

Après avoir étudié les propriétés fondamentales d'un champ de ternes, l'auteur s'occupe des relations de ce champ avec les suites simplement infinies de ternes formées des éléments correspondants de trois domaines projectifs et, en particulier, de celles de ces suites qu'il contient. Il indique ensuite les constructions les plus importantes d'un champ de ternes qui se ramènent à des constructions projectives ordinaires.

Considérant, comme application, une affinité trilinéaire entre trois faisceaux de plans, il montre que, suivant la position des axes et la nature de la relation, elle peut servir à engendrer *toutes* les surfaces du troisième ordre, générales ou particulières (mêmes réductibles). Il retrouve ainsi une construction des surfaces du second degré passant par neuf points.

Pringsheim (*A.*). — Sur la convergence conditionnelle des produits infinis. (13-{16).

Démonstration élémentaire du fait que le produit $\Pi(1+c_\nu)$, où l'ordre des termes est fixé et où la série réelle Σc_ν converge pour cet ordre, converge ou *diverge vers zero* suivant que la série Σc_ν^2 converge ou diverge.

Hurwitz (*A.*). — Sur l'expression approchée des nombres par des fractions. (417-436).

Problème fondamental. Les suites de Farey et leurs propriétés. Fractions approchées d'un nombre donné. Sur la résolution des équations de Diophante du second degré. Le développement naturel en fraction continue. Transformation linéaire. Généralisations.

Nous signalerons en particulier dans ce travail le rapprochement entre la théorie des *caracteristiques* de Christoffel (*Annali di Matematica*, 2° série, t. XXV) et la théorie classique des fractions continues.

Runge (*C.*). — Sur les Mathématiques appliquées. (437-448).

Calcul, dans un champ donné de la variable t, de l'erreur commise en substituant à la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

une solution approchée définie par la méthode de Cauchy qui coïncide avec la première pour $t = t_0$. Extension aux systèmes simultanés.

Lilienthal (*R.* v.). — Sur la condition sous laquelle une famille de surfaces fait partie d'un système triple orthogonal. (449-457).

Si l'on définit un système triple orthogonal par les équations

$$x = f_1(p, q, r), \qquad y = f_2(p, q, r) \qquad z = f_3(p, q, r);$$

en laissant p, q constants on a une famille de courbes, qui sont d'abord trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces et ensuite cette dernière famille appartient à un système triple. Posons

$$\begin{aligned} &dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &\quad = a_{11}dp^2 + a_{22}dq^2 + a_{33}dr^2 + 2a_{12}dp\,dq + 2a_{23}dq\,dr + 2a_{31}dr\,dp; \end{aligned}$$

les deux conditions sont exprimées séparément par

$$a_{13}\left(\frac{\partial a_{23}}{\partial r} - \frac{\partial a_{33}}{\partial q}\right) + a_{23}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p} - \frac{\partial a_{13}}{\partial r}\right) + a_{33}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial q} - \frac{\partial a_{23}}{\partial p}\right) = 0$$

et par

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial r} & \frac{\partial A_{12}}{\partial r} & \frac{\partial A_{22}}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial r^2} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a posé

$$A_{ik} = a_{il}a_{kl} - a_{ik}a_{il}, \qquad A_{ii} = a_{ii}a_{il} - (a_{il})^2 \qquad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

L'auteur démontre comme application que toute famille de surfaces trajectoires orthogonales de cercles fait partie d'un système triple.

Weber (*E.* v.). — Théorie des éléments de contact d'ordre supérieur dans l'espace à 3 dimensions. (458-472).

Généralisation de la notion habituelle d'élément de contact d'ordre supérieur et de la définition des éléments *aux*. La théorie des équations d'ordre supérieur, envisagée au point de vue géométrique avec ces définitions, peut être regardée comme une généralisation de la théorie de Lie pour le premier ordre ou de la théorie des connexes. Nouvelle interprétation des équations des caractéristiques et généralisation du théorème relatif aux tangentes conjuguées en un point d'une surface.

Cohn (*F.*). — Sur les grandeurs formées par voie récurrente et leur relation avec les équations algébriques. (473-538).

Si les P_n sont définis par la formule récurrente

$$P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + \ldots + a_\nu P_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où les a_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ sont des nombres complexes donnés et où les grandeurs $P_1, \ldots, P_\nu$ sont arbitraires, le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite déterminée (indépendante de $P_1, \ldots, P_\nu$) quand l'équation algébrique

$$f(z) = z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - a_2 z^{\nu-2} - \ldots - a_\nu = 0$$

possède une racine z_1 de module supérieur à celui de toutes les autres et n'est pas *réductible* dans le domaine $a_1, \ldots, a_\nu, P_1, \ldots, P$; cette limite est la racine z_1.

C'est ainsi que l'auteur donne les conditions générales d'application du théorème de Bernoulli pour le calcul de la racine de plus grand module. Il montre ensuite qu'on peut déduire des P d'autres suites Q pour lesquelles le quotient $\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ tend vers une racine quelconque de la même équation; dans chaque cas toutes les racines pourront se calculer par voie rationnelle avec une approximation quelconque.

Dans une seconde Partie ces résultats sont étendus au cas où les a_i sont des fonctions d'une variable complexe : conditions de convergence; séparation des diverses branches de la fonction algébrique ainsi définie; permutations subies par les valeurs approchées des racines quand cette variable complexe décrit un contour parfait, etc. Applications.

Lurath (*J.*). — Démonstration d'un théorème de Bertini sur les systèmes linéaires de fonctions entières. (539-552).

Dans un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLII) l'auteur a publié une démonstration algébrique d'un théorème de M. Bertini : Quand toute fonction d'un système linéaire de fonctions entières se décompose, ou bien toutes les fonctions du système ont un facteur commun, ou bien elles se décomposent en fonctions qui appartiennent à un même faisceau. Cette démonstration faisait appel à un théorème de M. Gordan; la présente en est indépendante.

Stäckel (*P.*). — Sur les représentations. (552-564).

Quand deux surfaces se correspondent point par point, M. Tissot a montré qu'il existe deux systèmes orthogonaux qui se correspondent (si la correspondance est réelle); Lie a étendu cette proposition au cas des correspondances quelconques et signalé un cas d'exception. M. Stäckel démontre ces propositions analytiquement. Il examine ensuite les correspondances qui changent entre elles les asymptotiques des deux surfaces et en signale diverses propriétés. Application aux déformations connues.

Fricke (*R.*). — Les quadrilatères formés d'arcs de cercle et le principe de symétrie. (564-599).

L'auteur considère un domaine à connexion quelconque limité par quatre arcs de cercle; il en prend les *symétriques* par rapport aux cercles qui le limitent et répète cette opération indéfiniment. Sous quelles conditions recouvrira-t-il une seule fois le plan complexe? De quelle nature est le système de points limites de tous ces domaines?

Dans le cas de domaines triangulaires, il existe un cercle principal qui contient ces points limites, mais ici on rencontre toute une série de domaines limites que l'auteur caractérise dans la terminologie de M. G. Cantor, en n'employant pour leur étude que des moyens géométriques élémentaires.

Différents types de quadrilatères formés d'arcs de cercle. Invariants d'un système de quatre cercles pour les transformations circulaires. Domaine de rationalité des coefficients des substitutions. Recherche systématique de tous les quadruples de cercles. Le réseau des domaines et le domaine limite pour un domaine fondamental sans sommets. Cas limite où le domaine est formé de deux quadrilatères à angles nuls. Décomposition particulière des courbes limites en un système de cercles. Les groupes du quadrilatère à substitutions elliptiques.

Prix de la Société « Prince Jablonowski » pour 1897. (600).

Tome XLV; 1894.

Junker (*Fr.*). — Fonctions symétriques et relations entre les fonctions symétriques élémentaires. (1-84).

Considérons n *séries* de r variables

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & \ldots, & x_r, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_r, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ w_1, & w_2, & \ldots, & w_r; \end{array}$$

leur ensemble donne lieu à r *groupes* de n lettres, chaque groupe étant constitué par les lettres de même indice :

On peut former des fonctions de ces nr variables qui ne changent pas quand on permute les éléments correspondants de deux séries (fonctions symétriques des *séries*), ou aussi quand on permute les éléments correspondants de deux groupes (fonctions symétriques des *groupes*), ou enfin des fonctions *doublement symétriques* qui possèdent les deux propriétés.

Les fonctions symétriques *élémentaires* sont celles qui sont linéaires par rapport aux éléments de chaque *série* (ou de chaque groupe) ; elles sont en nombre

$$\Gamma_n^r - 1,$$

Γ_n^r désignant le nombre des combinaisons *complètes* de n lettres r à r, et par suite sont liées par des relations identiques en nombre $\Gamma_n^r - nr - 1$. L'auteur, qui a déjà indiqué (t. XLIII) deux méthodes pour former ces relations, en donne de nouvelles.

Le calcul effectif de ces relations identiques est indiqué pour trois séries de variables, le nombre des groupes pouvant aller jusqu'à sept.

Observant que le produit des r facteurs

$$xx_1 + yy_1 + \ldots + ww_1 + 1 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

a pour coefficients toutes ces fonctions élémentaires, qui sont en nombre égal à celui des coefficients indépendants d'une forme d'ordre r à n variables, l'auteur montre ensuite que les relations identiques entre les fonctions élémentaires donnent *les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme d'ordre r, à n variables, soit décomposable en un produit de facteurs linéaires*. D'autres interprétations géométriques de ces relations sont signalées.

La dernière partie du travail a pour but le calcul des fonctions symétriques d'*un nombre limité de groupes*, au moyen des fonctions élémentaires, et l'obtention de *formes canoniques uniques*, en tenant compte des relations identiques qui lient les fonctions élémentaires. De nombreux exemples éclairent la théorie générale de la réduction.

Hurwitz (A.). — Sur la réduction des formes quadratiques binaires. (85-118).

M. F. Klein avait montré en détail, dans une leçon de 1879, comment la théorie de la réduction des formes quadratiques est liée à l'étude de la *figure modulaire* qui sert de base à la théorie des fonctions modulaires. Ce lien avait également été utilisé par Dedekind (*Journal de Crelle*, t. 83) pour les formes à déterminant négatif et par M. Stephen Smith (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, 18[illegible]) pour les autres.

M. Hurwitz indique ici un nouvel habillement géométrique de la théorie de la réduction :

On sait que si x, y, z désignent les coordonnées trilinéaires d'un point, le point $x : y : z = 1 : -\lambda : \lambda^2$, où λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, décrit une conique : il est loisible de supposer que cette conique est un cercle et qu'aux valeurs $0, 1, \infty$ de λ correspondent les sommets d'un triangle équilatéral. La droite qui joint les points $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ est dite *sécante élémentaire* si $rv - su = \pm 1$. Trois de ces droites forment un *triangle élémentaire* et l'ensemble de ces triangles inscrits recouvre l'intérieur du cercle simplement et sans lacunes.

Une forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est représentée par le point de coordonnées a, b, c : si $D = b^2 - ac$ est négatif le point est intérieur au cercle. Aux transformations $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, correspondent des transformations linéaires et homogènes de a, b, c qui n'altèrent pas l'ensemble des points du cercle correspondant aux valeurs rationnelles de λ, par suite l'ensemble des *sécantes* et des *triangles élémentaires*, mais permute ces derniers.

Une forme à déterminant négatif est *réduite* si le point représentatif est à l'intérieur ou sur les bords du triangle $0, 1, \infty$. Comme ce dernier admet en lui-même trois transformations, il y a trois réduites entre lesquelles on peut choisir par de nouvelles conventions. La théorie de la réduction est indiquée. Le point représentatif d'une forme à déterminant positif est en dehors du cercle : M. Hurwitz le remplace par sa polaire par rapport au cercle : la forme est réduite si cette polaire coupe la sécante $0, \infty$. Deux formes sont *équivalentes* quand elles ont même chaîne de formes réduites et seulement dans ce cas. L'algorithme de la réduction est indiqué et appliqué à des exemples.

Une application est faite à la recherche des *caractéristiques* au sens de Christoffel des irrationnelles qui sont racines de la forme.

M. Hurwitz indique enfin en terminant plusieurs exemples (formes binaires à coefficients complexes, de Dirichlet ou d'Hermite, formes quadratiques à coefficients réels et n variables) où le principe qui l'a guidé (considération des formes à déterminant nul (représentées ici par les points du cercle) et de la façon dont elles se transforment les unes dans les autres, puis passage aux formes quelconques) trouvera encore son application. Il se propose d'y revenir plus tard.

Baker (*H.-F.*). — Sur la théorie des intégrales de différentielle algébrique, d'après Riemann. (118-132).

L'auteur s'est proposé de reviser et compléter un travail de M. Hensel (*Journal de Crelle*, t. 100) consacré à un exposé algébrique de la théorie des intégrales abéliennes.

Sur les fonctions entières fondamentales. Sur l'expression des fonctions algébriques qui ne sont infinies qu'en un point arbitraire. Sur l'expression des intégrales des trois espèces et la forme des courbes adjointes en général.

Baker (*H.-F.*). — La détermination pratique du genre et des courbes adjointes, pour une surface de Riemann. (132-139).

Extrait d'un travail de l'auteur (*Cambridge. Phil. Trans.*, Vol. XV, 2e Partie)

où, *par la considération d'un simple diagramme,* on obtient une limite supérieure du genre et une forme nécessaire pour les fonctions adjointes d'ordre $(n-3)$ d'une courbe quelconque; enfin une limite inférieure du nombre des intersections de chaque adjointe avec la courbe elle-même en un point singulier. Les règles ne sont applicables qu'*en général.*

L'auteur signale un travail de M. Hensel (*Journal de Crelle*, t. 109) poursuivant le même but.

Klein (*F.*). — Leçons autographiées. (140-152).

Ces leçons ont été faites de 1891 à 1894, et publiées par l'Institut mathématique de l'Université de Gottingen. M. Klein en expose ici l'esprit et les points essentiels. (*Sur les surfaces de Riemann; sur la Géométrie supérieure; sur la fonction hypergéométrique.*)

Schubert (*H.*). — Fonctions énumératives générales pour les coniques, quadriques et variétés quadratiques de l'espace à n dimensions. (153-206).

En « Géométrie énumérative » on se propose de déterminer le nombre x de domaines géométriques bien définis Γ qui satisfont à des conditions données Z_1, Z_2, ...; les nombres z_1, z_2, ... qui indiquent combien de fois chacune de ces conditions doit être satisfaite sont habituellement des nombres entiers *déterminés* : un premier progrès consistera à traiter la même question en laissant les entiers z_1, z_2, ... arbitraires, c'est-à-dire à déterminer x comme fonction de z_1, z_2, ... Il paraît utile pour cela de considérer aussi comme arbitraire le nombre n des dimensions de l'espace ou se trouve plongé le domaine Γ, et d'étendre les définitions des conditions Z_1, Z_2, ... à cet espace; ce n'est en effet qu'après avoir traité le cas d'un espace à n dimensions qu'on peut voir de quelle façon l'hypothèse $n=3$ intervient dans les formules de la Géométrie énumérative.

Exemple : Dans un espace linéaire à n dimensions, il y a $\frac{2^{n-1}(2n-3)!}{n!(n-2)!}$ coniques qui touchent $3n-1$ espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions donnés. Cas particuliers :

$$n=2, \qquad n=3, \qquad n=4.$$

L'auteur a déjà donné les formules énumératives pour les droites, plans, espaces linéaires dans un espace à n dimensions; il indique ici les formules générales pour toutes les variétés quadratiques, formules qui pour $n=2$, $n=3$ donnent les résultats dus à Chasles, Zeuthen, etc.

Une Table des formules *élémentaires* pour l'espace à 4 dimensions termine ce travail.

Gall (*Frhr.* v.). — Le système complet des formes invariantes pour trois formes cubiques binaires. (207-234).

S'appuyant sur les résultats obtenus dans un précédent travail, relatif aux *syzygants* de deux formes cubiques binaires (*Math. Ann.*, t. XXXI), l'auteur construit les formes invariantes *mêlées*, c'est-à-dire où interviennent à la fois

les trois formes cubiques : les formes fondamentales (*Grundformen*) sont obtenues, mais l'établissement des syzygants les plus simples entre ces formes est renvoyé à un Mémoire ultérieur.

Graf (*J.-H.*). — Contribution à l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients linéaires et aussi des équations du second ordre vérifiées par certaines intégrales définies. (235-262).

L'auteur reprend par une méthode directe l'étude de l'équation

$$(A_0 x + B_0)\frac{d^2 y}{dx^2} + (A_1 x + B_1)\frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2)y = 0,$$

déjà faite par M. L. Pochhammer (*Math. Ann.*, t. XXXVIII, XLI) dont il retrouve les conclusions. Il applique ensuite la méthode d'Euler et retrouve, en particulier, des résultats indiqués par Dienger (*Les calculs differentiel et integral*, Stuttgart, 1857).

Sommerfeld (*A.*). — Sur la théorie analytique de la propagation de la chaleur. (264-277).

Parallèlement à ce qui se passe pour la théorie du potentiel qu'on peut présenter soit en partant du potentiel newtonien $\frac{1}{r}$, admettant l'action à distance et l'existence de pôles ou de masses électriques, soit en partant de l'équation de Laplace, admettant l'existence d'un milieu continu dont l'état électrique est déterminé en chaque point par celui des parties infiniment voisines, on peut envisager la théorie de la propagation de la chaleur, comme l'a fait Fourier, en partant de l'équation

$$\frac{du}{dt} = a^2 \Delta u,$$

ou encore en admettant l'existence de pôles de température, c'est-à-dire de points où se trouve concentrée une quantité finie de chaleur, dont l'action se fait sentir à distance. La méthode mathématique correspondante consiste à partir d'une solution *principale*

$$u = (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

qui indique l'action d'un pôle d'intensité 1 dans un milieu indéfini de conductibilité thermique a^2 sur un point qui en est à la distance r; cette solution joue le rôle de $\frac{1}{r}$ (ou $\log r$) dans la théorie du potentiel.

Quand il s'agit du mouvement de la chaleur dans un corps *limité* K, l'auteur déduit d'abord de la solution principale u la *fonction de Green* correspondant à K (cette fonction est définie de façon analogue à la fonction connue de la théorie du potentiel). La solution du problème s'obtient alors par des quadratures.

Beke (*E.*). — L'irréductibilité des équations différentielles linéaires et homogènes. (278-294).

Considérant une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients *rationnels*, l'auteur se propose de *reconnaître effectivement* si elle admet ou non des solutions communes avec une équation de même nature, mais d'ordre inférieur. Supposons l'équation donnée d'ordre n

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0,$$

pour reconnaître si elle admet toutes les solutions d'une équation d'ordre moindre

$$(2) \qquad y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + \ldots + q_m y = 0$$

(problème équivalent au précédent), on observe que l'on a

$$q_1 = -\frac{\Delta'}{\Delta}, \qquad q_m = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

où les Δ, Δ_1 sont certains déterminants composés avec m solutions distinctes de (1); ces Δ, Δ_1 sont solutions de certains systèmes d'équations linéaires qu'on peut former connaissant m. On forme d'abord l'équation linéaire qui définit Δ, on la transforme en choisissant $\frac{\Delta}{\Delta_1}$ comme inconnue et l'on cherche à vérifier la nouvelle équation (analogue à une équation de Riccati) par un développement

$$\sum \frac{\lambda}{(x-a)^s} + \ldots + \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est relatif aux pôles d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme $\sum \frac{\alpha}{x-\beta}$.

La première partie du développement s'obtient sans peine, *car on peut, par examen des coefficients, déterminer les a et une limite supérieure de l'ordre de multiplicité du pôle;* on aura ensuite, en désignant par $R(x)$ cette première partie,

$$\Delta = e^{\int R(x)\,dx}\,v,$$

v représentant une fonction entière (polynome) si $\frac{\Delta}{\Delta_1}$ est rationnel.

Ce polynome v devra vérifier une équation linéaire facile à former et l'on sait immédiatement limiter son degré.

Δ étant connu, si l'on pose dans l'équation qui définit Δ_1 (et qui est aussi linéaire) $\Delta_1 = q\,\Delta$, on aura une équation en q qui devra admettre une solution rationnelle, ce qu'on sait reconnaître. Les q étant déterminés, il restera à vérifier que (1) admet toutes les solutions de (2) ou n'en admet aucune (*Méthode classique de Brassine*).

Beke (*E.*). — Les fonctions symétriques dans la théorie des équations différentielles linéaires. (295-300).

Schmidt (C.). — Sur un algorithme pour le calcul de la racine $n^{\text{ième}}$ de a. (301-308).

Il s'agit de l'algorithme itératif

$$x_i = \frac{n-1}{n} x_{i-1} + \frac{a}{n x_{i-1}^{n-1}},$$

que l'auteur étudie dans le domaine réel. La convergence est étudiée également dans le domaine complexe pour $n = 2$.

Hilbert (D.). — Sur le *corps numérique* biquadratique de Dirichlet. (309-340).

Introduction. Les nombres entiers du *corps* de Dirichlet. Les idéaux premiers. Partage des classes d'idéaux en genres. Génération des classes d'idéaux du genre principal. Les idéaux ambigus. Les classes ambiguës. Le nombre des genres. Loi de réciprocité. Le corps de Dirichlet spécial. Nombre des classes d'idéaux du corps spécial de Dirichlet.

Après l'introduction que l'on doit à Gauss des entiers imaginaires $a + bi$ en Arithmétique, Dirichlet a étudié dans une série de Mémoires (*Œuvres*, t. I, p. 505, 511, 533) le corps biquadratique de nombres qui comprend l'unité i, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$\alpha + \frac{\beta\sqrt{\delta}}{\gamma},$$

où α, β, γ sont des entiers imaginaires arbitraires et où δ est un nombre entier *imaginaire* déterminé, qui n'est divisible par aucun carré d'entier imaginaire. C'est ce corps que M. Hilbert appelle *corps de Dirichlet*. Dirichlet a appliqué à ce corps sa *Méthode analytique* pour la recherche du nombre des classes d'idéaux; dans le cas particulier où le corps renferme, en dehors de celui déterminé par i, un second corps quadratique (ce qui exige que δ soit réel ou purement imaginaire), il a établi que le nombre des classes d'idéaux du *corps biquadratique spécial* est, ou peut être *au facteur* $\frac{1}{2}$ *près*, le produit des nombres analogues relatifs aux deux corps quadratiques définis par $\sqrt{\delta}$ et par $\sqrt{-\delta}$. La relation ainsi obtenue entre ces deux derniers nombres est considérée par lui comme un des beaux résultats de l'Arithmétique supérieure.

M. Hilbert s'est proposé de développer la théorie du *corps de Dirichlet*, sans sortir du domaine de l'Arithmétique. L'étude du *corps spécial* faite par sa méthode l'amène à reconnaître que certains *genres* de classes d'idéaux de ce corps s'obtiennent aisément par la composition des classes d'idéaux des deux corps quadratiques $\sqrt{\delta}$ et $\sqrt{-\delta}$ qui y sont contenus; la proposition de Dirichlet est ainsi établie sans l'intervention de l'Analyse.

Stäckel (P.). — Sur les courbes gauches algébriques. (340-370).

Dans un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLIII) l'auteur a montré que toutes les courbes gauches algébriques *rectifiables* sont des développées des

courbes gauches algébriques. La réciproque n'a lieu que si le sinus de l'*angle de torsion* dépend algébriquement des coordonnées.

Pour les courbes planes ou sphériques cette condition est toujours remplie; l'auteur avait donc pu déterminer explicitement les courbes gauches algébriques rectifiables dont une développante est plane ou sphérique.

Il est parvenu ici à traiter la même question pour une courbe gauche algébrique rectifiable quelconque en observant qu'à une telle courbe correspond *par parallélisme des tangentes* une courbe gauche *sphérique* algébrique dont le rayon de courbure est fonction algébrique des coordonnées. On est alors ramené à construire toutes les courbes gauches algébriques dont les plans osculateurs sont parallèles à ceux d'une courbe sphérique algébrique donnée, problème qui n'offre pas de difficulté théorique.

M. Stäckel traite ensuite comme application la détermination de toutes les développables algébriques dont les lignes de courbure sont des courbes gauches algébriques.

Si pour une courbe gauche algébrique le sinus de l'angle de torsion est une fonction algébrique des coordonnées (ξ, η, ζ) *d'un point de la courbe, cette fonction est de la forme*

$$R_1 + R_2 \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2},$$

où R_1 *et* R_2 *sont rationnels en* ξ, η, ζ.

L'établissement de cette proposition amène l'auteur à envisager les courbes pour lesquelles

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$$

peut prendre la forme $R(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi$; ces courbes sont l'extension à l'espace des *courbes de direction* de Laguerre.

Il termine enfin son travail en s'occupant de la recherche des courbes gauches rationnelles qui sont des hélices, question qu'il traite complètement pour les cubiques gauches.

Hermes (*J.*). — Nombre des décompositions d'un nombre entier en somme de parties. (371-380).

Appelons *suite de Lamé d'ordre r*, une suite d'entiers L commençant avec r zéros et $(r+1)$ termes égaux à *un*, qui satisfont à la loi de récurrence :

$$L_{h+1} = L_h + L_{h-r};$$

rappelons aussi que l'on désigne sous le nom de *suite de Farey* une suite d'entiers τ définis par

$$\tau_1 = 1, \qquad \tau_n = \tau_{n-2^p} + \tau_{2^{p+1}+1-n},$$

où l'on a

$$2^p < n < 2^{p+1}.$$

L'auteur établit d'abord une relation entre les diverses décompositions d'un entier m en somme et certains groupes de la suite de Farey, suite qu'il étudie

en détail. Il montre ensuite que le nombre des décompositions d'un nombre m en somme (d'où l'on a exclu les nombres $1, 2, \ldots, r$) est, *en y comprenant les permutations*, égal au $m^{\text{ième}}$ terme de la suite de Lamé d'ordre r. Une formule est indiquée pour le calcul de ce terme.

Hurwitz (*A.*). — Sur la théorie des invariants. (389-404).

M. Hurwitz observe que dans la théorie des formes la notion d'invariant ne se rattache qu'indirectement à la considération des formes : les coefficients forment au fond un système de variables qui subissent des transformations linéaires et homogènes, les invariants se rattachent de façon immédiate à ces transformations. Il suffit de se borner à considérer celles de déterminant *un*, lorsqu'on envisage des fonctions homogènes.

Toute la théorie des invariants des formes se présente donc comme associée à celle des transformations linéaires et homogènes et des groupes qu'elles forment.

La notion d'invariant. Substitutions contragrédientes. L'opérateur différentiel de Boole-Sylvester. Exemples. L'opérateur Ω de Cayley. Lemme algébrique. Produits de transformations. Puissances. Transformations de déterminants associés à une transformation linéaire. Formes préparées. Opérateurs différentiels invariants pour les systèmes de formes. Déduction des invariants d'un système de formes de ceux d'un second système. Loi de réciprocité d'Hermite. Sa généralisation.

Gordan (*P.*). — Sur les résultants (Extrait d'une lettre à M. Hurwitz). (405-409).

Formation du résultant au moyen des déterminants compris dans deux matrices rectangulaires, l'une à m lignes formée avec $a_1, \ldots, a_n$, l'autre à n lignes formée avec $b_1, \ldots, b_m$.

Gordan (*P.*). — La décomposition d'une courbe en un système de droites. (410-427).

M. Brill a donné (*Gottinger Nachrichten*, 1873) des *rejets* binaires (*Ueberschiebungen*) dont on peut conclure les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire, quaternaire, etc. soit décomposable en facteurs linéaires.

Pour les formes ternaires, il faut et il suffit qu'un *rejet* $(apu)^n$ s'annule identiquement. M. Gordan montre que ce *rejet* renferme le facteur u_x^2 et calcule le quotient, qu'on devra alors substituer à $(apu)^n$.

Humbert (*G.*). — Sur la théorie générale des surfaces unicursales. (428-445).

Considérant une surface unicursale d'ordre n, donnée par sa représentation plane,

$$\rho x_i = x_i(u, v) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou les x_i sont des polynomes d'ordre h en u, v, M. Humbert s'est proposé de

rechercher les images des courbes d'intersection de la surface avec ses adjointes d'ordre quelconque. Il établit à ce sujet la proposition suivante :

Si les sections planes de la surface unicursale S, *d'ordre n, ont pour images des courbes d'ordre h ayant aux points* (a_1), (a_2), ... *des singularités* σ_1, σ_2, ..., *les images des courbes d'intersection mobiles de* S *avec ses adjointes d'ordre* $(n+q-4)$ *sont des courbes d'ordre* $hq-3$ *ayant aux points* (a_1), (a_2), ... *les singularités* $(q\sigma_1)$, $(q\sigma_2)$, ... *adjointes aux singularités* $(q\sigma_1)$, $(q\sigma_2)$, ...

La réciproque est vraie.

Si le genre des sections planes de la surface S est p, le nombre des surfaces adjointes d'ordre $(n+q-4)$, linéairement distinctes, est

$$\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)-1+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}.$$

Ces résultats amènent l'auteur à compléter l'étude des *points multiples* sur une surface unicursale.

Nommons *point remarquable* tout point multiple par où passent les surfaces adjointes, tel que les surfaces adjointes le long des lignes multiples ne soient pas nécessairement adjointes en ce point : si une surface unicursale d'ordre n, S, possède t points *remarquables*, il existera au moins une surface d'ordre $(n-4)$ adjointe à S le long des lignes multiples et en r *seulement* des points remarquables $(r<t)$, arbitrairement choisis. Il y aura donc au moins t adjointes d'ordre $(n-4)$ le long des lignes multiples, linéairement indépendantes.

Kneser (*A.*). — Sur l'inversion des systèmes de fonctions de variables réelles. (446-470).

Il s'agit de préciser les conditions sous lesquelles l'inversion d'un système de fonctions *réelles* de variables *réelles* peut se faire d'une manière unique. L'auteur étudie la question directement, sans faire comme Lipschitz appel à la transformation d'intégrales d'ordre n en intégrales d'ordre $(n-1)$ (*Gottinger Nachrichten*, 1870; *Lehrbuch der Analysis*, t. II). Ses conditions sont plus simples que celles du théorème rappelé de Lipschitz.

Réthy (*M.*). — Sur la démonstration du théorème principal relatif à « l'égalité finie » de deux systèmes plans. (471-472).

Ritter (*E.*). — La continuité des fonctions automorphes par déformation continue du domaine fondamental. (472-544).

L'auteur se propose d'établir la continuité des fonctions automorphes attachées à un domaine fondamental, pour une déformation continue de ce domaine, à l'aide de principes analogues à ceux qui lui servent à établir l'existence de ces fonctions. Sa démonstration géométrique s'étend au cas où le domaine fondamental est tel qu'il n'existe plus de fonctions automorphes *uniformes;* elle s'applique donc à une surface de Riemann quelconque et aux fonctions algébriques correspondantes.

Après avoir précisé la *grandeur* de la déformation d'un domaine, il calcule une limite supérieure de la variation des fonctions automorphes correspondantes. Tout ceci n'est développé que pour un domaine fondamental *symétrique* au sens adopté par M. Poincaré.

Les méthodes sont indiquées en détail de façon à faciliter leur application ultérieure au cas d'un domaine non symétrique.

London (*F.*). — Les courbes gauches du sixième ordre, de genre *un*, et les affinités trilinéaires. (545-597).

Continuation des recherches de l'auteur sur les affinités trilinéaires (*Math. Ann.*, t. XLIV : *Cf.* plus haut l'Analyse de ce travail).

Étude du système simplement infini des *ternes* qui vérifient deux relations trilinéaires; l'auteur le nomme *série bicursale de ternes*. Les ternes de rayons qui joignent à trois points fixes d'une cubique plane tous les points de la courbe, les ternes de plans qui projettent les points d'une courbe gauche d'ordre 4, 5, (de genre *un*) de trois de ses bi, tri, quadrisécantes, forment de tels systèmes. De là un mode de génération commun à tous ces domaines.

Propriétés du système de six ternes qui vérifient trois relations trilinéaires. Chaque relation trilinéaire qui est satisfaite par cinq de ces ternes l'est par le sixième qu'on peut construire linéairement.

On ramène à ces systèmes celui des 9 points communs à deux cubiques planes, des 8 points communs à trois quadriques, des 6 couples communs à 4 *réciprocités;* donc une seule construction s'applique encore à tous ces cas.

Application des résultats obtenus à l'étude des courbes gauches *du sixième ordre, de genre un*. Il existe sur ces courbes quatre points remarquables S ; par chacun d'eux passent trois trisécantes et chacun d'eux est point double d'une surface du troisième ordre contenant la courbe. Ces quatre points sont aussi les points triples de quatre surfaces de Steiner qui contiennent la courbe et dont les droites doubles sont les trisécantes déjà citées.

De l'étude des groupes de six points associés sur la courbe, il ressort qu'à chaque point S_1 correspondent quatre systèmes de ternes qui jouent sur cette courbe un rôle analogue à celui des ternes déterminés par une droite quelconque sur une cubique plane.

Enfin l'auteur recherche les plans tangents en trois points à la courbe gauche : il en existe 16 qui se tangent en 4 groupes; les tétraèdres qu'ils forment ont pour faces les plans doubles des quatre surfaces de Steiner dont on a parlé.

Hensel (*K.*). — Remarque sur le travail de M. Baker : *Sur la théorie des intégrales de différentielle algébrique* (*Math. Ann.*, t. XLV). (598-599).

Réponse à deux objections de M. Baker relatives à un Mémoire de l'auteur (*Journal de Crelle*, t. 109).

Tome XLVI, 1895.

Weber (*E. v.*). — Les solutions singulières des équations aux dérivées partielles à trois variables. (1-30).

On sait que l'enveloppe des surfaces à deux paramètres qui sont des intégrales complètes d'une équation du premier ordre est une intégrale singulière de cette équation. Comment peut-on déduire d'une intégrale complète d'une équation d'ordre n, à trois variables, la ou les solutions singulières? Que devient la théorie des intégrales complètes pour une équation d'ordre supérieur?

L'auteur étudie ces questions en faisant usage de la notion d'*élément de surface* d'ordre supérieur (extension naturelle de celle d'*élément de contact* de Lie); il montre que la théorie des *éléments singuliers* dans le cas ($n > 1$) est analogue à celle de ces éléments pour le premier ordre, mais qu'il n'est plus possible alors de grouper ces éléments en surfaces. Ceci même subsiste pour les équations obtenues par élimination des constantes en partant d'une intégrale complète donnée à l'avance.

Baur (*L.*). — Construction d'un système complet de différentielles de première espèce dans un corps cubique de fonctions d'une variable. (31-61).

Dans un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLIII) l'auteur a montré que l'équation *fondamentale* d'un corps cubique Ω de fonctions algébriques d'une variable peut s'écrire :

$$F(y, x) = y^3 - f_2 y - f = 0,$$

où les polynomes qui pourraient figurer comme facteurs dans $f_2^{\frac{1}{2}}$ et $f_3^{\frac{1}{3}}$ sont sans diviseur commun. Il a également donné le moyen de construire une *base* du système des fonctions entières de Ω et en a déduit le nombre des points de ramification et le genre de la surface de Riemann correspondante. Il s'occupe ici des propriétés des idéaux du corps Ω et de la construction des différentielles de première espèce indépendantes. Des applications sont indiquées.

L'auteur observe que ces recherches sont très générales puisqu'elles s'appliquent à des courbes algébriques de tous les degrés, en particulier à toutes les courbes du quatrième ordre, c'est-à-dire à toutes les courbes de genre 3.

Schilling (*F.*). — La théorie géométrique de la fonction s de Schwarz pour des exposants complexes (première Partie). (62-76).

Ce travail se rattache à celui qu'a déjà publié l'auteur (*Math. Ann.*, t. XLIV) sur le même sujet. Il s'agit de construire le *domaine fondamental* de la fonction s dans le cas d'exposants complexes; ce domaine peut être un quadrilatère formé d'arcs de cercle, comme l'auteur l'a annoncé.

Klein (*F.*). — Leçons autographiées, t. II. (77-90).

Sur les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre. Exposé par M. Klein de l'esprit et des points essentiels de ces leçons.

Hilbert (*D.*). — Sur la ligne droite regardée comme la ligne la plus courte entre deux points (Extrait d'une lettre à M. F. Klein). (91-96).

L'auteur indique trois groupes d'axiomes lui permettant d'établir une correspondance univoque et réciproque entre les points et les plans d'un certain *espace général* et les éléments analogues d'un volume limité de l'espace euclidien ordinaire, qui n'est *concave* nulle part, c'est-à-dire tel que, si deux points A et B y sont contenus, il en est de même de tous les points du segment rectiligne AB. Généralisant alors la notion de *distance,* il montre que pour son espace général (ou l'espace euclidien limité correspondant) la somme de deux côtés d'un triangle est supérieure ou égale au troisième côté. La ligne droite AB n'est pas toujours le seul chemin de même longueur entre les deux points A et B.

Voss (*A.*). — Sur les surfaces isométriques. (97-132).

L'auteur appelle ainsi deux surfaces qui possèdent le même élément linéaire. Il existe toujours, sur deux surfaces de cette nature, au moins un système réel de coordonnées pour lequel, non seulement les coefficients de l'élément linéaire sont égaux, mais les coefficients de la forme quadratique

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ$$

[ou X, Y, Z sont les cosinus directeurs de la normale au point (x, y, z)] sont égaux ou égaux *et de signes contraires.* En d'autres termes les éléments nommés par M. Darboux $\frac{D}{H}$, $\frac{D'}{H}$, $\frac{D''}{H}$ ont pour les deux surfaces même valeur absolue (*Cf.* Darboux, Liv. VIII, Chap. VI).

Les courbes qui déterminent ce système sont celles pour lesquelles le carré de la courbure normale est le même quand on passe d'une surface à l'autre. M. Voss les nomme *caractéristiques.* Si (u, v) désigne un tel système de courbes, les trois coordonnées x, y, z de chacune des deux surfaces vérifient les trois équations déduites de

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \varphi\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

par permutation circulaire de x, y, z. Les asymptotiques constituent un système *singulier* de caractéristiques. Ceci conduit M. Voss à formuler d'une façon élégante le problème de la recherche de toutes les surfaces isométriques à une surface donnée.

Certains systèmes de caractéristiques sont indiqués pour des surfaces particulières : surfaces réglées; surfaces de Bonnet, qui se déforment avec conservation des rayons de courbure principaux; surfaces d'aire minima; surfaces pour lesquelles $D = D''$.

Un dernier paragraphe s'occupe des *petites* déformations d'une surface : si l'on considère deux surfaces applicables à courbure positive, on a pour le sys-

tème réel de caractéristiques $D = D_1$, $D' = -D'_1$, $D'' = D''_1$. Quand l'une des surfaces tend vers l'autre le système des caractéristiques a pour limite un système de courbes conjuguées.

Pour une surface à courbure négative il y a deux sortes de petites déformations, suivant que la limite du système des caractéristiques est formée des asymptotiques ou des courbes d'un système conjugué à invariants égaux. Relations entre ces dernières courbes et les caractéristiques.

Voss (*A.*). — Sur la représentation conforme de deux surfaces l'une sur l'autre. (133-143).

Étude précise, *au voisinage d'un point*, de la correspondance entre deux surfaces dont les éléments linéaires sont proportionnels et de la manière dont les propriétés relatives aux deux surfaces se modifient quand celles-ci deviennent applicables l'une sur l'autre.

Schröder (*E.*). — Note sur l'algèbre des relatifs binaires. (144-158).

L'auteur donne, à l'occasion de l'apparition du troisième Volume de son *Algèbre de la logique*, quelques explications sur les raisons qui l'ont amené à constituer ce Volume ainsi et sur le sujet même de l'Ouvrage.

Un domaine est constitué d'éléments A, B, C, ... qui s'excluent mutuellement et sont différents du néant (o); on le représente comme une *somme identique* et l'on écrit

$$I^1 = A + B + C + \ldots = \sum_i i.$$

Deux éléments quelconques i, j constituent, eu égard à une certaine relation de i à j, un *couple* (ou *binaire relatif individuel*) $i:j$; l'ensemble de tous ces couples forme le domaine

$$I^2 = \sum_{i,j} i:j.$$

Un système quelconque de ces couples $i:j$ (somme identique) est un *relatif binaire*.

L'auteur indique ensuite quelles sortes de relations entre les éléments il entend développer et adopte pour les représenter un système de notations commodes.

Tout cela étant fixé, la théorie des relatifs binaires s'en déduit par les règles habituelles de la logique générale.

Winston (Mlle *M.*). — Remarque sur la théorie de la fonction hypergéométrique. (159-160).

Modification à la définition initiale des fonctions associées, donnée par Riemann, de façon que deux fonctions associées aient toujours même groupe de monodromie.

Picard (*E.*). — Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. (161-166).

Dans un Mémoire classique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1887) l'auteur a montré comment pouvait s'étendre aux équations différentielles linéaires la théorie célèbre de Galois relative aux équations algébriques. Il reprend ici la définition du *groupe de transformations* d'une équation différentielle linéaire et la démonstration de la *réciproque* du théorème fondamental de cette théorie (Cf. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, octobre 1894).

Runge (*C.*). — Sur la résolution numérique des équations différentielles. (167-178).

Les méthodes qui servent au calcul approché des intégrales définies se laissent étendre au calcul des intégrales d'une équation différentielle quelconque. M. Runge indique ici pour une équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

ou un système simultané

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

l'extension de la méthode de Simpson. Il applique en particulier sa théorie au système simultané

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad 2z = a^2\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\cos\varphi\right)$$

qui définit la méridienne de la surface d'une goutte ou d'une bulle gazeuse.

Enriques (*F.*). — Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques à intersections variables hyperelliptiques. (179-199).

Un certain nombre de travaux (MM. Nœther, Bertini, Guccia, Iung, etc.) ont pour objet la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques des genres 0, 1, 2 et leur réduction à des types (d'ordre minimum) irréductibles au moyen des transformations birationnelles du plan. Les résultats obtenus peuvent se traduire en théorèmes projectifs relatifs aux surfaces rationnelles dont les sections planes sont des courbes de genre 0, 1, 2; ils se rattachent ainsi aux recherches de MM. Picard et Del Pezzo.

L'auteur s'est proposé d'étudier les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes hyperelliptiques et comme la théorie des transformations birationnelles de l'espace est encore peu avancée, il a dû faire tout d'abord une étude projective des variétés à trois dimensions dont les sections (par un E_{n-2} dans l'espace E_n) sont des courbes hyperellip-

tiques. Les systèmes de surfaces (à intersections hyperelliptiques) pour lesquels la condition de passer par un point entraîne celle de passer par un certain nombre de points liés au premier sont exclus de ces recherches, bornées aux systèmes *simples*.

I. Surfaces à sections hyperelliptiques. Rappel de résultats connus sur les surfaces à sections rationnelles ou elliptiques. Toutes les surfaces algébriques dont les sections (par des plans ou des hyperplans) sont des courbes hyperelliptiques de genre p ($p \geq 1$) sont ou des surfaces réglées de genre p, ou des surfaces rationnelles qui, pour $p > 1$, contiennent un faisceau linéaire de coniques. Théorème plus général de M. Castelnuovo.

II, III. Systèmes linéaires de surfaces à intersections variables rationnelles ou elliptiques. Tableau complet de ces systèmes au nombre de douze.

IV. Systèmes linéaires de surfaces à intersections hyperelliptiques.

Toute variété à 3 dimensions dont les sections sont des courbes hyperelliptiques de genre p ($p \geq 1$) ou bien contient un faisceau de plans de genre p et est irrationnelle ou elle est rationnelle et contient un faisceau de quadriques.

Chaque système linéaire *simple* de surfaces dont les intersections variables sont hyperelliptiques (de genre $p \geq 1$) peut se transformer birationnellement en un système de surfaces d'ordre n avec une base rectiligne d'ordre ($n - 2$), une base curviligne coupant tous les plans passant par cette droite en deux points situés en dehors de la droite et (peut-être) d'autres éléments-bases.

Ritter (*E.*). — La continuité des fonctions automorphes par déformation continue du domaine fondamental (deuxième Partie). (200-248).

Suite et fin d'un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLV), consacrée à l'étude de la variation des fonctions automorphes attachée à un domaine fondamental *quelconque* pour un changement infiniment petit du domaine.

Réthy (*M.*). — Formes de veines pour des liquides incompressibles et sans viscosité. (250-272).

Exemples de veines sans tourbillons, pour des liquides incompressibles dépourvus de viscosité : ces exemples se rattachent aux recherches de Kirchhoff (*Math., Physique, Mécanique*, 1876) dont l'auteur conserve les notations.

Hurwitz (*A.*). — Sur les conditions sous lesquelles une équation algébrique ne possède que des racines à partie réelle négative. (273-284).

Si l'équation s'écrit :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où l'on peut supposer a_0 positif, et si l'on forme les déterminants

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

où les indices dans chaque ligne vont en croissant de deux unités et dans chaque colonne en décroissant d'une unité, les conditions nécessaires et suffisantes indiquées par M. Hurwitz sont que tous les déterminants

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

soient positifs.

On observe que

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

La méthode d'Hermite qui a conduit l'auteur à ce résultat est exposée sous une forme nouvelle qui en permet diverses généralisations.

Kohn (*G.*). — Sur l'extension d'une notion fondamentale de la Géométrie de position. (286-309).

L'auteur s'est proposé d'étendre la notion du rapport anharmonique de 4 points en partant de la modification de cette notion due à Staudt, c'est-à-dire d'une *portée* (Wurf) de 4 éléments. Deux systèmes de n éléments appartenant à deux *porteurs* A et B sont dits former la même *portée* lorsqu'ils se correspondent dans une transformation projective de A en B. La *portée* de 5 points sera définie par la conique qui les contient; une *portée* de 6 points de l'espace par la cubique gauche qui les contient, etc. L'auteur montre comment ces définitions lui permettent d'étendre un certain nombre de théorèmes du plan à des espaces et de mettre en lumière certaines propriétés des *collinéations*.

Netto (*E.*). — Sur un théorème de Lüroth-Gordan. (310-318).

Si deux fonctions rationnelles $f_1(x, y, z, \dots)$, $f_2(x, y, z, \dots)$ vérifient une relation algébrique $G(f_1, f_2) = 0$ *dont les coefficients sont indépendants de* x, y, z, ..., on peut trouver une fonction λ, rationnelle en f_1 et f_2, à l'aide de laquelle f_1 et f_2 s'expriment rationnellement. M. Netto donne une démonstration purement algébrique de ce théorème dû à M. Gordan (*Math. Ann.*, t. XXIX).

Prix de la Société Prince Jablonowski pour 1898. (319-320).

Hölder (*O.*). — Formation de groupes composés. (321-422).

La *structure* d'un groupe composé est déterminée par une suite normale de composition

$$G, \quad H, \quad K, \quad L, \quad \dots, \quad t.$$

dans laquelle chaque groupe est un sous-groupe invariant maximum du précédent. On peut écrire symboliquement :

$$G = G.H.H.K\ldots,$$

les groupes G/H, H/K, ... *facteurs* étant *simples*.

Ajoutons que l'ordre seul d'un groupe simple suffit souvent à le déterminer entièrement.

M. Hölder s'est proposé de reconstruire G en partant des divers *groupes facteurs* simples, ou quelquefois seulement de leur ordre. Le problème fondamental à résoudre est la construction d'un groupe Δ qui contient un groupe donné Γ comme sous-groupe invariant maximum, de façon que Δ/Γ soit identique à un groupe simple donné (ou même à un groupe donné non simple). M. Hölder le résout dans un certain nombre de cas, en choisissant pour Δ des groupes différents : groupe alterné, groupe de l'équation modulaire, groupe cyclique, groupe non cyclique d'ordre p^2, groupe métacyclique, etc.

La détermination d'un groupe au moyen de ses *facteurs de composition* (Jordan), c'est-à-dire des ordres des groupes simples G/H, H/K, ..., a déjà été obtenue pour le cas où ces facteurs sont deux, trois nombres premiers ou quatre nombres premiers égaux. M. Hölder traite ici les cas où la suite de composition est l'une des suivantes :

$$60, p;\quad 168, p;\quad 60, p, p;\quad 60, p, q;$$
$$168, p, p;\quad 168, p, q;\quad 60, 60, 2,$$

p, q désignant deux nombres premiers.

Reye (*Th.*). — Sur les propriétés focales des figures collinéaires. (423-441).

M. Henry-J.-S. Smith a publié il y a déjà longtemps (*Proceedings of the London M. S.*, Vol. II (1867)) un Mémoire important sur les propriétés focales des figures homographiques; l'auteur, qui a eu récemment l'occasion de lire ce travail, en reprend les points essentiels pour les établir à nouveau, les compléter et les mettre en rapport avec d'anciens résultats qui lui appartiennent.

Krazer (*A.*). — La transformation quadratique des fonctions thêta. (442-461).

Dans la deuxième Partie des *Nouveaux fondements d'une théorie des fonctions thêta générales* (Leipzig, 1892), l'auteur s'occupe du problème de la transformation. Les procédés adoptés dans ce travail pour les transformations non linéaires sont susceptibles d'être transformés et étendus.

L'auteur expose ici, dans le cas des transformations quadratiques, une nouvelle méthode qui présente sur celles déjà connues certains avantages : elle permet de ramener la théorie des transformations quadratiques des fonctions thêta à celle des transformations linéaires d'autres fonctions thêta à un plus grand nombre de variables.

Formule pour la transformation quadratique la plus générale des fonctions

thèta à un nombre quelconque de variables. Formule analogue dans le cas d'une seule variable. Exemples.

Nœther (*M.*). — Arthur Cayley. (462-480).

Notice nécrologique.

Cantor (*G.*). — Contribution à l'étude des ensembles transfinis. (481-512).

La notion de *puissance* ou le *nombre cardinal*. Le « plus grand » et le « plus petit » dans les puissances. Addition et multiplication des puissances. Exponentielle de puissances. Nombres cardinaux finis. Le plus petit nombre cardinal transfini *aleph-zéro*. Les *types d'ordre* des suites simplement ordonnées. Le type d'ordre de l'ensemble des nombres rationnels R qui sont compris entre 0 et 1 rangés dans leur ordre naturel. Les suites fondamentales contenues dans un ensemble ordonné transfini. Le type d'ordre θ du continu linéaire X.

L'auteur continue, en les habillant d'un langage arithmétique, ses remarquables recherches sur les propriétés des ensembles quand on fait abstraction de la nature de leurs éléments et de leur ordre ou simplement de leur nature en tenant compte de l'ordre dans lequel on les considère.

Deux ensembles M et N entre les éléments desquels on peut établir une correspondance univoque et réciproque sont dits *équivalents*. Ils ont, d'après M. Cantor, la même *puissance* ou le même *nombre cardinal*, ce dernier étant la seule idée qui subsiste en notre esprit par la considération de M quand on fait abstraction de la nature et de l'ordre de ses éléments.

Si une partie N_1 de N est équivalente à M, et si aucune partie de M n'est équivalente à N, on dira que la puissance de M est inférieure à celle de N.

L'hypothèse qu'aucune partie de N ne soit équivalente à M et aucune partie de M ne soit équivalente à N est écartée. M. Cantor renvoie à un examen ultérieur la démonstration de ce fait que, si a et b sont deux puissances, on a

$$a = b \quad \text{ou bien} \quad a < b \quad \text{ou bien} \quad a > b.$$

La réunion de deux ensembles sans élément commun définit leur somme; on a pour les puissances

$$a + b = b + a,$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Soient M, N deux ensembles, tout élément m de M étant associé à tous les éléments n de N, on obtient un ensemble (M, N) dont la puissance est par définition le produit des puissances $a.b$ de M et N.

On a

$$a.b = b.a, \qquad a.(b.c) = (a.b)c, \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

Une *représentation* de N sur M est obtenue par une loi quelconque qui fait correspondre à tout n un m déterminé, le même m pouvant correspondre à plusieurs n (même à une infinité) : elle est définie par une certaine fonction uniforme $f(n)$.

Deux représentations sont identiques quand on a, quel que soit n,

$$f_1(n) = f_2(n),$$

et seulement dans ce cas.

L'ensemble de toutes les représentations distinctes de N sur M forme un ensemble (N M) dont le nombre cardinal est l'exponentielle a^b (par définition).

On a

$$a^b . a^c = a^{b+c},$$
$$a^c . b^c = (a.b)^c,$$
$$(a^b)^c = a^{b.c},$$

ce qui justifie la dénomination employée.

L'ensemble de tous les nombres cardinaux finis (nombres entiers 1, 2, ..., ν, ...) a la puissance *aleph-zéro*, $\aleph_0$; c'est le premier nombre cardinal transfini. Tout ensemble transfini a une partie de puissance $\aleph_0$.

On a

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0,$$
$$\aleph_0 . \nu = \nu . \aleph_0 = \aleph_0,$$
$$\aleph_0^\nu = \aleph_0.$$

Tout ensemble transfini est équivalent à une de ses parties. Ceci est caractéristique, c'est-à-dire ne subsiste pas pour les ensembles finis.

Un ensemble M est *simplement ordonné* quand on peut dire de deux éléments m_1, m_2 que l'un précède l'autre. Il faut que, si a précède b et si b précède c, a précède c; on écrit ceci :

$$a < b, \qquad b < c, \qquad a < c.$$

A chaque ensemble M simplement ordonné correspond un *type d'ordre* bien déterminé : c'est l'idée abstraite qui subsiste d'un tel ensemble quand on y fait abstraction de la nature de ses éléments, mais non de leur ordre de succession.

Deux ensembles simplement ordonnés sont *semblables* quand il existe entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque qui conserve l'ordre des éléments. Les ensembles ont alors le même *type d'ordre* et seulement dans ce cas.

Les types d'ordre finis sont sans intérêt : à un nombre n correspond un seul type. A un nombre transfini a correspond une infinité de types qui constituent la *classe* correspondante. Cette classe a une certaine *puissance* a' différente de a.

Addition et multiplication des types d'ordre : deux ensembles ordonnés M, N donnent par leur réunion un ensemble ordonné (M, N), où les éléments de M précèdent ceux de N; si α et β sont les types d'ordre de M et N on a pour type d'ordre de (M, N), $\alpha + \beta$. On n'a plus ici, en général,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Si dans un ensemble N de type d'ordre β on substitue à chaque élément un ensemble ordonné M de type α, on obtient un ensemble ordonné $\{M_n\}$ dont le

type d'ordre sera représenté par $\alpha.\beta$. On n'a pas

$$\alpha.\beta = \beta.\alpha,$$

mais on a

$$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma,$$
$$\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma.$$

M. Cantor donne ensuite les *caractères* du type d'ordre η de l'ensemble R de tous les nombres rationnels compris entre 0 et 1 (à l'exclusion des limites) et rangés par ordre de grandeur croissante : suite simplement ordonnée de puissance aleph-zéro, qui n'a aucun élément précédant tous les autres et aucun élément suivant tous les autres et telle qu'entre deux quelconques de ses éléments il y en ait d'autres (ensemble *dense*). Exemples d'ensembles du type η.

Les suites d'éléments appartenant à un ensemble ordonné M sont aussi ordonnées; si elles ont le type d'ordre ω de la suite $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ on les nommera *suites fondamentales croissantes* (décroissantes si elles ont le type inverse, c'est-à-dire celui de $\ldots, \nu, \ldots, 2, 1$). M. Cantor définit les suites *associées* et les éléments limites ou *principaux*, comme dans la théorie des incommensurables, en remplaçant les signes $<$ et $>$ par qui *précède* ou qui *suit*.

Il parvient ainsi à la notion d'ensemble *dense en soi* : tout élément d'un tel ensemble est aussi une limite.

Si à chaque suite fondamentale correspond une limite qui fait partie de l'ensemble, ce dernier est *fermé*. S'il est *fermé* et *dense en soi*, il est *parfait*.

Le continu linéaire X, comprenant tous les nombres réels ≥ 0 et ≤ 1, a un type d'ordre caractérisé de la façon suivante :

Ensemble parfait M, qui contient un ensemble S de puissance aleph-zéro, de telle sorte qu'entre deux éléments de M il y ait toujours des éléments de S.

Stäckel (*P.*). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. (513-520).

Soit P un ensemble *dénombrable* quelconque de valeurs de la variable complexe x, Q un ensemble quelconque *dense en soi* du plan complexe; il existe toujours une infinité de fonctions analytiques uniformes qui, pour toutes les valeurs de P, prennent des valeurs de Q.

Applications : P et Q sont tous deux l'ensemble des nombres algébriques, ou rationnels, ou l'un et l'autre.

Picard (*E.*). — Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre (extrait d'une lettre à M. Klein). (521-528).

Considérant d'abord le cas d'une équation du premier ordre

$$\frac{dx}{ax + by + \ldots} = \frac{dy}{a'x + b'y + \ldots},$$

lorsque les racines de l'équation $(a - \lambda)(b' - \lambda) - ab' = 0$ sont réelles et de signes contraires (*col*), M. Picard montre que toute courbe intégrale passant à l'origine, ou s'en rapprochant indéfiniment, *y arrive avec une tangente de-*

terminée. On établit ainsi rigoureusement qu'il n'y a que deux courbes intégrales passant par un col.

Il aborde ensuite l'étude des courbes intégrales de l'équation du second degré

$$(ax+by+\ldots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(a_1x+b_1y+\ldots)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(a_2x+b_2y+\ldots)=0,$$

qui passent par l'origine ou s'en rapprochent indéfiniment et arrive à la même conclusion : ces courbes ont à l'origine une tangente déterminée.

Schilling (*Fr.*). — La théorie géométrique de la fonction s de Schwarz pour des exposants complexes (deuxième Mémoire). (529-538).

Suite et fin d'un Mémoire antérieur (*Math. Ann.*, t. XLVI) : Construction du domaine fondamental de la fonction s lorsqu'un ou deux des exposants sont purement imaginaires. Caractères auxquels on reconnaît l'existence de sommets paraboliques. Comment reconnaît-on que deux domaines fondamentaux correspondent à deux fonctions *associées* (Verwandt) *arithmétiquement* ou *fonctionnellement*.

Hoyer (*P.*). — Généralisation de deux théorèmes de la théorie des groupes de substitutions. (539-544).

L'auteur donne certaines conditions générales sous lesquelles une suite de substitutions circulaires engendrent le groupe alterné.

Nœther (*M.*). — Note sur les systèmes de septuples de coniques qui passent par les points de contact des tangentes doubles d'une quartique plane. (545-556).

O. Hesse a montré qu'il existe 315 coniques qui coupent une quartique plane en ses points de contact avec quatre de ses tangentes doubles et qu'elles se répartissent en groupes de sept de façon à passer par les points de contact de toutes les tangentes. Hesse, Salmon et M. Nœther ont déja étudié certains de ces systèmes. A l'occasion de la publication des œuvres de Hesse, M. Nœther forme tous les septuples possibles et les caractérise par leurs propriétés invariantes vis-à-vis des substitutions du groupe des tangentes doubles. Il signale une seconde espèce de septuples qui conduisent à une équation de Galois d'ordre 7 et qui sont en nombre 120.288.

Beke (*E.*). — Sur la résolvante différentielle la plus générale d'une équation différentielle linéaire et homogène. (557-560).

Il existe toujours pour une équation linéaire

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$$

une fonction *sensible* $v=u_1x_1+\ldots+u_nx_n$ qui change de valeur par toute

substitution linéaire. M. Beke le démontre en développant au voisinage d'un point ordinaire $t = 0$ les solutions x_i et les coefficients u_k suivant les puissances de la variable indépendante t.

Taber (*H.*). — Sur les transformations linéaires automorphes d'une forme bilinéaire alternée. (561-583).

Cayley a donné (*Philosophical Transactions*, 1858) l'expression de la transformation linéaire générale qui n'altère pas une forme bilinéaire alternée de deux groupes de $2n$ variables cogrédientes, à déterminant nul, en fonction rationnelle des coefficients de la forme et du nombre minimum de paramètres. Cette expression s'écrit symboliquement avec les notations de la théorie des matrices

$$(\Omega - Y)^{-1}(\Omega + Y),$$

où Ω désigne la matrice formée avec les coefficients de la forme et Y une substitution linéaire *symétrique* arbitraire, choisie seulement de façon que le déterminant de $\Omega - Y$ soit différent de zéro.

Toutes les transformations linéaires d'une forme bilinéaire ou elle-même sont données par l'expression de Cayley, pour des valeurs finies des coefficients (c'est-à-dire pour Y fini), *sauf* celles dont l'équation caractéristique admet (-1) comme racine. M. Frobenius a montré que ces dernières s'obtiennent comme cas limites quand certains paramètres augmentent indéfiniment.

L'auteur classe les substitutions linéaires du groupe de la forme en deux espèces suivant qu'elles sont ou non le carré d'une substitution du groupe. Toute substitution de Cayley est de première espèce et peut être engendrée par des substitutions (ou transformations) infinitésimales du groupe. Les autres ne peuvent pas être engendrées ainsi.

Chaque transformation linéaire réelle qui n'altère pas une forme bilinéaire alternée à coefficients réels est le produit de deux transformations de Cayley, où les valeurs des paramètres sont finies.

Pochhammer (*L.*). — Sur les équations différentielles des séries F du troisième ordre. (584-605).

Étude de l'équation

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + (\rho + \sigma + 1) x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\rho\sigma - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0$$

qui admet comme solutions

$$F(\alpha; \rho, \sigma; x) = 1 + \frac{\alpha}{1.\rho\sigma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2\rho(\rho+1)\sigma(\sigma+1)} x^2 + \ldots,$$

$$x^{1-\rho} F(\alpha - \rho + 1; 2 - \rho, \sigma - \rho + 1; x)$$

et l'expression analogue obtenue en permutant ρ et σ. Détermination des solutions sous forme d'intégrales définies *doubles*.

Gordan (*P.*). — Sur une équation différentielle linéaire du second

ordre, sans point de ramification, attachée aux courbes planes du quatrième degré (extrait d'une lettre à M. Klein). (606-608).

L'équation donnée par M. Klein (*Math. Ann.*, t. XLVI)

$$(\pi, f_3^2)^2 + \left(\frac{-H}{f_3} + \Omega\right)\pi = 0$$

peut s'écrire

$$a_x^2 b_x^2 (ab\pi)^2 + \Omega\pi = 0.$$

Tome XLVII; 1896.

Weber (*H.*). — Quatre lettres d'Arthur Cayley sur les fonctions modulaires elliptiques. (1-19).

L'auteur communique quatre lettres à lui adressées par A. Cayley et relatives à des développements en série dans la théorie des fonctions modulaires elliptiques; il y ajoute ses remarques personnelles.

Burali-Forti (*C.*). — Sur les propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable. (20-32).

L'auteur emploie les symboles de la logique mathématique en renvoyant le lecteur à l'Introduction au formulaire de Mathématiques de M. Peano.

Turksma (*B.*). — Justification de la méthode des multiplicateurs de Lagrange dans le calcul des variations par comparaison avec une nouvelle méthode qui conduit aux mêmes solutions. (33-46).

Soit à déterminer les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ satisfaisant aux conditions

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n; y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

de façon que la variation première de l'intégrale

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n; y'_1, \ldots, y'_n)\, dx,$$

où les limites sont fixes, soit nulle. Lagrange a montré qu'on obtenait des solutions du problème en égalant à zéro la variation première de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda_1 \Phi_1 + \ldots + \lambda_m \Phi_m)\, dx,$$

quelles que soient les variations $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$, les λ étant des fonctions à déterminer par là même.

2me Partie -

On n'est pas certain d'obtenir ainsi toutes les solutions parce que la variabilité des y n'est pas arbitraire; M. Mayer a cependant montré qu'on les obtenait toutes (*Math. Ann.*, t. XXVI).

L'auteur le montre également en exprimant les δy_i par des fonctions auxiliaires de façon à satisfaire aux relations $\Phi_i = 0$; puis, annulant pour ces expressions la variation première de V, il trouve par cette méthode, *qui pourrait restreindre par trop la variabilité des y*, les mêmes solutions que donne la méthode de Lagrange.

Hoyer (*P.*). — Sur les surfaces de Riemann avec des points de ramification à variabilité restreinte. (47-71).

Soit $(a_1, a_2, \ldots)$ le système des coefficients d'une équation algébrique entière

$$f(s, z) = 0,$$

soit de même $(z_1, z_2, \ldots)$ le système des points de ramification de la fonction s; l'auteur considère le domaine algébrique $E(z_1, z_2, \ldots; a_1, a_2, \ldots)$ et sa continuation analytique obtenue en faisant varier les a_i pourvu que les z_i demeurent par groupes à l'intérieur de certains domaines d'un seul tenant entièrement séparés. Le continuum (z) obtenu ainsi définit un ensemble de surfaces de Riemann qui peuvent être déformées de manière continue de façon à coïncider avec l'une d'entre elles, sans que les z_i sortent du continuum et sans que deux d'entre eux viennent à coïncider, sauf peut-être aux positions extrêmes.

L'auteur étudie ensuite les éléments $E(z_1, z_2, \ldots; a_1, a_2, \ldots)$ pour lesquels les a_i sont des fonctions à plusieurs valeurs des z_i, et il détermine la représentation analytique d'un tel domaine algébrique. Des applications sont faites à l'étude de la déformation des surfaces de Riemann.

Juel (*C.*). — Sur la détermination paramétrique de points sur les courbes du second et du troisième ordre. Introduction géométrique à la théorie des fonctions logarithmiques et des fonctions elliptiques. (72-104).

L'auteur se propose d'obtenir, *par des considérations géométriques simples*, les propriétés relatives aux points (ou groupe de points) sur une cubique plane, pour lesquelles il n'est pas nécessaire de faire intervenir les fonctions elliptiques.

Il montre en particulier qu'on peut établir entre les points (complexes) de cette courbe et ceux d'un parallélogramme une correspondance uniforme et continue. Suivant la méthode indiquée par M. Klein, il fait correspondre à une courbe algébrique (points complexes) une surface de Riemann réelle dont il détermine paramétriquement les différents points : dans le cas du troisième ordre il s'est borné à supposer les invariants réels.

Busche (*E.*). — Sur la solution donnée par Schubert d'un problème de Bachet. (105-112).

Il s'agit de la question suivante, inspirée par un problème de Bachet de Méziriac : on range n lettres, numérotées de 1 à n, sur une circonférence; à partir

de la première on les supprime de d en d, en ayant soin de tourner toujours dans le même sens et de ne pas compter les lettres déjà supprimées; quel est le numéro de la lettre qui a été supprimée la $k^{\text{ième}}$?

L'auteur en donne la solution; ses résultats concordent avec les résultats énoncés sans démonstration par M. Schubert (*Douze jeux de patience*, Berlin, 1895).

Hoyer (*P.*). — Décomposition des fractions rationnelles dans un domaine algébrique à deux variables. (113-120).

Weierstrass a montré que dans un domaine algébrique à 2 variables (x, y), on pouvait exprimer toute fonction rationnelle linéairement (les coefficients étant constants) au moyen de certaines fonctions rationnelles qui n'ont qu'un seul pôle variable, les autres étant en certains points déterminés du domaine, ainsi qu'avec celles qui n'ont aucun pôle en dehors de ces derniers. L'auteur indique une détermination purement algébrique de ces fonctions auxiliaires.

Pringsheim (*A.*). — Sur des simplifications dans la théorie élémentaire des fonctions analytiques. (121-154).

La théorie des fonctions analytiques de Weierstrass ne peut s'édifier sans faire appel au théorème de Laurent ou à une proposition équivalente qu'on démontre par l'emploi d'intégrales le long d'un contour (Cauchy); M. Weierstrass et d'autres géomètres, par des méthodes compliquées, ont pu éviter l'emploi des intégrales, mais une démonstration simple et élémentaire du théorème de Laurent fait défaut. M. Pringsheim en propose une basée sur la considération des *valeurs moyennes* dont l'idée remonte à Cauchy.

Une telle valeur moyenne est une limite

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_{n,\nu})\right],$$

où les $x_{n,\nu}$ sont définis pour toutes les valeurs entières de n et de ν, de façon que les produits $n\,|x_{n,\nu+1}-x_{n,\nu}|$ aient, pour chaque valeur de ν, une même limite constante *lorsque n augmente indéfiniment.*

Picard (*E.*). — Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles (Extrait d'une lettre adressée à M. Klein). (155-156).

Modification de l'équation choisie (*Math. Ann.*, t. XLVI) pour définir le groupe de transformations d'une équation linéaire. L'auteur indique ensuite une extension possible aux équations non linéaires.

Ritter (*E.*). — Sur les faisceaux de formes de Riemann dans un domaine algébrique quelconque. (157-221).

L'auteur se propose l'étude directe d'un système linéaire de fonctions, sur

une surface de Riemann donnée, qui subissent, quand la variable tourne autour de points singuliers, fixés sur cette surface, des substitutions linéaires; c'est-à-dire d'un système linéaire de fonctions qui possède à ce point de vue les mêmes propriétés que les solutions fondamentales d'une équation différentielle linéaire, à coefficients rationnels sur la surface de Riemann considérée.

Il se donne *a priori* un domaine algébrique de genre p et sur ce domaine s points singuliers $e_1, \ldots, e_s$, puis $2p$ substitutions linéaires et homogènes à n variables auxquelles correspondent $2p$ contours fermés indépendants et s substitutions analogues correspondant aux chemins entourant les points singuliers. Enfin, pour achever de déterminer la façon dont les fonctions du système se comportent en un point singulier e, il donne les exposants du faisceau en ce point, c'est-à-dire les racines de l'équation déterminante.

La démonstration de l'existence des fonctions est supposée acquise.

L'auteur se propose l'étude de tous les faisceaux d'une même *classe* de Riemann, c'est-à-dire pour lesquels, à un facteur constant près qui multiplie toutes les fonctions, les substitutions sont les mêmes.

Ce travail doit rendre le même service pour l'étude des fonctions zétafuchsiennes de M. Poincaré que le travail antérieur de l'auteur (*Math. Ann.*, t. XLIV) pour l'étude des fonctions fuchsiennes ou automorphes; on n'y considère que des variables homogènes.

Zeuthen (*H.-G.*). — La construction géométrique comme « preuve d'existence » dans la Géométrie antique. (222-228).

Weber (*E. v.*). — Les caractéristiques des équations aux dérivées partielles à trois variables. (229-262).

Étude géométrique de l'extension de la théorie des caractéristiques et des méthodes d'intégration des équations du premier ordre aux équations d'ordre supérieur à trois variables x, y, z (z fonction).

Extension de l'idée d'élément de surface; définition des caractéristiques d'ordre n des équations d'ordre n. Caractéristiques d'ordre $(n-1)$: équations d'Ampère-Natani. Extension de la notion de cône élémentaire.

Théorie des expressions différentio-différentielles. Les systèmes de bandeaux (Streifensysteme) immédiatement intégrables. Équations du second ordre en involution. Théorie des intégrales complètes.

Maurer (*L.*). — Sur les valeurs moyennes des fonctions d'une variable réelle. (263-280).

Soit $f(x)$ une fonction définie pour toutes les valeurs réelles de x, M. Maurer appelle *valeur moyenne* de cette fonction l'intégrale définie

$$f_1(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+\xi)\,d\xi,$$

où h désigne une constante positive déterminée. On déduira de la même manière une deuxième valeur moyenne $f_2(x)$, en opérant sur $f_1(x)$ comme sur $f(x)$, puis une troisième, etc.

Les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... présentent dans un intervalle donné des variations dont l'amplitude est de plus en plus faible.

M. Maurer s'est proposé de préciser ce point : la fonction f_1 est toujours continue, f_2 possède une dérivée première continue, f_3 possède une dérivée seconde continue, etc.

Il montre en outre que $f_n(x)$ tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\, e^{-\frac{u^2}{k^2}}\, du,$$

pourvu que le produit $h\sqrt{n}$ tende vers la limite finie $k\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Weierstrass a d'autre part (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1885) étudié l'intégrale $F(x, k)$ lorsque k tend vers zéro. M. Maurer, en reprenant cette question, montre comment on peut conclure que toute fonction $f(x)$ continue peut être regardée comme la limite d'une fonction analytique.

Hermes (*J.*). — Nombre des décompositions d'un nombre entier en somme d'entiers (deuxième Partie). (281-297).

Dans un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XLV) l'auteur a déterminé le nombre des décompositions d'un entier m en k parties entières dont la plus petite est l'entier s. Ce nombre $G(m, k, s)$ est obtenu en regardant comme différentes deux décompositions qui ne diffèrent que par une permutation de leurs parties.

Euler, par contre, a donné le nombre analogue en ne comptant que pour une seule toutes les décompositions obtenues par permutation des parties de l'une d'elles. L'auteur établit ici des relations entre les nombres d'Euler et les siens.

Study (*E.*). — Sur une classe particulière de fonctions d'une variable réelle. (298-316).

Il s'agit des fonctions *à variation bornée* dont l'introduction est due à M. Jordan. M. Study remplace la définition de M. Jordan par une autre, voisine et plus simple, qui lui permet de compléter la théorie de ces fonctions et de reprendre sous une forme nouvelle l'étude de la rectification des courbes (Recherches de M. Jordan (*Cours d'Analyse*) et L. Scheeffer (*Acta Mathematica*, t. V).

Supposons l'intervalle compris entre $x = a$, $x = b$, dans lequel la fonction $y = f(x)$ est définie, partagé en n intervalles contigus

$$\delta_1 = x_1 - x_0, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad \delta_n = x_n - x_{n-1}$$

désignons par M_i et m_i les plus grandes et plus petites valeurs de y dans l'intervalle δ_i, $\Delta_i = M_i - m_i$ est la *variation* de y dans cet intervalle : si pour une série indéfinie de divisions de l'intervalle (a, b) les intervalles δ_i tendent tous vers zéro et si les sommes correspondantes $\Sigma\Delta$ restent inférieures à un nombre fixe, elles ont une *borne* supérieure M pour tout mode de division analogue de l'intervalle (a, b).

La limite, ou les limites d'indétermination de la somme $\Sigma\Delta$ pour un mode

de division quelconque sont comprises entre deux nombres μ et M, satisfaisant à l'inégalité

$$\mu \leq M.$$

Il existe toujours des modes de division, même par fractionnement des δ_i, pour lesquels $\Sigma\Delta_i$ a la limite μ ou la limite M.

Parmi les fonctions précédentes qui sont les fonctions à variation bornée de M. Jordan, l'auteur signale en particulier celles pour lesquelles $M = \mu$: si l'on appelle *saut extérieur* de $f(x)$ la plus petite des différences

$$|f(x) - f(x+0)|, \qquad |f(x) - f(x-0)|$$

lorsque $f(x)$ est *en dehors* de l'intervalle $\Big(f(x-0), f(x+0)\Big)$, les fonctions pour lesquelles $M = \mu$ n'ont pas de sauts extérieurs et réciproquement. L'auteur les nomme à *variation définie*.

Les courbes rectifiables $y = f(x)$ correspondent aux fonctions $f(x)$ à variation définie.

Sommerfeld (*A.*). — Théorie mathématique de la diffraction. (317-374).

La théorie de la diffraction due à Fresnel, exposée analytiquement par Kirchhoff, n'est qu'approchée : son accord avec l'expérience n'est dû qu'à la petitesse de la longueur d'onde de la lumière. Elle est inutilisable pour les ondes hertziennes ou sonores et même quelquefois en Optique. L'auteur s'est proposé de développer la théorie rigoureuse, fondée sur la considération des équations aux dérivées partielles qu'a données la théorie électromagnétique de la lumière et la détermination de solutions satisfaisant à des conditions *aux limites* (théorie analogue à celle du potentiel). Il examine les cas les plus simples et retrouve en particulier des formules données par M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XVI) dont il précise la région de valabilité.

Feder (*J.*). — La configuration $(12_6, 16_3)$ et le groupe associé de 2304 collinéations et corrélations. (375-407).

On sait que les 12 centres de similitude de quatre sphères se répartissent 3 par 3 sur 16 droites et 6 par 6 sur 12 plans; ils déterminent donc (terminologie de M. Reye) une configuration $(12_6, 16_3)$ que l'auteur étudie en détail.

Partage et description des 576 transformations linéaires (collinéations) qui n'altèrent pas une Cf $(12_6, 16_3)$. Décomposition et structure de leur groupe G. Surfaces du second ordre qui admettent des sous groupes de G. La surface desmique du quatrième ordre. Sur les 1152 collinéations et les 1152 corrélations qui transforment en elle-même une configuration harmonique $(24_6, 18_4)$.

Kneser (*A.*). — Nouvelle démonstration de la convergence des séries qui se présentent dans l'intégration des équations différentielles linéaires au voisinage des points singuliers les plus simples. (408-422).

Une part essentielle des résultats établis par Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66) sur les intégrales des équations différentielles ordinaires au voisinage des points singuliers *les plus simples* a été établie à nouveau par M. Frobenius (*Journal de Crelle*, t. 76); M. Kneser se propose de les obtenir ici par une voie élémentaire : Les points singuliers sont *réguliers*.

On commence par satisfaire à l'équation

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x) y = 0,$$

où les $p_i(x)$ sont des séries de puissances à domaine de convergence non nul, par des séries formelles $g_0 x^\rho + g_1 x^{\rho+1} + \ldots$, dont on démontre ensuite la convergence. Examen des cas où l'équation déterminante a des racines multiples ou des racines dont la différence est un nombre entier.

Veronese (*G.*). — Sur quelques observations relatives aux segments infinis et infiniment petits actuels. (423-432).

Réponse aux critiques faites par M. Killing et M. G. Cantor sur les *Fondements de la Géométrie* de l'auteur.

Franel (*J.*). — Sur la formule sommatoire d'Euler. (433-440).

Nouvelle démonstration élémentaire de la formule sommatoire d'Euler ou de Mac-Laurin, que l'auteur déduit de la formule

$$\sum_{r=0}^{r=h} F(r) = \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(h) + \int_0^h F(x)\,dx - \int_0^h f(x) F'(x)\,dx,$$

où l'on a

$$f(x) = E(x) - x + \frac{1}{2},$$

$E(x)$ désignant, comme d'habitude, le plus grand entier contenu dans x.

Beke (*E.*). — Contribution à la théorie des fonctions rationnelles. (441-444).

Pour former une fonction rationnelle des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, invariable par les substitutions d'un groupe G, on forme habituellement une fonction symétrique telle que

$$\sum v,$$

des diverses valeurs que prend l'expression

$$v = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

par les substitutions de G. Il peut arriver que cette fonction symétrique demeure invariable par des substitutions qui n'appartiennent pas à G ; l'auteur

précise le choix de l'entier k de façon que cette circonstance ne se présente pas.

Nekrassof (*P.-A.*). — Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. (445-530).

Ce cas a été examiné par M. Hess (*Math. Ann.*, t. XXXVII); le mouvement du centre de gravité du corps est le même que celui d'un pendule sphérique. L'auteur annonce qu'il a réduit ici l'équation différentielle la plus compliquée du problème à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques uniformes, dans le champ complexe. Les fonctions du temps qui représentent le mouvement sont des branches de fonctions *multiformes*.

Soient A, B, C les moments d'inertie par rapport aux axes principaux passant par le point fixe, pris comme axes de coordonnées; x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité G; le cas de M. Hess est caractérisé par

$$y_0 = 0, \qquad A(B - C)x_0^2 = C(A - B)z_0^2, \qquad A > B > C.$$

Si l'on désigne par p, q, r les composantes de la rotation instantanée suivant les axes Ox, Oy, Oz; par γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la verticale et si l'on suppose

$$Mg = 1,$$

ce qui ne modifie que le choix des unités, on a ici une quatrième intégrale algébrique

$$Ax_0 p + Cz_0 r = 0.$$

L'auteur observe que ce cas fait partie de ceux où les équations en p, q, r, γ, γ', γ'' admettent des intégrales méromorphes dépendant de *cinq* constantes arbitraires; il a échappé par inadvertance à Mme Kowalewski. Le mouvement du solide est déterminé par celui de deux points : 1° le centre de gravité G qui se meut comme un pendule sphérique; 2° le point à l'unité de distance sur la verticale du point O, dont le mouvement par rapport aux axes mobiles dépend d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients uniformes doublement périodiques et complexes.

L'auteur étudie en détail les conditions d'existence de mouvements asymptotiques périodiques, puis termine en calculant les développements en série, procédant suivant les puissances croissantes du temps, des intégrales de l'équation du second ordre rappelée plus haut.

Wiman (*A.*). — Sur un groupe simple de 360 collinéations planes. (531-556).

Ce groupe est isomorphe holoédriquement avec le groupe alterné de six lettres. Il a été découvert par Valentiner dont le Mémoire a paru en danois dans les *Comptes rendus de l'Académie danoise* (1889) avec un résumé en français; l'auteur en fait ici une étude complète, en signalant les analogies qu'il présente avec le groupe G_{168} qui n'altère pas la quartique

$$x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0.$$

La forme la plus simple invariante par G_{168} est

$$F_6 = 10x^3y^3 - 9xz(x^3 + y^3) = 45x^6y^6z^6 - 135x^5y^5z^7 + 27z^{12};$$

un système *complet* de formes est formé de F, du hessien H, du déterminant Φ obtenu en bordant le hessien par ses dérivées H_1, H_2, H_3 et du déterminant fonctionnel Ψ de F, H et Φ qui, si on l'égale à zéro, représente 45 axes de symétrie.

Le groupe G_{168} renferme deux systèmes de *groupes de l'octaèdre* homologues et deux systèmes de *six groupes de l'icosaèdre* homologues, etc.

Fricke (*R.*). — Note sur la discontinuité de certains groupes de transformations linéaires. (557-563).

Une conique C_2 demeure inaltérée par un groupe de transformations linéaires dépendant de trois paramètres. Les sous-groupes discontinus Γ d'un tel groupe, *sans transformations infinitésimales*, ne sont au fond que ceux qui interviennent dans la théorie des fonctions automorphes et qui possèdent un cercle principal : cela résulte de l'identité des transformations subies par les points de C_2 avec les transformations $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ d'une variable complexe.

Si Γ est un de ces sous-groupes, il est proprement discontinu à l'intérieur de C_2 (supposée une ellipse); c'est un résultat connu.

L'auteur montre comment on peut construire *en dehors* de C_2 le domaine de discontinuité du groupe Γ.

Godt (*W.*). — Sur un système remarquable de cercles. (564-572).

n^n cercles K et n points P peuvent être choisis de telle sorte que chaque cercle passe par $(n-1)$ points et qu'en chaque point se coupent $(n-1)$ cercles; $(n-1)$ cercles passant par un point sont arbitraires, tous les autres cercles et points en résultent.

Kempinski (*S.*). — Sur les fonctions fuchsiennes de deux variables. (573-578).

Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 89) et [illegible] a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$\int_{z_0}^{z_1} y_1\,dz = \int_{z_0}^{z_1} y_2\,dz = u,$$

$$\int_{z_0}^{z_1} y_1\,dz = \int_{z_0}^{z_1} y_2\,dz = u$$

(où y_1 et y_2 sont deux solutions fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à singularités polaires déterminées, et z la variable indépendante) définissent pour $z_1 = z_2$ et $z_1 z_2$ des fonctions uniformes de u et u_2. Ce sont ces fonctions uniformes que l'auteur nomme *fuchsiennes*.

M. Lohnstein (*Dissertation inaugurale*, Berlin, 1890) a examiné les consé-

quences qu'entraîne l'existence de points essentiels pour la fonction $z = \varphi\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$; l'auteur reprend cet examen et confirme les résultats obtenus par Fuchs (sauf un cas d'exception).

Markoff (A.). — Nouvelles applications des fractions continues. (579-597).

Étant données les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(y)\,dy = \alpha_0, \quad \ldots, \quad \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy = \alpha_{i-1},$$

trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

sachant que l'on a

$$L > f(y) > 0?$$

Ces valeurs correspondent à une fonction $f(y)$ pour laquelle l'intervalle (a, b) peut être divisé en $(i+1)$ parties dans lesquelles on a alternativement

$$f(y) = 0, \quad f(y) = L,$$

à condition qu'une division analogue en un plus grand nombre de parties soit impossible.

Si l'on a dans la dernière partie $f(y) = L$, il y a maximum pour l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy;$$

sinon il y a minimum.

Soient f_{max} et f_{min} les fonctions correspondantes; elles donnent également sous les mêmes conditions le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b \Phi(y) f(y)\,dy$$

pour toute fonction donnée $\Phi(y)$ dont la dérivée d'ordre i garde un signe constant entre a et b.

L'auteur termine par l'étude des valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

x désignant un nombre compris entre a et b et $f(y)$ étant assujettie aux mêmes conditions que précédemment.

Markoff (A.). — Sur l'équation de Lamé. (Extrait d'une lettre adressée à M. Klein). (599-603).

Il s'agit de la distribution des racines réelles de l'équation d'Hermite

$$F(x, B) = 0,$$

où l'on a

$$F(x, B) = y_1 y_2, \qquad 2\varphi y_i'' + \varphi' y_i' - 2(Ax + B) y_i = 0 \qquad (i = 1, 2),$$
$$\varphi = \varphi(x) = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \qquad A = n(n+1), \qquad e_1 < e_2 < e_3,$$

distribution que l'auteur détermine par voie analytique.

Stäckel (*P.*). — Le théorème d'addition de $\wp(u)$. (604).

J. Drach.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXXXVIII, 1904 [1].

Boussinesq (*J.*). — Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement du gaz par les orifices. (29-34).

B 2800 C 9210

Weiss (P.). — La notion de travail appliquée à l'aimantation des cristaux. (35-37).

C 2440 G 350

Borel (E.). — Sur l'étude asymptotique des fonctions méromorphes. (68-70).

A 3610

Ocagne (*M. d'*). — Sur la résolution nomographique des triangles sphériques. (70-72).

A 0090 6830

Pourcel (*A.*). — Sur les propriétés du béton fretté. (72-75).

B 3660

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVIII$_2$, p. 64.

Mesnager (*M. A.*). — Sur un appareil enregistreur permettant de mesurer à travers une paroi solide supportant des pressions relativement élevées des différences de pression aussi faibles que l'on veut. (75-76).

B 0170 2800

Boussinesq (*J.*). — Applications de la théorie générale de l'écoulement des nappes aqueuses infiltrées dans le sol aux fortes sources des terrains perméables et, en particulier, à plusieurs de celles qui alimentent Paris. (117-123).

B 2810 J 51

Demoulin (*A.*). — Sur une propriété caractéristique des surfaces de Lamé. (133-134).

A 8420

Pascal (*E.*). — Un théorème sur les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales d'ordre supérieur. (134-136).

A 5220

Wimann (*A.*). — Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière et sur le cas d'exception de M. Picard. (137-139).

A 3610

Picard (*E.*). — Sur certaines solutions doublement périodiques de quelques équations aux dérivées partielles. (181-183).

A 4840 3640

Guichard. — Sur les systèmes de deux surfaces dont les lignes de courbures se projettent sur un plan suivant les mêmes courbes. (258-260).

A 8830 8450

Pellet (*A.*). — Sur les fonctions entières. (261-262).

A 3610

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants. (262-265).

A 3610 2920

Normand (*J.*). — Sur la détermination du déplacement d'un bâtiment de combat. (331-334).

B 2850

Borel (*E.*). — Remarques sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction entière. (335-339).

A 4820 3540 2050

Traynard. — Sur certaines fonctions thêta et sur quelques-unes des surfaces hyperelliptiques auxquelles elles conduisent. (339-342).

A 4070 8060

Fatou. — Sur les séries entières à coefficients entiers. (342-344).

A 3240 3610

Remoundos (*G.*). — Sur les zéros d'une classe de transcendantes multiformes. (344-346).

A 3620

Boussinesq (*J.*). — Sur l'unicité de la solution simple fondamentale et de l'expression asymptotique des températures, dans le problème du refroidissement. (402-406).

A 5640 5660 C 2050

Maillet (*E.*). — Sur les nombres quasi-rationnels et les fractions arithmétiques ordinaires ou continues quasi-périodiques. (410-411).

A 2920 3220

Picard (*E.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques de deux variables et de leurs intégrales. (437-440).

A 4020 8060 8040

Guichard (*C.*). — Sur un groupe de problèmes de Géométrie. (466-469).

A 8450 4840

Montel (*P.*). — Sur les suites de fonctions analytiques. (469-471).

A 3630 0430

Montessus de Bellore (*R. de*). — Sur la représentation des fonctions par des suites de fractions rationnelles. (471-474).

A 3220 3630

Perot (*A.*) et *Lévy* (*Henri-Michel*). — Sur la fragilité des métaux. (474-476).

B 3620

Jordan (*C.*). — Sur les formes quadratiques invariantes par une substitution linéaire donnée (mod p). (537-541).

A 2840

Duhem (*P.*). — D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque. (541-544).

B 3270

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation continue des surfaces. (553-554).

A 8850

Lecornu (*L.*). — Sur le frottement de pivotement. (554-556).

B 3740

Zoretti. — Sur les ensembles parfaits et les fonctions uniformes. (674-676).

A 0450 3020

Jordan (*C.*). — Sur les groupes hypoabéliens. (725-728).

A 1220 2840

Duhem (*P.*). — Sur quelques formules utiles pour discuter la stabilité d'un milieu vitreux. (737-740).

B 2520 2090

Hocevar (*F.*). — Sur les formes décomposables en facteurs linéaires. (745-747).

A 2070

Duhem (*P.*). — D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité. (844-847).

B 2520 2090

Boutroux (*P.*). — Sur une classe de transcendantes multiformes. (850-853).

A 3620

Poincaré (*H.*). — Théorie de la balance azimutale quadrifilaire. (869-874).

B 0170 1640

Mittag-Leffler (*G.*). — Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. (881-884).

A 3610 3620 3630

Egorov (*Th.*). — Sur une classe particulière de systèmes conjugués persistants. (885-888).

A 8850

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes d'opérations. (888-890).

A 1210

Maillet (*E.*). — Sur les équations de la Géométrie et la théorie des substitutions. (890-893).

A 2450 8070

Crémieu (*V.*). — Balance azimutale quadrifilaire. (893-895).

B 0170

Poincaré (*H.*). — Sur la méthode horistique de Gyldén. (933-936).

B 2080 E 1130

Mittag-Leffler (*G.*). — Une nouvelle fonction entière. (941-942).

A 3610 3620 3630

Duhem (*P.*). — Sur les propriétés des systèmes affectés à la fois d'hystérésis et de viscosité. (942-945).

B 2020

Considère. — Influence des pressions latérales sur la résistance des solides à l'écrasement. (945-949).

B 3620

Bernstein (*S.*). — Sur certaines équations différentielles ordinaires du second ordre. (950-951).

A 4880

Lerch. — Sur une série analogue aux fonctions modulaires. (952-954).

A 3220 2890

Schlesinger (*L.*). — Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires. (955-956).

A 4850

Zoretti (*E.*). — Sur les singularités des fonctions analytiques. (1026-1027).

A 3610 3620

Maillet (*E.*). — Sur les décrues des rivières. (1030-1032).

B 2810

Duhem (*P.*). — Effet des petites oscillations de l'action extérieure sur les systèmes affectés d'hystérésis et de viscosité. (1075-1076).

B 2020

Renard (*Ch.*). — Sur un nouvel appareil destiné à la mesure de la puissance des moteurs. (1083-1086).

B 0170 2860

Crémieu (*V.*). — Sensibilité de la balance azimutale. (1090-1093).

B 0170

Boussinesq (*J.*). — Pouvoir refroidissant d'un courant fluide, faiblement conducteur, sur un cylindre indéfini de section droite quelconque et dont l'axe est normal au courant. (1134-1138).

C 2010 B 2400

Autonne (*L.*). — Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions. (1148-1149).

A 8080

Boussinesq (*J.*). — Pouvoir refroidissant d'un courant fluide, faiblement conducteur, sur un corps limité en tous sens. (1189-1194).

C 2010 B 2400

Duhem (*P.*). — Effet des petites oscillations de la température sur un système affecté d'hystérésis et de viscosité. (1196-1199).

B 2020

Renard (*C.*). — Recherches relatives à la résistance de l'air au moyen d'un nouvel appareil appelé *balance dynamométrique*. (1201-1204).

B 0170 2860

Solvay (*E.*). — Sur l'énergie en jeu dans les actions dites *statiques*, sa relation avec la quantité de mouvement et sa différenciation du travail. (1261-1264).

B 0820

Renard (*C.*). — Résistance de l'air. Comparaison des résistances directes de diverses carènes aériennes. Résultats numériques. (1264-1266).

B 0170 2860

Mæhlenbruck. — Sur un instrument destiné à faciliter l'emploi du tour à fileter. (1266-1268).

A 0090

Laussedat (*A.*). — Sur l'emploi d'images stéréoscopiques dans la construction des plans topographiques. (1309-1312).

A 0080 0090 C 4440

Duhem (*P.*). — Effets des petites oscillations des actions extérieures sur un système dépendant de deux variables. (1313-1316).

B 2020

Niels Nielsen. — Sur les fondements d'une théorie systématique des fonctions sphériques. (1328-1330).

A 1420

Lecornu (*L.*). — Sur le rendement du joint universel. (1330-1332).

B 1640

Wiernsberger (*P.*). — Sur les expressions formées de radicaux superposés. (1401-1403).

A 3220 4030

Andrade (*J.*). — Sur les mouvements de solides aux trajectoires sphériques. (1404).

A 8420

Lecornu (*L.*). — Sur une variante du joint universel. (1405).

B 1640

Renard (*C.*). — Sur la vitesse des ballons dirigeables. (1405-1408).

B 2860

Chauveau (*A.*). — La contraction musculaire appliquée au soutien des charges sans déplacement (travail statique du muscle). Confrontation de ce travail intérieur avec la dépense énergétique qui l'engendre. Influence de la valeur de la charge. (1465-1470).

B 0100

Duhem (*P.*). — Influence exercée par de petites variations des actions extérieures sur un système que définissent deux variables affectées d'hystérésis. (1471-1476).

B 2020

Boutroux (*P.*). — Sur une classe d'équations différentielles à intégrales multiformes. (1479-1481).

A 4870 3620

Lebert (*E.*). — Énergie en jeu dans les actions statiques. (1481-1483).

B 0820

Painlevé (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre. (1555-1557).

B 1270

Stekloff (*W.*). — Sur la théorie générale des fonctions fondamentales. (1569-1571).

A 5660

Niels Nielsen. — Sur la théorie des fonctions sphériques. (1571-1573).

A 4420

Remoundos (*G.*). — Sur le cas d'exception de M. Picard. (1574-1575).

A 3610 3620

Renard (*C.*). — Sur l'empennage des carènes des ballons dirigeables. (1576-1578).

B 2860

Chauveau (*A.*). — Le travail musculaire et sa dépense énergétique dans la contraction dynamique avec raccourcissement graduellement croissant des muscles s'employant au soulèvement des charges. (1669-1675).

B 0100

Raffy (*L.*). — Sur certaines classes de surfaces isothermiques. (1681-1684).

A 8860

Clairin (*J.*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. (1684-1685).

A 4840 5230

Jouguet (*E.*). — Remarques sur la propagation des percussions. (1685-1688).

B 2460 2490 2530

Solcay (*E.*). — Sur le problème du travail dit *statique:* paradoxe hydrodynamique et électrodynamique. (1728-1730).

B 0820 0100

Henry (*Ch.*). — Sur les lois des travaux dits *statiques* du muscle. (1731-1734).

0820 0100

Tome CXXXIX.

Picard (*E.*). — Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques. (5-9).

A 8060 6030 1220

Chauveau (*A.*). — Le travail musculaire et sa dépense énergétique dans la contraction dynamique avec raccourcissement graduellement croissant des muscles s'employant au soulèvement des charges (travail moteur). Influence du nombre des excitations de la mise en train de la contraction. (13-19).

B 0420

Lebesgue (*H.*). — Sur les fonctions représentables analytiquement. (29-31).

B 3610 0430

Martin (*E.*). — Sur la théorie générale des réseaux et des congruences. (32-35).

A 8450

Steklo.ff (*W.*). — Sur une égalité générale convenant à toutes les fonctions fondamentales. (35-37).

A 5660

Hervé (*H.*). — Sur la stabilisation de route des ballons dirigeables. (37-39).

B 2860

Chauveau (*A.*). — Le travail musculaire et sa dépense énergétique dans la contraction dynamique des muscles, s'employant au refrènement de la descente d'une charge (travail résistant). (108-114).

B 0120

Raffy (*L.*). — Sur deux problèmes relatifs aux surfaces isothermiques. (119-121).

A 8860

Jouguet (*E.*). — Sur l'onde explosive. (121-124).

B 2460 2490 2530

Renard (*Ch.*). — Ballons dirigeables. Stabilité longitudinale. (183-185).

B 2860

Picard (*E.*). — Sur une équation fonctionnelle. (245-248).

A 6030

Boutroux (*P.*). — Sur les singularités de l'équation

$$y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3.$$

(258-260).

A 4870 3620

Boutroux (*P.*). — Sur les zéros des fonctions entières d'ordre entier. (351-353).

A 3610

Renard (*P.*). — Sur la mesure indirecte de la vitesse propre des navires aériens. (353-356).

B 2860

Taffoureau (*E.*). — Sur les hélices sustentatrices. (356-358).

B 2860

Boussinesq (*J.*). — Equations générales du mouvement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. (387-391).

B 2810

Laussedat (*A.*). — Sur différents résultats récemment obtenus par la Métrophotographie. (391-393).

J 70

Demoulin (*A.*). — Sur l'emploi d'un tétraèdre de référence mobile en Géométrie caleyenne. (393-396).

A 6410 8420

Maillard (*L.*). — Sur l'expérience de Perrot. (362-365).

B 2470

Potron. — Sur les groupes d'ordre p^m (p premier) dont tous les sous-groupes d'ordre p^{m-2} sont abéliens. (396-399).

A 1210

Rémoundos. — Sur un théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions entières. (399-400).

A 3610

Boussinesq (*J.*). — Équation de deuxième approximation pour l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et à faibles pentes. (417-421).

B 2810

Boussinesq (*J.*). — Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée dans le sol, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors. (441-445).

B 2810 C 2010

Riesz (*F.*). — Sur la résolution approchée de certaines congruences. (459-462).

A 0430 2850

Chauveau (*A.*). — Comparaison de la dépense des muscles fléchisseurs et des muscles extenseurs de l'avant-bras, appliqués, chaque groupe isolément, à la production du même travail extérieur continu, alternativement moteur et résistant (525-531).

B 0120

Chauveau (*A.*). — La discontinuité des travaux extérieurs des muscles, comparée à la discontinuité de leurs travaux intérieurs, au point de vue de la dépense d'énergie qu'entraîne la contraction. (557-662).

B 0120

Leau (*L.*). — Sur les fonctions entières du genre fini. (625-627).

A 3610

Bernstein (*S.*). — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (627-628).

A 5660

Traynard. — Sur une surface hyperelliptique. (718-719).

A 4070 7640

Renard (*Ch.*). — Sur un nouveau mode de construction des hélices aériennes. (721-724).

B 2860

Jouguet. — Remarques sur la loi adiabatique d'Hugoniot. (786-789).

B 2460 C 2440

Picard (*E.*). — Sur un théorème général concernant les surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité. (835-838).

A 8060 1220 6420

Montessus de Bellore (*R. de*). — Sur les fractions continues algébriques. (846-848).

A 3220

Fréchet (*M.*). — Généralisation d'un théorème de Weierstrass. (848-850).

A 0430 3210 3220

Fatou (*P.*). — La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence. (850-851).

A 5610 3220

Pompeïu (*D.*). — Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. (914-916).

A 3610 0430

Picard (*E.*). — Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. (949-953).

A 8060 8040

Volterra (*V.*). — Sur les équations différentielles du type parabolique. (956-959).

A 4840

Potron. — Sur les groupes d'ordre p^m (p premier, $m > 4$) dont tous les diviseurs d'ordre p^{m-2} sont abéliens. (963-964).

A 1210

Fournier (*vice-amiral*). — Criterium des navires à grande vitesse. (964-967).

B 2850

Heilbronner (*P.*). — Sur la Téléstéréoscopie. (967-969).

A 6840

Fatou (*P.*). — Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques. (1019-1021).

A 0420 3220 5610

Le Vavasseur. — Sur les groupes continus finis ou infinis. (1021-1023).

A 1230 1240

Padé (*H.*). — Remarques sur une méthode pour l'étude de la convergence de certaines fractions continues. (1023-1025).

A 3220 6020

Jacob. — Détonation sous l'eau des substances explosives. (1025-1026).

B 2530

Mascart (*J.*). — Pendule en acier-nickel entretenu électriquement. (1026-1028).

B 0150

Painlevé (*P.*). — Sur le théorème des aires et les systèmes conservatifs. (1170-1174).

B 0820

Crocco (*G.*). — Sur la stabilité des dirigeables. (1195-1198).

B 2850

Perot (*A.*) et *Lévy* (*Henri-Michel*). — Sur la fragilité de certains aciers. (1198-1200).

B 3020

J. T.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. In-4° (1).

Tome IX; mai 1900-avril 1901.

Van der Waals Jr (*J.-D.*). — Sur le rapport entre le rayonnement et l'attraction moléculaire. (46-55).

L'auteur s'est proposé de chercher si l'action pondéromotrice du rayonnement peut expliquer l'attraction moléculaire. A cette fin, il s'est efforcé de résoudre les équations de mouvement d'un nombre de vibrateurs qui ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles. Cette solution obtenue, on en pourrait déduire, si la quantité a de l'équation caractéristique est une fonction de la température, comment elle s'exprime par la température dans le cas affirmatif et si, rigoureusement ou seulement par approximation, l'attraction est proportionnelle au carré de la densité. Malheureusement il n'a pas réussi dans la solution des équations, même pas dans le cas de deux vibrateurs. Donc il a dû se contenter d'étudier si l'ordre de grandeur des forces de rayonnement est le même que celui des forces moléculaires. A cet effet il a considéré la différence de deux quantités d'énergie : la quantité d'énergie de quelques vibrateurs soumis à leurs actions mutuelles et la somme des quantités d'énergie de chaque vibrateur supposé existant seul dans l'espace. Cette différence est égale à la quantité d'énergie que perdrait le système si les vibrateurs, supposés d'abord à distances infinies les uns des autres, se rapprochaient jusqu'à leurs distances actuelles, pourvu que leurs amplitudes ne changeassent point, c'est-à-dire que ce procédé fût un procédé isothermique. Une solution rigoureuse de cette question nouvelle, sans doute très compliquée, aurait à tenir compte de l'énergie du champ. En supposant au contraire que l'énergie cherchée se représente globalement par $\frac{1}{2}\sum 4\pi V^2(fa_x + ga_y + ha_z)$, l'auteur trouve

$$10^4\lambda = 3,16,$$

tandis que les longueurs d'onde maximales mesurées donnent

$$10^4\lambda = 2,10.$$

Ce résultat numérique ne s'oppose pas à l'hypothèse qu'en effet la cause de l'attraction moléculaire est à chercher dans le rayonnement, hypothèse qui se recommande d'ailleurs par sa simplicité.

Hartmann (*Ch.-M.-A.*). — Sur des phénomènes de condensation de mélanges à proximité de l'état critique. (60-64).

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIV, p. 148.

Réfutation de l'opinion de M. Duhem, d'après laquelle, dans le cas d'un mélange parfait de deux substances, les isothermes expérimentale et théorique d'une même température se coupent deux fois dans le domaine des états labiles, opinion incompatible avec la théorie de Van der Waals.

Van de Sande Bakhuyzen (*E.-F.*). — Le mouvement du pôle terrestre d'après les observations des dernières années. (159-165).

Dans l'histoire de la question du mouvement du pôle terrestre la fin de l'année 1899 fait époque. Jusqu'à 1899, l'étude de la question a été un sujet de coopération libre d'un nombre indéterminé d'observateurs; dès la fin de 1899, elle est confiée à une nouvelle organisation internationale d'après laquelle des observations parfaitement analogues les unes aux autres se feront en six stations du parallèle de 39°8 latitude boréale, suivant la méthode de Horrebow. Donc l'auteur juge à propos de comparer maintenant ses propres résultats avec ceux obtenus par M. Albrecht, en s'appuyant sur toutes les observations des dix dernières années. Après avoir évalué les déviations l'auteur s'occupe des trois hypothèses suivantes : 1° le mouvement annuel est plus compliqué qu'on ne le croit ; 2° les éléments de la période de 14 mois ne sont pas constants; 3° à côté de ces deux mouvements, il y a encore d'autres mouvements particuliers.

Van der Waals (*J.-D.*). — Propriétés des lignes de pression pour des phases coexistantes de mélanges. (166-180).

L'auteur, en se servant des lignes trouvées par M. Hartmann et par M. Cunaeus, compare les résultats de la formule théorique avec ceux des expériences.

Van Everdingen (*E.*). — Le phénomène de Hall et l'accroissement de la résistance magnétique du bismuth aux températures basses. (181-199).

Kamerlingh Onnes (*H.*). — Contributions à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (199-213).

I. Traitement graphique du pli vertical.

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Reinganum* (*M.*). — Contributions à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (213-241).

II. La partie du pli transversal à proximité du point de plissement dans les expériences de M. Kuenen sur la condensation rétrograde.

De Vries (*J.*). — Les cercles podaires des points du plan d'un triangle donné par rapport à ce triangle. (249-252).

Étude cyclographique ([1]) du système doublement infini de ces cercles podaires. La surface-image s'obtient de la manière suivante. En chaque point P du plan on érige une normale sur le plan et sur cette normale on détermine, de part et d'autre du point P, deux points Q_1, Q_2 et Q'_1, Q'_2, de manière que les segments $PQ_1 = PQ'_1$ et $PQ_2 = PQ'_2$ représentent les demi-axes de la conique à centre P, inscrite dans le triangle. Le lieu des couples (Q_1, Q'_1) et (Q_2, Q'_2) qui sont les points-images des cercles podaires correspondant aux foyers de la conique à centre P, est la surface en question. Elle est du quatrième ordre et possède quatorze points doubles, six dans le plan du triangle et quatre couples correspondant au cercles inscrits et exinscrits.

Schoute (*P.-H.*). — La surface de l'onde des coniques inscrites. (252).

Équation de la surface-image figurant dans la communication précédente. Les points doubles correspondant aux cercles inscrits et exinscrits sont les *points de la réfraction conique.*

Schoute (*P.-H.*). — Le *rapport anharmonique spacial* des courbes ρ^n de l'ordre n de l'espace E_n à n dimensions. (268-276).

Le *rapport anharmonique spacial* a trait au système $n-1$ fois infini des courbes ρ^n en E_n déterminé par $n+2$ points donnés; pour une ρ^n déterminée il se compose des rapports anharmoniques ordinaires des $\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n(n-1)$ quadruples compris dans ces $n+2$ points et est déterminé par $n-1$ de ces rapports anharmoniques ordinaires indépendants entre eux. Étude de plusieurs lieux géométriques qui s'y rapportent.

Gegenbauer (*L.*). — Sur la généralisation des formules de Newton-Girard due à M. Mac Mahon. (332-336).

Les relations trouvées par M. P. Mac Mahon (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. XV) et retrouvées par M. R. Lachlan (*ibidem*, t. XVIII) n'ont été démontrées qu'à l'aide d'opérateurs différentiels. Ici M. Gegenbauer en donne une démonstration plus simple (en allemand), capable d'être insérée dans un cours d'algèbre élémentaire et jouissant de plus de l'avantage d'être tout à fait analogue à celle du cas original de Newton-Girard.

Korteweg (*D.-J.*). — Supplément au rapport sur les manuscrits de feu J.-H. van Swinden ([2]). (347).

Il s'agit de trois portefeuilles contenant des manuscrits du professeur Van Swinden, trouvés à la bibliothèque de la Monnaie royale d'Utrecht, en rapport avec le poids et la teneur des monnaies françaises et hollandaises.

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXIV_2, p. 160.
([2]) Voir *Bulletin*, t. XXIV_2, p. 170.

Kapteyn (*W.*) et *Kluyver* (*J.-C.*). — Rapport sur un Mémoire de M. K. Bes intitulé : *L'équation finale*. (396-398).

Ce travail paraîtra dans les *Verhandelingen* de l'Académie.

Lorentz (*H.-A.*). — La théorie de la radiation et la seconde loi de la thermodynamique. (418-434).

Si un corps pondérable quelconque M occupe une partie de l'espace enfermé dans une enceinte à parois parfaitement réfléchissantes, l'éther contenu dans la partie restante de cet espace sera parcouru dans tous les sens par des rayons de différentes longueurs d'onde. L'énergie par unité de volume (la densité de l'énergie) de l'éther pourra être représentée par l'intégrale

$$\mu = \int_0^\infty f(T, \lambda)\, d\lambda,$$

$f(T, \lambda)\, d\lambda$ indiquant la partie de cette énergie qui appartient aux rayons dont les longueurs d'onde sont comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$. En supposant que chaque rayon qui se propage à l'intérieur de l'enceinte finit, après un nombre plus ou moins grand de réflexions, par rencontrer le corps M et que ce dernier possède un certain pouvoir absorbant, quelque faible qu'il soit, pour toutes les longueurs d'onde qui existent dans la radiation d'un corps *absolument noir* de la température T, on est arrivé depuis longtemps au théorème que la fonction $f(T, \lambda)$ doit être entièrement indépendante de la nature particulière du corps M. C'est là une conclusion rendue inévitable par le principe de Carnot. En se servant de ce même principe, M. Boltzmann a démontré que la densité totale μ de l'énergie est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue, et M. W. Wien a fait voir que la fonction universelle $f(T, \lambda)$ doit être de la forme $T^5 \varphi(T\lambda)$, φ étant une fonction du produit $T\lambda$. Or, cet état de l'éther est caractérisé non seulement par la densité μ de l'énergie, mais aussi par certaines longueurs déterminées. On peut considérer, par exemple, la longueur d'onde λ_m pour laquelle la fonction $f(T, \lambda)$ est maximum; en vertu de la loi de Wien, elle est inversement proportionnelle à T. Si l'on admet que, en ce qui regarde l'éther, une explication des phénomènes n'exige autre chose que les équations bien connues du champ électromagnétique, il n'y a que la vitesse de la lumière qui soit déterminée par les propriétés de ce milieu. Les valeurs de μ et de λ_m doivent alors dépendre de la nature du corps pondérable M, et, tous les corps pondérables donnant lieu aux mêmes valeurs de ces quantités, il doit y avoir une certaine ressemblance entre ces corps différents; il faut même que, à températures égales, cette ressemblance puisse s'exprimer par l'égalité numérique entre des grandeurs qui se rapportent à la constitution intime des corps. Sans cela on ne pourrait même pas comprendre que l'équilibre de température entre deux corps, après s'être établi par le contact, subsiste encore, si on les expose à leurs radiations mutuelles. Il est permis de croire qu'on pourra rendre compte des phénomènes de l'émission et de la radiation en considérant les corps pondérables comme des systèmes de petites particules mobiles, dont quelques-uns, les *électrons*, portent des charges électriques. On peut écrire les équations qui déterminent l'état de l'éther dès qu'on connaît le mouvement des électrons, et l'on peut s'imaginer qu'on a également

établi les équations du mouvement de ces particules elles-mêmes. Malheureusement le problème est très compliqué et il est difficile de pénétrer dans le mécanisme des phénomènes. On peut cependant examiner quelles modifications des dimensions, des masses, des charges électriques sont compatibles avec les lois de Boltzmann et de Wien. A côté du premier système S composé du corps M et de l'enceinte dont il vient d'être question, l'auteur considère un second système S'. On obtient les dimensions, les densités de la matière pondérable et celles des charges électriques dans ce second système en multipliant respectivement par a, b, c les quantités correspondantes du premier système, chacun de ces trois facteurs ayant une valeur constante. On admet l'égalité des vitesses dans S et S' et l'on suppose qu'on puisse donner aux forces moléculaires dans ce dernier système les intensités requises par les valeurs a, b, c. Alors, le mouvement de S', qui est impliqué dans ce qui vient d'être posé, pourra exister réellement sous la condition $b = a\,c^2$; de plus, pour que S et S' satisfassent à la loi de Boltzmann, il faut qu'on ait $a^3 c = 1$, ce qui exprime que les charges électriques ont les mêmes valeurs dans les deux systèmes. Évidemment il se pourrait qu'on n'eût pas la faculté de disposer librement des dimensions et masses des électrons, et des forces qui les sollicitent. Si, par exemple, les électrons avaient des dimensions constantes, les mêmes dans tous les corps, et si cette égalité contribuait à rendre identiques les états de l'éther provoqués par différents corps pondérables, il ne serait pas permis de supposer le facteur a différent de l'unité. On aurait alors $b = 1$ et $c = 1$ et l'on ne pourrait, dans ce cas, arriver à aucune conclusion, le système S' ne se distinguant pas de S. Si, d'un autre côté, les masses et les charges électriques conservaient toujours le même rapport les unes par rapport aux autres, il faudrait avoir $b = c$, ce qui conduirait de nouveau à $a = b = c$. Mais il faut remarquer que, si les dimensions des électrons ou les rapports entre leurs charges et leurs masses devaient être les mêmes dans tous les corps, il ne serait que rationnel d'admettre que les valeurs absolues des charges et des masses le furent également. Ainsi, l'on est toujours amené à admettre que les électrons de différents corps pondérables sont égaux entre eux, et que, si l'un de ces corps contient plusieurs espèces d'électrons, chacune de ces espèces se retrouve dans tous les autres. On peut comprendre alors comment tous les corps peuvent donner lieu aux mêmes valeurs de μ et de λ. A une température déterminée, l'énergie cinétique moyenne ω d'une molécule est la même dans tous les cas. Or, cette énergie, combinée avec la charge e d'un électron, peut servir à déterminer une certaine longueur. On peut aussi se demander quel doit être le rayon R d'une sphère pour que la charge e, répandue uniformément sur sa surface, donne lieu à une énergie électrostatique égale à ω. La longueur d'onde λ_m pourrait être un certain multiple de ce rayon R; elle deviendrait ainsi inversement proportionnelle à ω, c'est-à-dire à la température T, conformément à la loi de Wien. Quant à μ, cette quantité pourrait être déterminée par la condition que l'énergie contenue dans un cube, dont λ_m est l'arête, fût égale à un certain nombre de fois l'énergie μ, ce qui serait en accord avec la loi de Boltzmann.

Bakker (*G.*). — Contribution à la théorie des substances élastiques. (520-527).

L'auteur suppose que les forces élastiques, qui ne se présentent que dans le

cas de très petites distances, dépendent de la fonction potentielle $-f\frac{e^{-qr}}{r}$, où r désigne la distance. Il déduit les relations

$$2U = 3\Theta - (S_1 + S_2 + S_3),$$
$$2B = S_1 - S_2 - S_3,$$

où U, B, Θ indiquent respectivement le viriel des forces extérieures, celui des forces d'attraction moléculaires et la pression thermique au point considéré, tandis que S_1, S_2, S_3 représentent les tensions moléculaires dans les directions des axes principaux de pression. Ensuite il trouve que la différence des tensions par unité de surface dans la direction des lignes de force et dans la direction perpendiculaire est égale au triple du travail nécessaire pour une raréfaction infinie de la substance, augmentée du double du viriel des forces d'attraction moléculaires. Enfin il s'occupe de la dilatation et applique ses résultats à l'allongement d'un prisme, à la dilatation d'un cylindre creux et d'une calotte sphérique, au piézomètre d'Oersted.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Résumé de la sixième et dernière partie du compte rendu de la triangulation de Java. (530-543, 1 pl.).

Lorentz (*H.-A.*). — Les lois de Boltzmann et de Wien, relatives à la radiation. (572-585).

Pour arriver à ces lois (Boltzmann, *Annales de Wiedemann*, t. XXII, p. 291, 1884; Wien, *Sitzungsber. der Berliner Akad.*, 1893, p. 55) il n'est pas nécessaire de décomposer l'état vibratoire de l'éther en une infinité de rayons qui s'entrecroisent dans tous les sens; on peut se baser directement sur les équations fondamentales du champ électromagnétique.

1. Supposons qu'un espace, entouré d'une enceinte à parois parfaitement réfléchissantes, soit occupé en partie par un corps pondérable M. L'éther environnant ce corps sera alors le siège de mouvements électromagnétiques, dont la nature et l'intensité sont déterminées par la température T du corps M, et en vertu desquels l'éther exerce une certaine pression p. En déplaçant les parois on peut augmenter ou diminuer le volume v; de plus, on supposera qu'on puisse introduire à volonté de la chaleur dans le corps M. La quantité de chaleur requise pour un changement infiniment petit déterminé par dT et dv est donnée par la formule

$$dQ = \frac{dz}{dT}dT + \left(\frac{dz}{dv} + p\right)dv,$$

et la seconde loi de la thermodynamique conduit à la relation

$$\frac{dz}{dv} + p = T\frac{dp}{dT}.$$

Ici le premier terme n'est autre chose que l'énergie U de l'éther par unité

de volume. Comme p est indépendant de v on aura

$$U + p = T\frac{\partial p}{\partial T}.$$

2. Soient $\mathfrak{d}$, aux composantes $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, le déplacement diélectrique, et $\mathfrak{h}$, aux composantes $\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_z$, la force magnétique. Alors on a

$$U = 2\pi V^2\overline{\mathfrak{d}^2} + \frac{1}{8\pi}\overline{\mathfrak{h}^2},$$

les traits horizontaux indiquent qu'il s'agit de valeurs moyennes, par rapport à l'espace et au temps, et V représentant la vitesse de la lumière. D'un autre côté la pression peut être représentée par

$$-2\pi V^2\left(2\overline{\mathfrak{d}_x^2} - \overline{\mathfrak{d}^2}\right) - \frac{1}{8\pi}\left(2\overline{\mathfrak{h}_x^2} - \overline{\mathfrak{h}^2}\right).$$

Comme l'état de l'éther est isotrope, on peut substituer dans cette expression

$$\overline{\mathfrak{d}_x^2} = \frac{1}{3}\overline{\mathfrak{d}^2}, \qquad \overline{\mathfrak{h}_x^2} = \frac{1}{3}\overline{\mathfrak{h}^2}.$$

Ainsi l'on trouve

$$p = \frac{1}{3}U, \qquad 4U = T\frac{dU}{dT}, \qquad U = CT^4,$$

ce qui est l'expression de la loi de Boltzmann.

3. Enlevons maintenant le corps M et augmentons le volume v. L'énergie par unité de volume diminuera et, si le changement du volume est suffisamment lent, les différents états de l'éther qui se succèdent sont précisément ceux qui pourraient être en équilibre avec des corps pondérables, ayant des températures de plus en plus basses; c'est ce que Wien a démontré par des considérations thermodynamiques. Si l'on veut étudier la dépendance qu'il y a entre l'état de l'éther et la température d'un corps pondérable, il suffira donc d'examiner l'effet du rayonnement des parois. Si, dans un temps infiniment petit dt, les dimensions augmentent dans le rapport de $1 + a\,dt$, a étant une constante, le problème peut être résolu par l'introduction du nouveau système de variables dans les équations du champ. Prenons comme nouvelles variables indépendantes

$$x' = xe^{-at}, \qquad y' = ye^{-at}, \qquad z' = ze^{-at},$$

$$t' = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) - \frac{a}{2V^2}(x^2 + y^2 + z^2)e^{-2at},$$

et comme nouvelles variables dépendantes les quantités $\mathfrak{d}'_x$, $\mathfrak{d}'_y$, $\mathfrak{d}'_z$, $\mathfrak{h}'_x$, $\mathfrak{h}'_y$, $\mathfrak{h}'_z$ déterminées par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{d}_x = e^{-2at}\mathfrak{d}'_x - \dfrac{a}{4\pi V^2}(y\mathfrak{h}'_z - z\mathfrak{h}'_y), & \ldots, \\ \mathfrak{h}_x = e^{-2at}\mathfrak{h}'_x + 4\pi a\,(y\mathfrak{d}'_z - z\mathfrak{d}'_y), & \ldots. \end{cases}$$

Négligeons enfin les termes qui contiennent a^2, ce qui sera permis tant que

la vitesse des parois est très petite par rapport à celle de la lumière. Alors on trouve que la forme des équations différentielles n'est pas changée par la substitution. Il faut remarquer qu'un point déterminé de la paroi est toujours caractérisé par des valeurs constantes de x', y', z'. Si donc l'équation de la surface intérieure de l'enceinte est $F(x, y, z) = 0$ au temps t, elle sera $F(x', y', z') = 0$ à un instant postérieur quelconque. Quant à la condition que les parois doivent être parfaitement réfléchissantes, elle s'exprime par

$$\delta_x : \delta_y : \delta_z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

dans le cas d'une enceinte immobile et par

$$\delta'_x : \delta'_y : \delta'_z = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'}$$

dans celui d'une enceinte qui se dilate. On obtient ces dernières formules en se servant des conditions relatives à la surface d'un corps mobile, qui ont été établies dans la théorie de l'aberration (voir LORENTZ, *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*). En somme les équations qui déterminent δ'_x, $\mathfrak{H}'_x$, ..., considérées comme des fonctions de x', y', z', t', sont les mêmes que celles dont il faut se servir pour déterminer δ_x, $\mathfrak{H}_x$, ... en fonction de x, y, z, t.

4. Soient

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta_x = \varphi_1(x, y, z, t), \ldots, \\ \mathfrak{H}_x = \chi_1(x, y, z, t), \ldots \end{cases}$$

les valeurs qui existeraient si les parois avaient été maintenues dans la position qu'elles occupent au temps $t = 0$. Les mouvements qui ont lieu pendant le déplacement de l'enceinte seront donnés par

$$\begin{aligned} \delta'_x &= \varphi_1(x', y', z', t'), \quad \ldots, \\ \mathfrak{H}'_x &= \chi_1(x', y', z', t'), \quad \ldots. \end{aligned}$$

Considérons le moment où e^{at} a une valeur déterminée k et passons à la limite où cette valeur aurait été atteinte dans un temps infiniment long, avec une valeur infiniment petite de a. Alors les équations (1) deviennent :

$$\delta = \frac{\delta'}{k}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}'}{k}.$$

et l'on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{k^2}\varphi_1\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}, t\right), \quad \ldots, \\ \mathfrak{H}_x = \frac{1}{k}\chi_1\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}, t\right), \quad \ldots. \end{cases}$$

C'est le nouvel état que nous allons comparer avec l'état initial (2). Désignons de nouveau par U et T la densité de l'énergie et la température correspondante à (2) et par U' et T' les valeurs analogues pour l'état (3). On trouve

immédiatement

$$k^4 U' = U,$$

ce qui donne

$$k T' = T,$$

en vertu de la loi de Boltzmann. Or, le théorème de Fourier nous permet de décomposer les états (2) et (3) en une infinité de mouvements partiels, ayant chacun une longueur d'onde déterminée; à chaque terme de la décomposition de (2) il correspond un terme de la décomposition de (3). Nommons l et l' des longueurs d'onde correspondantes, u la densité de l'énergie qui dans l'état (2) appartient aux mouvements dont la longueur d'onde est comprise entre deux limites infiniment voisines, et u' la densite de l'énergie dans l'état (3) qui est propre aux parties correspondantes du mouvement total. On trouve facilement

$$l' = kl, \qquad k^5 u' = u,$$

et donc

$$l' : l = T : T', \qquad u' : u = T'^4 : T^4,$$

équations qui expriment la loi de Wien.

Van der Waals (*J.-D.*). — L'équation critique et la théorie du mouvement cyclique. (586-599, 614-627, 701-712).

La déduction de l'équation critique est basée sur la supposition que les molécules sont, à toutes les températures et sous toutes les pressions, des systèmes invariables. Ainsi l'équation critique ordinaire doit être en défaut, aussitôt qu'il se présente des associations à des systèmes compliqués. Même en des cas où les systemes subissent des variations beaucoup moins importantes, qui n'influencent pas même les dimensions des molécules, on est contraint a renoncer à l'hypothèse que les quantités a et b sont des constantes. Même dans la première série de vérifications de l'équation critique (avec l'acide carbonique, d'après les expériences d'Andrews) l'auteur trouvait que b augmente avec la température; seulement la réflexion que la maniere dont b dépend de t était inconnue lui a fait détourner les yeux de cette variabilité. Déjà la remarque que la valeur spécifique à volume constant des matières à molécules composées ne s'accorde pas avec celle qu'on trouve dans le cas de matières monoatomiques, mène à la conclusion que, à côté des mouvements des molécules, on est obligé de supposer l'existence de mouvemenis intérieurs, mouvements atomiques; d'un autre côté, l'observation que ce mouvement atomique devient de plus en plus violent à mesure que T augmente, fait présumer qu'en vérité les molécules sont plus grandes à des températures élevées qu'à des températures basses. Ainsi l'équation critique aux valeurs invariables de a et b ne saurait être de rigueur que pour les matières monoatomiques; l'application de cette équation aux matières à molécules composées ne constitue qu'une approximation grossière. Dans une communication antérieure [1] l'auteur a déja indiqué que nous serons obligés de considérer les molécules comme des organismes qui varient avec p et T, de manière qu'il y ait lieu de parler de l'équation critique

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIV, p. 161.

de la molécule. Depuis, à l'aide de l'équation viriale, il a déduit une équation de ce caractère. Seulement, plusieurs points délicats, surtout le rapport entre la force vive du mouvement atomique et celui du mouvement moléculaire à des températures diverses, et la question de la relation de ce rapport avec le degré de condensation de la matière, ne pouvant être décidés que par des raisons de probabilité, l'auteur a cherché d'autres moyens de vérification, d'abord en se servant de considérations principalement thermodynamiques, ensuite en s'occupant de la théorie du mouvement cyclique. Dans la première et la seconde partie, cette dernière théorie est appliquée au cas de molécules composées de deux atomes et de trois atomes.

Kluyver (*J.-C.*). — Le développement d'une fonction dans une série de polynomes. (608-614).

Comme l'a remarqué M. Borel (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XVI, p. 132), le problème fondamental consiste dans la décomposition de $1:(1-x)$. Des solutions de ce problème fondamental ont été données par MM. Mittag-Leffler (*Acta math.*, t. XXIII, p. 43 et t. XXIV, p. 183 et 205) et Painlevé (*Comptes rendus* du 23 mai et du 3 juillet 1899). Ici l'auteur en donne une solution nouvelle, peut-être au point de vue de la théorie un peu plus simple que les solutions précédentes.

Comme l'a démontré M. Painlevé, le problème de la décomposition de $1:(1-x)$ est lié à celui de la représentation conforme, caractérisé par un certain degré de liberté. Dans ce problème il s'agit de représenter l'intérieur d'une circonférence, se rapportant à la variable u, au centre $u=0$ et au rayon égal à l'unité, par l'intérieur d'une courbe fermée sans nœud, se rapportant à la variable z, qui inclut l'origine $z=0$ et passe par le point $z=-1$. Aux valeurs 0 et -1 de u doivent correspondre les valeurs 0 et -1 de z; de plus on doit faire dépendre la forme de la courbe de z d'un ou de plusieurs paramètres, de manière qu'à des valeurs convenablement choisies de ces paramètres correspondent des courbes plus ou moins oblongues, limitées d'un côté par un cercle au centre $z=0$ et au rayon $r=1$ et de l'autre côté par une bande d'épaisseur infiniment petite environnant le segment de droite $z=0$, $z=1$. Ici l'auteur suppose que ces courbes de z sont des ellipses dont $z=0$ représente un foyer et $z=-1$ le sommet de l'autre côté du grand axe.

La relation fonctionnelle

$$z = e \sin\left(\frac{\pi}{2K} sn^{-1}\left(\frac{u}{k}\right)\right)$$

de M. H. Schwarz établit une correspondance conforme entre une circonférence u et une ellipse z; seulement cette relation doit être modifiée ici pour que le centre du cercle corresponde à un des foyers de l'ellipse. On trouve que la relation

$$z = \frac{4\sqrt{q}}{(1+\sqrt{q})^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2K} sn^{-1}\left(\sqrt{\frac{u}{k}}\right)\right)$$

donne tout ce que l'on désire. Les quantités k, K, q sont les constantes ordinaires de Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques; k et K sont envisagées comme des fonctions du paramètre q qui varie de zéro jusqu'à l'unité.

Pour $z^2(1-q)^2 = 4q$ la relation fonctionnelle fera correspondre à la circonférence u l'ellipse z à l'équation polaire $\rho(1-\varepsilon\cos\varphi) = 1-\varepsilon$. Si q tend vers zéro, l'ellipse z tend vers le cercle $z = u$; au contraire, si q tend vers l'unité, l'ellipse z se transforme en un cordonnet étroit environnant le segment de droite $(0, +1)$.

Si l'on pose

$$z = \frac{2\sqrt{q}}{(1-\sqrt{q})^2} \sum_1^\infty C_i u^i,$$

les coefficients C_i se déterminent à l'aide de l'équation différentielle

$$u(k-u)(1-ku)\frac{d^2z}{du^2}$$
$$-\frac{1}{2}[k-2u(1-k^2)-3ku^2]\frac{dz}{du} - \frac{\pi}{4K^2}z = \frac{2\sqrt{q}}{(1-\sqrt{q})^2}\frac{\pi}{4K^2}.$$

Ainsi l'on trouve

$$C_1 = \frac{2}{\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3^2}, \qquad C_2 = \frac{2(\mathfrak{z}_2^2-\mathfrak{z}_3^2+1)}{3\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3^3}$$

et la relation récurrente

$$C_{h+1} = -\frac{4[h^2(\mathfrak{z}_2^2-\mathfrak{z}_3^2)-1]}{(2h-1)(2h-2)\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3^2}C_h - \frac{(h-1)(2h-1)}{(h-1)(2h-1)}C_{h-1}.$$

De la même manière on développe z^n considérée comme une somme de cosinus de multiples de

$$\beta = \frac{\pi}{2K}\,sn^{-1}\sqrt{\frac{u}{k}}.$$

Ensuite l'auteur s'occupe du développement

$$\frac{1}{1-xz} = 1 - \sum_1^\infty T_n(x, q)\,u^n,$$

où $T_n(x, q)$ est un polynome de l'ordre n en x dont les coefficients contiennent le paramètre q. Ainsi il parvient aux développements

$$\text{arc tang}\,x = [0{,}5785x] + [0{,}2133x] - [0{,}096x - 0{,}0645x^3]$$
$$+ [0{,}0488x - 0{,}0714x^3] - [0{,}0262x - 0{,}0587x^3 - 0{,}0130x^5] - \ldots,$$

où l'équivalence de la fonction et de la série est restreinte à l'espace inclus par les deux limaçons

$$\rho = 1{,}693 - 0{,}663\sin\varphi$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + [0{,}2892x] + [0{,}1066x + 0{,}1255x^2]$$
$$- [0{,}0484x - 0{,}0925x^2 - 0{,}0605x^3]$$
$$+ [0{,}0244x - 0{,}0592x^2 - 0{,}0669x^3 - 0{,}0566x^4]$$
$$- [0{,}0131 - 0{,}0367x^2 + 0{,}0551x^3 - 0{,}0455x^4 - 0{,}0159x^5] - \ldots,$$

où le domaine de convergence coïncide avec celui du développement de $\frac{1}{1-x}$.

De Vries (J.). — Involutions sur une courbe du quatrième ordre à point triple. (696-701).

Les involutions quadratiques I_2 sur une C_4 du quatrième ordre à point triple O admettent une enveloppe d'involution Γ de la troisième classe. Chacune de ces involutions I_2 peut être engendrée à l'aide d'une infinité de faisceaux de coniques; les points de base de ces faisceaux se trouvent sur C_4 et sont le point fixe O et trois points variables engendrant sur cette courbe une involution I_3 conjuguée à l'involution I_2, ces involutions admettant la même enveloppe d'involution Γ. Les courbes C_4 et Γ se touchent en six points R; les tangentes communes de C_4 et Γ consistent des six tangentes aux points R comptées doublement et de six tangentes simples correspondant à des coïncidences de I_2 et I_3. Involutions particulières I_2 admettant une conique d'involution Γ touchant C_4 en quatre points R: l'involution *fondamentale* des quadruples R correspondant aux différentes involutions particulières I_2 à conique d'involution. Le caractère particulier des involutions I_3 conjuguées aux involutions particulières I_2.

Kapteyn (J.-C.). — L'intensité lumineuse des étoiles fixes. (713-744).

1. Parallaxe moyenne des étoiles de magnitude et de mouvement propre données. 2. Probabilité pour que la parallaxe d'une étoile arbitraire surpasse sa valeur moyenne dans une proportion donnée. 3. Données pour le mouvement propre, la dimension et les nombres des étoiles de magnitude donnée. 4. Nombres des étoiles dont le mouvement propre se trouve entre des limites données. 5. Intensité de lumière et magnitude absolues. 6. Déduction de la densité des étoiles et de la courbe de l'intensité lumineuse. 7. Influence de l'incertitude par rapport aux valeurs de certaines constantes. 8. Le degré d'approximation des résultats déposés dans la courbe de l'intensité lumineuse. 9. Les étoiles du premier type spectral et celles du second.

Tome X; mai 1901-avril 1902.

Kapteyn (W.). — Sur des cas particuliers de l'équation différentielle de Monge. (13-15).

Autrefois [1], l'auteur s'est occupé du cas $s - \lambda t + \mu = 0$ de l'équation de Monge, maintenant il étudie le cas $r - \lambda t - \mu = 0$.

1. Si λ et μ ne dépendent que de p et q, l'équation ne possède deux intégrales intermédiaires que sous les conditions

$$\lambda = \frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gq + hq^2} = \frac{P}{Q}, \quad \mu = K\lambda, \quad hQ - cP = 0.$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIV$_2$, p. 175.

où K, a, b, c, f, g, h représentent des constantes, liées par la relation

$$b^2 - ac = g^2 - fh.$$

2. Si λ et μ ne dépendent que de x, y et z, l'équation ne possède deux intégrales intermédiaires que sous les conditions

$$\lambda = \frac{X}{Y}, \qquad \mu = \frac{1}{4} X^2 \left[\frac{2XX'' - 3X'^2}{X^4} - \frac{2YY'' - 3Y'^2}{Y^4} \right] z + \psi(x, y),$$

où X est une fonction de x et Y une fonction de y.

Dans ces deux cas l'auteur détermine les couples d'intégrales intermédiaires.

Schuh (*F.*). — Ondes lumineuses planes dans un milieu diélectrique homogène, électriquement et magnétiquement anisotrope. (74-90, 159-167).

Déduction des équations du champ électromagnétique. Les équations de la surface de l'onde, en coordonnées ordinaires et en coordonnées tangentielles. Étude des propriétés de cette surface.

Kapteyn (*W.*). — Une intégrale définie où entrent des fonctions de Bessel. (113-114).

Démonstration de la relation

$$\pi(m^2 - n^2) \int_0^\infty I_m(t) I_n(t) \frac{dt}{t} = 2 \sin \frac{1}{2}(m - n)\pi,$$

où $I_m(t)$ et $I_n(t)$ sont des fonctions de Bessel de première espèce et des ordres différents m, n et le cas particulier $m = n$

$$2n \int_0^\infty I_n^2(t) \frac{dt}{t} = 1.$$

Bes (*K.*). — Détermination analytique du neuvième point d'intersection de deux cubiques planes menées par huit points donnés. (115-118).

L'auteur exprime les coordonnées du neuvième point à l'aide de déterminants contenant les coordonnées des huit points donnés. Il remarque que le huitième point d'intersection de trois quadriques menées par sept points de l'espace se détermine d'une manière analogue.

Kamerlingh Onnes (*H.*). — Représentation de l'équation critique des gaz et des fluides par des séries. (136-158).

De Vries (*J.*). — Le nombre des coniques s'appuyant sur huit droites de l'espace. (192-195).

L'auteur démontre d'abord les deux théorèmes qui s'expriment dans la notation de la géométrie énumérative introduite par Schubert par les équations $P^2\nu^1 = 4$, $P\nu^6 = 18$. Ensuite il trouve $\nu^7 = 92$. La surface F_{92}, lieu des coniques s'appuyant sur 7 droites, contient au moins 1 [illegible] droites. Les résultats $\mu^2\nu^1 = 8$ et $\mu\nu^7 = 34$.

Gegenbauer (*L.*). — Contribution à la théorie des restes biquadratiques. (195-207).

Communication en rapport avec la fonction de Möbius-Mertens, destinée à compléter et à simplifier des travaux analogues de MM. Schering et Max Mandl.

Van Oss (*S.-L.*). — Le mouvement élémentaire de l'espace E_4 à quatre dimensions. (235-259).

L'auteur effectue d'une manière tout à fait géométrique la réduction du mouvement élémentaire de l'espace E_4 à deux rotations autour de deux plans, normaux l'un à l'autre, en s'appuyant sur la réduction connue du mouvement élémentaire de notre espace.

Schoute (*P.-H.*). — Considérations en rapport avec une configuration de Segre (239-250, 318-329).

Les propriétés de la configuration en question, trouvées en partie par MM. C. Segre, G. Castelnuovo et H.-W. Richmond, peuvent être résumées dans la forme suivante :

« Si α_1, α_{11}, α_{12}, α_{16} représentent quatre plans quelconques donnés de l'espace E_4 à quatre dimensions et que l'on détermine les plans α_{23}, α_{24}, α_{25}, α_{26} formant avec ces plans un double-quatre de plans

$$\left| \begin{matrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \end{matrix} \right|,$$

de manière que deux de ces huit plans admettent un point commun ou une droite commune selon que les deux symboles admettent ou n'admettent pas un indice commun, les quatre points d'intersection des éléments opposés du double-quatre, placés ici dans les mêmes colonnes, se trouvent dans un même plan α_{12}.

» En ajoutant ce plan α_{12} aux quatre plans donnés α_{13}, α_{14}, α_{15}, α_{16}, on obtient un quintuple de plans conjugués, jouissant de la propriété que chacun de ces cinq plans a la même signification par rapport aux quatre autres, celle du plan α_{12} par rapport aux quatre plans donnés.

» En complétant chaque quadruple de ce quintuple de plans à un double-quatre, on obtient en tout quinze plans $\alpha_{k,l}$, deux desquels admettent un point commun ou une droite commune, selon que leurs symboles ont ou n'ont pas un indice commun. Le déterminant symétrique des symboles $\alpha_{k,l}$, aux éléments fictifs α_{21}, α_{22}, ..., α_{16}, sans aucune signification, contient dans ses six lignes, et dans ses six colonnes, six quintuples de plans conjugués (p. 1). Chaque droite coupant quatre des cinq plans d'un même quintuple coupe aussi le cinquième.

» Chaque triple de plans (α_{14}, α_{25}, α_{36}) à trois droites d'intersection se trouve dans un même espace $E_{12,34,56}$ et passe par un même point $P_{123,456}$.

» Chaque sextuple de plans, composé de deux triples (α_{14}, α_{25}, α_{36}), (α_{14}, α_{56}, α_{23}) possédant la propriété que chaque plan de l'un coupe chaque plan de l'autre suivant une droite, admet un point $P_{123,456}$ commun aux six plans. Le nombre des points $P_{123,456}$ est dix.

» Un espace tridimensional quelconque E_3 coupe chacun des six quintuples conjugués (φ_i) suivant cinq droites admettant deux transversales communes b_i, c_i: les six couples de transversales (b_i, c_i) sont les couples d'éléments opposés d'un double-six d'une surface cubique S_3 dont les vingt-sept droites consistent en ces douze droites et ces quinze droites d'intersection de l'espace E_3 avec les plans α_{ij}.

» Le lieu des droites coupant à la fois les cinq plans d'un même quintuple est toujours le même espace courbe $E_{3,4}$ du troisième ordre et de la quatrième classe passant par les quinze plans α_{ij} (variété cubique de Segre); cet espace courbe contient donc six systèmes de droites doublement infinis. Les dix points $P_{123,456}$ sont des points doubles de cet espace courbe; les espaces coniques quadratiques de contact contiennent les sextuples de plans qui passent par ces points. Chaque espace $E_{12,34,56}$ coupe l'espace courbe suivant trois plans. L'intersection de l'espace E_3 avec l'espace courbe coïncide avec la surface cubique S_3 indiquée plus haut. »

Rapport entre les théorèmes énumérés et les recherches de G. Castelnuovo et de H.-W. Richmond. Digression sur la question sous quel rapport la configuration de Segre est unique.

Stein (*J.*), S. J. — Discussion de la critique de M. J.-C. Kapteyn sur la méthode de détermination de l'apex du mouvement solaire dû à Airy. (251-261).

Dans sa dernière Communication à l'Académie (*voir* Tome IX, pages 713-744) M. Kapteyn a prétendu que ni la méthode d'Airy, ni celle d'Argelander ne s'appuient entièrement sur l'hypothèse que les mouvements propres des étoiles fixes n'ont pas de prédilection pour une direction déterminée. Au contraire, d'après M. Stein, la méthode donnée par Airy est en accord parfait avec cette hypothèse, même quand on applique aux équations de condition la théorie des moindres carrés. De plus, d'après M. Stein, les conditions déduites de la méthode d'Airy par M. Kapteyn sont inexactes.

Kapteyn (*J.-C.*). — Réfutation de la critique de M. Stein. (262-272).

L'auteur réfute la critique de M. Stein en prétendant : 1° que les équations déduites par M. Stein ne prouvent rien contre ses considérations, et 2° que la critique directe de ses déductions est inexacte.

Keesom (*W.-H.*). — Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (331-345, 782-792).

V. La dépendance des constantes du point de plissement et de la teneur des mélanges binaires dans le cas où une des deux substances prévaut.

VI. L'accroissement de la pression par la condensation d'une substance mêlée à une petite quantité d'une autre substance.

De Vries (J.). — Une formule pour le volume du prismoïde. (372-374).

L'auteur remplace la formule usuelle

$$V = \frac{1}{6} h (S + I + 4M)$$

par

$$V = \frac{1}{6} h \left[\frac{2p - q}{p} S - \frac{2q - p}{q} I + \frac{(p + q)^2}{pq} M_q \right]$$

où M_q représente l'aire de la section parallèle, dont les distances aux faces supérieure S et inférieure I sont entre elles comme p et q. Il en déduit les deux cas particuliers

$$V = \frac{1}{4} h [I + 3M_{\frac{2}{3}}], \qquad V = \frac{1}{2} h \left[M_{\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + M_{\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} \right].$$

Vaes (F.-J.). — Décomposition en facteurs. (374-384, 474-486, 623-631).

En 1643, Fermat décomposa un nombre proposé par Mersenne. Dans une lettre, datée « Toulouse, le 7 avril », on trouve : « Vous me demandez si le nombre 100895598169 est premier ou non, et une méthode pour découvrir, dans l'espace d'un jour, s'il est premier ou composé. A cette question je réponds que le nombre est composé et se fait du produit de ces deux : 898423 et 112303 qui sont premiers. » Au contraire en 1640 Fermat croyait encore que $2^{2^n} + 1$ donne des nombres premiers pour *toutes* les valeurs de n, tandis que, presque un siècle plus tard, Euler trouvait que le nombre $2^{32} + 1$ de dix chiffres est décomposable en 641 et 6700417. Si, en 1643, Fermat était en possession d'une méthode qui lui permît de décomposer un nombre de douze chiffres, pourquoi ne l'appliquait-il pas à ce nombre de dix chiffres? M. Vaes, qui publie dans ce Mémoire un petit code d'algorithmes pour la décomposition de nombres considérables, est porté à croire que Fermat ne possédait qu'une méthode spéciale applicable à des nombres particuliers et que, d'avance, il avait imposé une condition limitante aux nombres qu'on lui proposerait. Peut-être la correspondance entre Fermat et Mersenne donnera des indications là-dessus et dans ce cas elle apprendra en même temps si parfois une des méthodes développées ici ait quelque ressemblance avec la méthode originale de Fermat.

Sommaire : Introduction. 1. Détermination des différences des carrés. 2. Classification de la série naturelle des nombres d'après leur décomposabilité. 3. Détermination de non-diviseurs. 4. Détermination de la différence des facteurs. 5. Méthode des résidus. 6. Essayage des diviseurs. 7. Calcul du nombre des

opérations. 8, 9. Emploi de la série 1, 3, 5. 10. Abréviation de la première méthode en des cas particuliers. 11. Le facteur adjoint. 12. Application des résultats de la théorie des nombres. 13. Abréviation de la première méthode. 14. Propriétés de a^2 et b^2.

Du Bois (*H.-E.-J.-G.*). — Toupies asymétriques polarisées. (415-431, 504-520).

On ne connaît pas une solution générale du problème : « Déterminer le mouvement de rotation pure, exempt de glissement, d'un corps solide asymétrique polarisé, autour de son centre de gravité, quand il se trouve dans un champ uniformément dirigeant. » Plusieurs mathématiciens (Sonja Kowalewski, R. Liouville, T. Levi-Cività, N. Jonkovsky, W. Hess, O. Staude) se sont, il est vrai, occupés de problèmes analogues, et ont étudié des cas très particuliers, plus ou moins intégrables. Ces considérations, pour la plupart très ingénieuses et admirables, n'ont toutefois que peu d'importance pour des projets physiques, à l'exception des recherches de Staude (*Journal de Crelle*, t. 113, 1894, p. 318), qui ne se caractérisent pas par une spécialisation trop limitante. Récemment l'auteur s'est occupé du cas de la toupie magnétocinétique (*Archives néerlandaises*, série II, t. V, p. 242, t. VI, p. 581). Dans la dernière de ces deux publications il s'est servi de quelques formules dont il fait suivre ici la démonstration. Il considère d'abord le cas où la position initiale de l'axe OZ de l'ellipsoïde central d'inertie coïncide avec la direction du champ et suppose que la composante M_z du moment de polarisation suivant cet axe s'annule, de manière que l'on n'a affaire qu'à une polarisation équatoriale dans le plan XOY mobile avec la toupie. L'action résultante du champ magnétique est décomposée en une influence isopériodique et une influence adiabatique. Ensuite l'auteur étudie le cas, où l'axe d'inertie OZ est normal à la direction du champ. Influence isocinétique et adiabatique du champ. Phénomènes d'induction dans le cas d'un essaim de toupies indépendantes les unes des autres.

Kluyver (*J.-C.*) et *Kapteyn* (*W.*). — Rapport sur un Mémoire de M. K. Bes intitulé : *Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à n + 1 variables.* (446-447).

Kapteyn (*W.*). — L'équation différentielle de Monge. (466-468).

Étude du cas particulier $r - \lambda^2 t + \mu = 0$ sans conditions limitantes par rapport aux fonctions λ et μ. Indication du cas unique où l'on trouve deux intégrales intermédiaires. Si c, h, v, ρ indiquent les fonctions $c(x), h(y), v(x,y,z)$, $\rho(v)$ et que l'on détermine par G et H les opérations

$$G = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad H = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z},$$

il faut que

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad \mu = \lambda^2 Q_1 - P_1.$$

où l'on a

$$P = \frac{c^2 G^2(c) - 1}{cv^2}, \qquad Q = \frac{h^2 H^2(c) - 1}{hv^2},$$

$$P_1 = \frac{\rho'}{\rho}\frac{c_3}{c} P - \frac{c_1}{cv_3} G(c) - \frac{1}{v} G G(c),$$

$$-Q_1 = \frac{\rho_1}{\rho}\frac{c_3}{h} Q + \frac{h_3}{hv_3} H(c) - \frac{1}{v} H H(c),$$

les indices 1, 2, 3 indiquant des différentiations des fonctions c, h, v par rapport à x, y, z. Indication des deux intégrales intermédiaires.

Kluyver (*J.-C.*). — Série de polynomes. (530-544, 647-664).

On a tâché de déduire d'une série de puissances donnée, représentant une fonction analytique $F(x)$ à l'intérieur d'un cercle de convergence déterminé, d'autres développements de cette fonction, admettant une autre région de convergence. D'abord une autre série de puissances s'est présentée; cependant, cette nouvelle série entraîne le désavantage que chacun de ses coefficients dépend de tous les coefficients de la série originale. Au contraire, on désire que le terme d'ordre n du nouveau développement soit parfaitement déterminé par les premiers n termes de la série donnée. A cette condition satisfait le développement de $F(x)$ en une série de polynomes, d'après les notions introduites par M. Mittag-Leffler: aujourd'hui on peut trouver, comme l'on sait, pour chaque fonction un nombre infini de développements différents de ce caractère. Ici M. Kluyver s'est proposé de faire connaître une déduction simple de ces séries de polynomes et d'y joindre quelques exemples simples en faisant ressortir les conditions d'existence. Chemin faisant il introduit une notion nouvelle, celle de la *marque de convergence* d'un développement en un certain point, quantité qui reste comprise entre zéro et l'unité, d'après sa définition. Applications : L'auteur trouve

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x(a-1)}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1-x(a-1)}{a}\right]^{m-1},$$

$$\operatorname{arc\,tang} x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^{m}} \sum_{h=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (m-1)_h \frac{(-1)^h}{2h+1} x^{2h+1} (a-1)^{h+1}.$$

Dans la seconde partie M. Kluyver déduit d'autres régions de convergence, qui se sont présentées aussi dans les recherches de M. Borel. Ainsi il trouve

$$\operatorname{arc\,tang} x = x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^{m}} \sum_{h=1}^{m} (m-1)_h (-1)^h \frac{x^{2h-1}}{2h-1} (a-1)^h,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-p)^m \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{x}{\log(1-p)}\right]^h \frac{D_t^m \log^h t}{m!}.$$

Enfin M. Kluyver déduit une série de polynomes, réellement convergente en

tout point x de l'étoile de M. Mittag-Leffler, n'admettant une convergence infiniment lente qu'en des points des rayons de cette étoile.

Van der Waals (*J.-D.*). — Systèmes ternaires. (544-660, 665-686, 862-876).

1. Le principe de continuité chez les systèmes ternaires. 2. Relation entre le volume, la composition et la température pour des phases coexistantes d'un système ternaire. 3. Relation entre la pression, la composition et la température pour des phases coexistantes d'un système ternaire.

Discussion de l'équation.

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} v_{21}dp - W_{21}\frac{dT}{T} &+ \left\{(x_2 - x_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + (y_2 - y_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1\partial y_1}\right\}dx_1 \\ &+ \left\{(x_2 - x_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1\partial y_1} + (y_2 - y_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1^2}\right\}dy_1. \end{aligned} \right.$$

A. Le cas $x_1 =$ const, $y_1 =$ const. donnant

$$T\left(\frac{dp}{dT}\right)_{x_1, y_1} = \frac{W_{21}}{v_{21}}.$$

A suivre.

Cardinaal (*J.*). — Sur le mouvement de systèmes variables. (566-566, 687-691).

Dans le cas de systèmes qui varient projectivement, l'auteur construit le point A admettant une direction donnée de vitesse et le plan focal de ce point; ensuite il s'occupe des problèmes inverses, où il s'agit de trouver la direction de vitesse et le plan focal d'un point donné A, et le foyer et la direction de vitesse de ce foyer d'un plan donné α. Il considère les trois cas principaux de réalité du tétraèdre momentané PQRS des points de coïncidence. Dans la première partie ses constructions sont indépendantes de la grandeur des vitesses. Dans la seconde partie l'auteur fait connaître plusieurs constructions où entre non seulement la direction mais aussi la grandeur des vitesses des points du système. Ses résultats s'accordent avec ceux obtenus récemment par M. L. Burmester; il y a seulement divergence de démonstration.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — La relation entre la clarté d'un point lumineux et les moments où on le voit apparaître ou disparaître. (631-634).

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Rapport provisoire, au nom de MM. W.-H. Julius, J.-H. Wilterdink et A.-A. Nyland, de l'expédition néerlandaise à Karang Sago (île de Sumatra) pour l'observation de l'éclipse du Soleil du 18 mai 1901. (692-713, 2 planches).

De Vries (*J.*). — Lignes droites sur des surfaces à droites multiples. (742-748).

Une surface S^n d'ordre n à une droite l de multiplicité $n-2$ contient $3n-4$ couples de droites simples formant avec l autant de triangles; pour $n > 8$, elle peut être menée par quatre droites croisant l.

Une surface S^{m+n+1} à droites m, n de multiplicités m, n admet $2mn+m+n-1$ droites simples s'appuyant sur m, n.

Une surface S^{l+m+n} à droites l, m, n de multiplicités l, m, n. Cas particuliers.

Gegenbauer (*L.*). — Sur des intégrales contenant des fonctions de Bessel. (748-752).

Cette communication du professeur de Vienne fait connaître des généralisations de quelques résultats de M. W. Kapteyn.

Van Laar (*J.-J.*). — L'asymétrie de la courbe électrocapillaire. (753-768).

Lorentz (*H.-A.*). — La rotation du plan de polarisation dans les corps en mouvement. (793-808).

Dans son : *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Korpern* (1), paru à Leyde en 1895, l'auteur s'est occupé de la propagation de la lumière à travers des corps transparents, se mouvant avec une vitesse $\mathfrak{p}$ dans l'éther supposé en repos, en se demandant si ce mouvement peut influencer les divers phénomènes optiques. Cette question resta indécise quant à la rotation du plan de polarisation dans les substances optiquement actives; mais l'auteur put déduire en partie, à l'aide de certains principes généraux (la forme linéaire des équations, l'isotropie et la réversibilité des mouvements), la relation entre la force électrique $\mathfrak{E}$ et le mouvement électrique $\mathfrak{M}$; seulement, à côté du coefficient j faisant connaître la rotation du plan de polarisation dans le milieu en repos, la formule obtenue contenait encore un second coefficient k qui ne se présente que dans le cas d'une translation, et la valeur de cette constante k s'opposait à toute détermination. L'équation en question est

$$\mathfrak{E} = \sigma \mathfrak{M} + j \operatorname{Rot} \mathfrak{M} + k\,[\mathfrak{M}, \mathfrak{p}],$$

de manière que la rotation ω du plan de polarisation par unité de longueur s'élevait à

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 j \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \left(1 - \frac{W\mathfrak{p}_x}{c^2}\right) j + \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 W\mathfrak{p}_x k.$$

---

(1) *Essai d'une théorie des phénomènes électriques et optiques dans les corps en mouvement.*

à mesure que le milieu est en repos ou qu'il y a une translation dans la direction de l'axe des x, et que la lumière se propage dans la même direction. Dans son étude : *Aether and Matter*, M. Larmor parvient à un résultat différent ; d'après lui, la théorie mène à la conclusion qu'une translation n'influence pas la rotation du plan de polarisation et la divergence des résultats est due à une erreur commise par M. Lorentz. De son côté, M. Lorentz, au contraire, maintient ici, après une investigation nouvelle, les formules que nous venons d'indiquer; d'après lui les formules de M. Larmor se réduisent à celles-ci en y posant $k = 0$, de sorte que M. Larmor se trompe en croyant que le montant de la rotation ne contient pas la première partie de l'expression citée qui dépend de $\mathfrak{p}$. Cela posé, l'auteur s'occupe de deux questions particulières, en rapport avec un milieu se trouvant en des conditions déterminées très simples. D'abord il démontre que, même avec ces suppositions simplifiantes, il se présente une rotation du plan de polarisation; ensuite il discute le mécanisme de ce mouvement.

Lorentz (*H.-A.*). — Considérations sur les théorèmes fondamentaux de la Mécanique, en rapport avec l'œuvre de Hertz : *Die Prinzipien der Mechanik* (Les Principes de la Mécanique). (876-895).

Dans son dernier Ouvrage Hertz a déduit d'une manière admirable toute la Mécanique d'un seul principe qui, par sa forme bien simple, nous rappelle les lois de mouvement de Newton, c'est-à-dire la loi fondamentale d'après laquelle chaque système matériel se meut avec une vitesse invariable le long d'une trajectoire aussi droite que possible. Il y réussit en introduisant, à l'aide d'une terminologie très analogue aux manières de s'exprimer en usage dans la géométrie polydimensionale, l'hypothèse qu'à côté des masses visibles des masses invisibles pour nous participent au mouvement. A l'hypothèse indiquée sont dues à la fois la grande importance de l'œuvre de Hertz pour la physique théorique et la divergence d'opinion des savants sur sa valeur. En effet, la question de savoir si la représentation des mouvements occultes peut aboutir à une explication simple et satisfaisante des phénomènes de la nature admet des solutions subjectives et, par là même, divergentes; au contraire personne ne saurait douter des avantages importants, au point de vue théorique, de la concision, de la rédaction et de la clarté de la représentation, obtenus en faisant usage du langage de la géométrie polydimensionale. Ainsi M. Lorentz s'est proposé d'examiner s'il est possible de garder ces avantages, tout en se délivrant de l'hypothèse des mouvements occultes, et en ne se servant que de la notion ordinaire de force généralement admise dans la Mécanique. Pour faciliter l'étude de son Mémoire il a gardé beaucoup de ce qui se trouve déjà chez Hertz ; comme l'a remarqué Hertz lui-même, sa méthode s'adapte aux publications antérieures de Beltrami, Lipschitz et Darboux.

Tome XI; mai 1902, avril 1903.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — In memoriam, V.-A. Julius. (3-5).

Keesom (*W.-H.*). — Réductions d'équations d'observations contenant plus d'une quantité mesurée. (13-18).

Dans la plupart des manuels du calcul des probabilités et de la méthode des moindres carrés, il s'agit de la réduction d'équations d'observation, où ne figure qu'une quantité unique observée. Au contraire, dans la Physique, on a affaire a un système d'équations d'observation à plusieurs quantités mesurées, admettant autant d'erreurs fortuites : par exemple, si l'on a mesuré la pression d'un gaz ou d'un fluide à des volumes et des températures différents et que l'on veut en déduire la valeur la plus probable pour cette substance. L'auteur, n'ayant pas eu l'occasion de consulter la littérature du sujet (Ch. H. Kummell, Merriman, J. Andrade, Ravenshaer, Pearson, etc.), s'occupe ici de la solution générale du problème posé.

Van de Sande Bakhuyzen (*E.-F.*). — Sur la périodicité annuelle dans la marche du pendule principal Hohwü n° 17 de l'Observatoire de Leyde. (19-42, 187-209, 357-368, 1 planche).

Schoute (*P.-H.*). — Sur le rapport entre les plans de position des angles formés par deux espaces E_n de n dimensions, admettant un point commun P et des systèmes incidents d'espaces. (52-56).

Dans le cas particulier où deux espaces E_n^1, E_n^2 au point commun P forment entre eux n angles de position egaux, chaque droite d_∞ à distance infinie rencontrant trois des quatre espaces à l'infini E_{n-1}^1, E_{n-1}^2, $E_{n-1}^{1'}$, $E_{n-1}^{2'}$, dont E_{n-1}^1, E_{n-1}^2 contiennent les points à l'infini de E_n^1, E_n^2, tandis que $E_{n-1}^{1'}$, $E_{n-1}^{2'}$ leur sont orthogonalement conjugués, rencontre aussi le quatrième. Alors ces droites en nombre infini de multiplicité n rencontrent non seulement les quatre espaces E_{n-1} indiqués mais un espace quelconque E_{n-1} d'un système simplement infini dont ces quatre espaces font partie. Et entre ces systemes il existe la relation que le plan déterminé par P et une droite quelconque d_∞ du système de droites est plan de position par rapport au couple des deux espaces E_n passant par P et un couple quelconque de deux espaces E_{n-1} du système des espaces E_{n-1}.

Van der Waals (*J.-D.*). — Electromécanique statistique. (79-88, 243-249).

Dans son dernier Ouvrage : *Elementary Principles in Statistical Mechanics*,

J.-W. Gibbs fait connaître les principes d'une science nouvelle, qui mérite d'être étudiée à cause de la simplicité des lois qui la gouvernent. Ces lois ont trait à la conduite d'un grand nombre de systèmes, indépendants les uns des autres dans leurs mouvements, s'accordant l'un à l'autre d'après leur nature et ne différant que par les valeurs des constantes introduites par la solution des équations différentielles du mouvement ou bien par les valeurs des coordonnées générales et de leurs dérivées à un moment déterminé. Les lois auxquelles obéissent de tels exemples de systèmes sont d'une nature très générale; seulement leur application est bornée à des systèmes formés exclusivement de matière pondérable. L'auteur de la présente Note se pose donc la question de savoir si des considérations analogues ne s'appliquent pas aux systèmes électromagnétiques, ce qui pourrait mener à une extension de notre connaissance, encore si incomplète, des phénomènes de rayonnement envisagés comme des phénomènes thermodynamiques. Cependant, on ne saurait nier qu'il est imprudent d'attacher trop d'importance à cet ordre d'idées. La plupart des théorèmes déduits par Gibbs sont valables principalement pour ces ensembles de systèmes qu'il nomme *canoniques* et dont la considération se présente au premier plan, parce qu'ils se caractérisent par la distribution stationnaire la plus simple des systèmes par rapport aux phases différentes. Or, la simplicité mathématique est un mauvais critère lorsqu'il s'agit de ce qui se passe dans la nature. Ainsi, d'après la théorie mathématique, le mouvement d'une corde vibrante est le mouvement sinusoïdal, tandis que nous sommes dans l'erreur en croyant que chaque corde vibrante se meut de cette manière. Des erreurs semblables s'attachent à l'hypothèse que tous les systèmes de la nature suivent les lois déduites dans la supposition d'une distribution canonique des systèmes d'un ensemble. Ajoutons que, dans les Chapitres XI et XIII de son œuvre, Gibbs démontre en effet que la distribution canonique est la distribution la plus probable, pourvu que l'ensemble ne satisfasse qu'à la condition que la valeur moyenne de l'énergie des systèmes soit constante. Toutefois, dans plusieurs cas, il est bien difficile de décider si cette condition est en effet une condition unique. Ainsi des systèmes composés d'un certain nombre de molécules sphériques égales n'admettent pas la distribution canonique; car de plus ils satisfont à la condition que la distance des centres de deux molécules ne s'abaisse pas au delà du diamètre. Donc, l'hypothèse de la distribution canonique exige ici que l'on néglige les dimensions des molécules et peut-être encore plus. Néanmoins des considérations pareilles peuvent être utiles, d'abord sur le terrain *connu* de la Thermodynamique, parce qu'elles en unissent d'une manière assez simple toutes les lois différentes sous un même point de vue et ensuite sur des terrains *inconnus*, parce qu'ici elles peuvent mener à des formules dont la comparaison *a posteriori* avec les expériences pourra décider sur la validité de l'hypothèse fondamentale. 1. Loi de la conservation de la densité des phases. 2. La distribution quasi-canonique. 3. La distribution de l'énergie par rapport aux durées des vibrations des ensembles quasi-canoniques.

Van der Waals (*J.-D.*). — Systèmes ternaires. (88-109, 224-243).

B. Le cas T = const. et l'équation

$$v_{21}\,dp = (x_2 - x_1)\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}\,dx_1$$

d'un système binaire. *a.* Courbes d'égale pression. *b.* Déplacement des courbes d'égale pression, si la pression varie. *c.* Lignes de pente et enveloppes de cordes. *d.* Adjonction d'une troisième composante au système binaire.

Verschaffelt (*J.-E.*). — Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (255-269, 328-342, 663-667, 1 planche).

VII. L'équation d'état et la surface ψ à la proximité immédiate de l'état critique pour des mélanges binaires, dans le cas où l'une des deux substances ne se présente qu'en quantité faible.

Introduction. 1. Le diagramme (p, v, T) d'une substance simple à proximité du point critique. 2. Le diagramme (p, v, T) d'un mélange, à proportion de mélange x très petite, à proximité du point critique du mélange indécomposé. Le diagramme (p, v, x) de mélanges à petite x et à une température peu différente de T_k. 4. La surface ψ représentée par l'équation

$$\psi = -m_0(v - v') - \frac{1}{2} m_1 (v - v')^2 - \frac{1}{3} m_2 (v - v')^3 - \ldots + RT\left(x \log x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \ldots\right)$$

où v' indique le volume à la température T_k. 5. Les phases coexistantes. 6. Le point de plissement. 7. La courbe limite dans le diagramme (p, v, x). 8. La projection de la courbe connodale sur le plan (x, v). 9. Le point de contact critique. 10. La courbe limite et la ligne connodale pour des cas particuliers. 11. La courbe limite dans le diagramme (p, v, T) pour un mélange de concentration x. 12. La condensation. 13. Le diagramme (p, T). *a.* La ligne de tension de vapeur de la matière pure. *b.* La ligne des points de plissement. *c.* La courbe des points de contact critiques. *d.* Les courbes limites. 14. Suite du 9 : le point de contact critique. 15. La surface ψ à la proximité immédiate du point de plissement. 16. Application à une équation particulière. Dans les derniers numéros l'auteur déduit de son côté les résultats de M. Korteweg (*voir* plus loin, ce Tome, p. 515).

Cardinaal (*J.*). — Rapport sur la commémoration solennelle du centième anniversaire de Niels Henrik Abel à Christiania, du 4 au 7 septembre 1902. (274-276).

Bakhuis Roozeboom (*H.-W.*). — Représentation dans l'espace des régions des phases et de leurs complexes pour des systèmes binaires où les composantes n'apparaissent qu'en phase fixe. (276-279, 1 planche).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur les conditions de l'existence

d'une température critique minima pour un système ternaire. (285-294).

Déjà, dans sa *Théorie moléculaire*, l'auteur a fait connaître la condition de l'existence d'une température critique minima d'un système binaire. Si T_{cr} représente la température pour laquelle l'isotherme possède un maximum et un minimum coïncidant, on a $RT_{cr} = \frac{8}{27}\frac{a_r}{b_r}$, ce qui nous amène à chercher la valeur de x pour laquelle le quotient $\frac{a_r}{b_r}$ est minimum. Ainsi, dans le cas d'un système ternaire, où l'on a affaire à deux facteurs de proportionnalité x, y, on peut chercher la valeur minimale de $\frac{a_{xy}}{b_{xy}} = q$ et examiner les deux conditions $\frac{dq}{dx} = 0$ et $\frac{dq}{dy} = 0$. Cependant l'auteur se sert ici d'une autre méthode, très connue en Algèbre, se basant sur la détermination élémentaire de la valeur minimale de la fraction

$$\frac{a_1x^2 + 2a_{12}x + a_2}{b_1x^2 + 2b_{12}x + b_2} = \lambda,$$

à l'aide de la condition que dans cette équation x soit réelle. D'abord il applique cette méthode à l'équation

$$\frac{a_1(1-x)^2 + 2a_{12}(1-x)x + a_2x^2}{b_1(1-x)^2 + 2b_{12}(1-x)x + b_2x^2} = \lambda$$

des systèmes binaires, et ensuite à l'équation correspondante des systèmes ternaires, où le numérateur et le dénominateur ont pris en a et b la forme

$$c_1(1-x-y)^2 + 2c_{12}(1-x-y)x + 2c_{13}(1-x-y)y + c_{22}x^2 + 2c_{23}xy + c_{33}y^2.$$

Il trouve ainsi neuf conditions pour qu'il y ait une valeur minimale de λ correspondant à des valeurs positives de $1-x-y$, x, y, c'est-à-dire trois équations $(a_{i,j} - \lambda b_{i,j})(a_{i,k} - \lambda b_{i,k}) > (a_{i,j} - \lambda b_{i,j})(a_{i,k} - \lambda b_{i,k})$, tandis que λ doit satisfaire à l'équation séculaire

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda b_1 & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_2 - \lambda b_2 & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_3 - \lambda b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lorentz (*H.-A.*). — Les équations fondamentales des phénomènes électromagnétiques dans les corps pondérables, déduites de la théorie des électrons. (305-318).

La théorie qui veut expliquer, à l'aide des particules à charge électrique, les électrons, tous les phénomènes électromagnétiques, pour autant qu'ils n'ont pas lieu dans l'éther libre, se base sur deux espèces d'équations : d'abord sur les relations qui déterminent les changements d'état de l'éther, et ensuite sur les formules indiquant les forces que l'éther exerce sur les électrons. A l'aide d'hy-

pothèses sur les électrons contenus dans les corps divers et sur les forces que la matière pondérable exerce sur ces particules, cette théorie s'efforce de rendre compte des phénomènes observés sur les matières diélectriques, les conducteurs et les matières capables d'être magnétisées. Dans des recherches antérieures, l'auteur a démontré que les lois de l'électrostatique et de l'électrodynamique, tout comme celles des courants électriques d'induction, peuvent être déduites de ces formules fondamentales; de plus, il a appliqué la théorie à la propagation de la lumière dans des matières transparentes se mouvant avec une vitesse constante à travers l'éther supposé en repos. Ici il veut faire voir comment on peut obtenir, pour des corps de nature quelconque, se mouvant d'une manière quelconque, des équations où il n'est plus question d'électrons, parce qu'elles ne contiennent que des quantités en rapport avec les parties observables des corps que l'on peut déterminer par l'expérience. Les considérations et les résultats sont liés intimement à ceux exposés par M. Poincaré dans la seconde édition de son *Électricité et Optique*, quoiqu'il y ait beaucoup de différence dans la méthode d'exposition. L'auteur distingue : *a*. Des électrons de conduction; *b*. Des électrons de polarisation; *c*. Des électrons de magnétisation.

Schoute (*P.-H.*) et *Kortewegh* (*D.-J.*). — Rapport sur un Mémoire de M. W.-A. Versluys intitulé : *Focales de courbes planes et gauches*. (373-374).

Van der Waals (*J.-D.*). — Quelques remarques sur la marche de la transformation moléculaire. (391-395).

Van der Waals (*J.-D.*). — Phénomènes critiques des liquides partiellement mélangeables. (396-400).

Van Oss (*S.-L.*). — Cinq rotations en équilibre dans l'espace quadridimensional E_4. (424-426).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre se présente, c'est que les intersections des cinq plans de rotation par chacun des trois espaces ne passant pas par un même plan forment cinq rayons d'une même congruence (1, 1).

Weeder (*J.*). — L'interpolation basée sur une condition de minimum. (434-444).

Une quantité variable, par exemple la correction d'un pendule astronomique, a été observée pendant longtemps, à des moments séparés par des intervalles de temps inégaux; comment doit-on déduire de ces données la valeur la plus probable de cette quantité à un moment déterminé? Si I désigne l'indication du pendule à l'époque t, l'auteur s'est laissé conduire par la condition

$$\int_a^t \left(\frac{d^2 I}{dt^2}\right)^2 dt = \text{minimum}.$$

Application de ces résultats théoriques à un exemple : la marche du pendule

principal Hohwü, n° 17, de l'Observatoire de Leyde, durant la période du 8 juin au 30 août 1890.

Cardinaal (*J.*). — Sur la représentation géométrique du mouvement de systèmes variables. (166-171).

Dans deux communications antérieures (*voir* plus haut, t. X, p. 560 et 687), l'auteur a développé plusieurs théorèmes se rapportant au mouvement de systèmes variables; ici il s'occupe de la représentation géométrique de ce mouvement, traitée par M. R. Sturm (*Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, t. I, p. 257). Le complexe tétraédral des directions des vitesses des points du système en mouvement et les rayons du système focal correspondant, formé par les normales aux trajectoires des points du système, dans le cas d'un système invariable en mouvement, et dans le cas d'un système projectivement variable, exigent la plus grande partie des développements. La congruence (1, 2) qui forme l'intersection du complexe et du système focal. Cas particuliers.

Korteweg (*D.-J.*). — Les points de plissement et les plis correspondant à la proximité du bord de la surface ψ de Van der Waals. (515-535, 1 planche).

I. Partie descriptive donnant un aperçu des résultats.

1. Comme on le sait, le bord $x = 0$ de la surface ψ, représentée par

$$(1)\qquad -\psi = \frac{a_x}{v} + \mathrm{MRT}\{\log(v - b_x) - x\log x - (1 - x)\log(1 - x)\}$$

où

$$(2)\qquad \begin{cases} a_x = a_1(1-x)^2 + 2a_{12}x(1-x) + a_2x^2 \\ \quad = a_1 + 2(a_{12} - a_1)x + (a_2 - 2a_{12} + a_1)x^2, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} b_x = b_1(1-x)^2 + 2b_{12}x(1-x) + b_2x^2 \\ \quad = b_1 + 2(b_{12} - b_1)x + (b_2 - 2b_{12} + b_1)x^2. \end{cases}$$

ne porte un point de plissement que si la température T est égale à la température critique T_k de la substance principale; dans ce cas le point de plissement se présente toujours. Alors ce point coïncide avec le point critique de la substance principale pour laquelle on a $v = 3b$. En indiquant dans la projection (v, x) de parties du bord $x = 0$ de la surface ψ ce point critique du bord par K et le point de plissement correspondant, où se touchent les courbes connodale et spinodale, par P, l'auteur distingue huit cas théoriques d'après que :

(α). Ces courbes tournent vers l'axe des v le côté convexe ou le côté concave.

(β). La tangente commune en P à ces courbes a un coefficient angulaire positif ou négatif.

(γ). La droite KP a un coefficient angulaire positif ou négatif.

Ainsi la question se pose : dans quelles circonstances chacun de ces huit cas

théoriques se présente-t-il, si l'on a affaire à un mélange binaire, à une substance prédominante, pour lequel la petitesse de x permet de se servir d'approximations, vérifiant les conditions connues de validité connues de l'équation (1)?

2. On trouve que les deux grandeurs y et z, déterminées par les équations

$$a_{12} = a_1 y, \qquad b_{12} = b_1 z,$$

décident exclusivement quel cas se présentera. Ainsi, après avoir indiqué le caractère des huit cas 1, 2, ..., 8 par la remarque que ces cas se divisent dans les groupes

$$(1234,\ 5678),\quad (1256,\ 3478),\quad (1357,\ 2468)$$

par rapport aux bifurcations (α), (β), (γ), on peut indiquer dans un diagramme par rapport à un système de coordonnées (y, z), au moyen de chiffres correspondant aux numéros des cas, où se trouvent les points correspondant aux systèmes de valeurs (y, z) appartenant à un quelconque des huit cas théoriques.

3. Un des cas théoriques, le cas 8, fait défaut ; les sept autres cas se présentent tous.

4. Le point $y = 1$, $z = 1$ est un point remarquable du diagramme, où six des sept champs se rencontrent.

5. Les diverses parties de la représentation n'ont pas le même degré d'importance. Tout ce qui se trouve au delà de l'axe $y = 0$ se rapporte à des valeurs négatives de a_{12}, c'est-à-dire au cas où les molécules des deux substances se repoussent, ce qui est bien improbable. De même les points au delà de l'axe $z = 0$ n'ont probablement qu'une signification mathématique.

6. La courbe qui correspond à la première des trois alternatives est la parabole

$$(2z - 3y + 1)^2 = 8(z - y),$$

les champs 1, 2, 3, 4 se trouvant à l'extérieur et les champs 5, 6, 7 à l'intérieur.

7. La ligne de séparation des champs 1, 2, 5, 6 et 3, 4, 7 est la droite

$$2z - 3y + 1 = 0.$$

8. La courbe de séparation des champs 1, 3, 5, 7 et 2, 4, 6 est la cubique

$$(2z - 3y + 1)^3 - 4(4z - 3y - 1)(2z - 3y - 1) - 16(z - 1) = 0.$$

La partie descriptive illustrée d'une planche en plusieurs couleurs se termine par l'énumération de quelques formules en rapport avec des recherches de MM. Keesom et J.-E. Verschaffelt.

II. Partie démonstrative contenant la démonstration des résultats communiqués.

1. Déformation de la surface ψ et développement préparatoire en série. 2. Détermination analytique d'un point de plissement et classification des différents cas possibles. 3. La courbe spinodale. 4. Les deux premières relations connodales. Équation de la courbe connodale. 5. La troisième relation connodale. 6. Deuxième approximation de la première relation connodale. 7. Réduction continuée de la troisième relation connodale. Déduction d'une équation. 8. Nouvelle détermination du point de plissement.

Du Bois (*H.-E.-J.-G.*). — L'auto-induction négative. (550-555).

De Vries (*J.*). — Les sphères de Monge de faisceaux de quadriques. (618-621).

Les sphères orthoptiques des quadriques d'un faisceau ordinaire forment un système à indice 3, ce qui veut dire qu'un point quelconque de l'espace se trouve sur trois de ces sphères. Ce système admet une sphère orthogonale, contenant toutes les sphères de rayon zéro du système, les sommets des quatre cônes du faisceau de quadriques, les centres des deux hyperboloïdes équilatéraux. Le lieu du centre des sphères du système est une cubique gauche.

En second lieu, l'auteur considère un faisceau tangentiel de quadriques. Les sphères orthoptiques de ce faisceau tangentiel forment un faisceau contenant les points sphères à rayon zéro correspondant à deux hyperboloïdes équilatéraux et le plan correspondant au paraboloïde du faisceau.

Van der Waals Jr (*J.-D.*). — La variabilité de la quantité b de l'équation d'état avec la densité. (640-649).

De plusieurs manières, on a démontré que l'influence de l'extension des molécules sur la forme de l'équation d'état, dans le cas de molécules sphériques parfaitement dures et élastiques, se traduit dans une première approximation par une diminution du volume V du gaz de quatre fois le volume des molécules. En appelant une sphère concentrique à la molécule et de rayon double *la sphère distantielle* de la molécule, on peut donc dire tout aussi bien qu'il faut diminuer V de la moitié du volume total des sphères distantielles, quantité indiquée ordinairement par b, ou, si l'on fait attention aux variations provenant du changement de densité, par b_∞. L'influence d'une seconde approximation, où l'on tient compte des secteurs communs à deux sphères distantielles, a été évaluée par M. Van der Waals (père) à $\frac{17}{32}\frac{b_\infty^2}{V}$ et par M. Boltzmann à $\frac{3}{8}\frac{b_\infty^2}{V}$. Ici, M. Van der Waals (fils) montre que la valeur $\frac{17}{32}\frac{b_\infty^2}{V}$ est à rejeter; il déduit par une méthode plus simple la valeur $\frac{3}{8}\frac{b_\infty^2}{V}$.

Schoute (*P.-H.*). — Relations entre les diagonales des parallélotopes. (683-686).

L'auteur veut montrer, par un exemple extrêmement simple, comment des considérations de géométrie polydimensionale peuvent mener à des théorèmes

de stéréométrie. Il remarque que les *parallélotopes*, continuant dans les espaces polydimensionaux la série connue : *segment de droite, parallélogramme, parallélépipède,* ont un nombre d de diagonales centrales qui se dédouble si le nombre n des dimensions augmente d'une unité, tandis que le nombre g des constantes dont dépend la figure, quoique d'abord plus grande que d, ne croît pas aussi vite, comme l'indique la petite table suivante, contenant les valeurs correspondantes de n, d, g de $n = 2$ à $n = 10$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	2	4	8	16	32	64	128	256	512
g	3	6	10	15	21	28	36	45	55
h			1	5	16	42	99	219	466

Il trouve ainsi qu'à côté de la relation générale, d'après laquelle la somme des carrés des diagonales équivaut à la somme des carrés des arêtes, les diagonales sont liées entre elles par un nombre h de relations homogènes indiqué aussi dans la petite table ci-dessus. Ces considérations, qui paraîtront *in extenso* dans les *Archives du Musée Teyler*, mènent au théorème suivant, resté par hasard inconnu et qui se démontre tout de suite à l'aide de la formule de la médiane :

En liant un point quelconque O de l'espace aux deux quadruples

$$(A, B, C, D) \quad et \quad (A', B', C', D')$$

de sommets non contigus d'un parallélépipède, on obtient deux quadruples de segments de droites, pour lesquels la somme des carrés a la même valeur.

Lorentz (*H.-A.*). — Contributions à la théorie des électrons. Première Communication. (729-747).

1. Introduction de nouvelles unités dans les équations fondamentales. Les équations fondamentales de l'auteur sont :

(I) $\quad div\,\mathfrak{d} = \varrho,$ $\qquad$ (VI) $\quad rot\,\mathfrak{d} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}},$

(II) $\quad \frac{d\varrho}{dt} + div(\varrho\mathfrak{v}) = 0,$ $\qquad$ (VII) $\quad \mathfrak{i} = \dot{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}.\mathfrak{h}],$

(III) $\quad \mathfrak{i} = \dot{\mathfrak{d}} + \varrho\mathfrak{v},$ $\qquad$ (VIII) $\quad W_e = \frac{1}{2}\mathfrak{d}^2,$

(IV) $\quad div\,\mathfrak{h} = 0,$ $\qquad$ (IX) $\quad W_m = \frac{1}{2}\mathfrak{h}^2,$

(V) $\quad rot\,\mathfrak{h} = \frac{1}{c}\mathfrak{i} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \varrho\mathfrak{v}),$ $\qquad$ (X) $\quad \mathfrak{s} = c[\mathfrak{d}.\mathfrak{h}],$

où ϱ indique la charge de l'électron, $\mathfrak{v}$ la vitesse, $\mathfrak{d}$ le déplacement diélectrique dans l'éther, $\mathfrak{i}$ le courant et $\mathfrak{h}$ la force magnétique, tandis qu'on a encore

$$\mathfrak{i} = 4\pi c^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{v}.\mathfrak{h}].$$

Les quantités ρ, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ sont exprimées en unités électrostatiques. Les quantités W_e, W_m, $\mathfrak{s}$ indiquent l'énergie électrique, l'énergie magnétique et le courant d'énergie de M. Poynting.

2, 3. Potentiel scalaire et potentiel vecteur. 4-9. Théorèmes correspondant au principe de d'Alembert et à celui de la moindre action. 10-12. Action pondéromotrice sur un système d'électrons. 13-16. Un couple de cas particuliers de l'action pondéromotrice. Le premier cas est formé par les phénomènes de rotation électromagnétique, le second se base sur des expériences de M. Whitehead.

De Vries (*J.*). — Les complexes de rayons en rapport avec une courbe gauche rationnelle. (762-767).

1. L'auteur suppose que les tangentes d'une courbe gauche rationnelle C^n de l'ordre n sont groupées de manière à former une involution I^p d'ordre p; le complexe dont il s'agit est le lieu des congruences linéaires dont les deux directrices font partie d'un même groupe de cette involution. L'ordre du complexe est $(2n-3)(p-1)$.

2. Les courbes du complexe admettent $(n-2)(2n-5)(p-1)^2$ tangentes doubles, les cônes du complexe admettent autant d'arêtes doubles; ces tangentes doubles et arêtes doubles forment la même congruence dont l'ordre et la classe sont égaux à $(n-2)(2n-5)(p-1)^2$.

Les droites s'appuyant sur trois directrices d'un même groupe de l'involution forment une congruence de l'ordre et de la classe $(n-2)(p-1)(p-2)$.

3. Le genre des courbes du complexe est

$$\frac{1}{2}[(2n-3)(p-1)-1][(2n-3)(p-1)-2]$$
$$-(n-2)(2n-5)(p-1)^2-3(n-2)(p-1)(p-2).$$

4. Étude du cas particulier $n=3$, $p=2$ par l'analyse. Les tangentes

$$p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{34}:p_{42}:p_{23}=t^3:2t^2:3t^2:1:-2t:t^2$$

de la cubique gauche

$$x_1:x_2:x_3:x_4=t^3:t^2:t:1$$

au point t. L'équation

$$t+t'=0$$

de l'involution. L'équation

$$p_{12}p_{34}^2+p_{23}p_{12}(p_{14}+3p_{23})+p_{23}p_{14}^2=0$$

du complexe, etc.

Kluyver (*J.-C.*). — Une expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. (762-786).

L'auteur se propose d'indiquer certaines fonctions z de deux variables réelles x et y qui font connaître, pour des valeurs entières et positives de ces variables, leur plus grand commun diviseur. Ses résultats se trouvent en partie sous une autre forme, dans un Mémoire de Stern [*Zur Theorie der Funktion* $\varepsilon(x)$ (*Journal von Crelle*, t. 102, p. 9)]. Une des formes de la fonction z est donnée par l'équation

$$\frac{B_k}{2k!} z^{2k} = x^k y^k \int_0^1 g_k(xu)\, g_k(yu)\, du,$$

ou

$$\frac{1}{2} g_{2k-1}(u) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nu}{(2\pi n)^{2k-1}},$$

et

$$\frac{1}{2} g_{2k}(u) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nu}{(2\pi n)^{2k}},$$

tandis que B_n représente, comme d'ordinaire, le coefficient de Bernoulli de rang n. Surfaces en rapport avec cette représentation.

Lorentz (*H.-A.*). — L'émission et l'absorption des métaux dans le cas de longueurs d'onde considérables. (787-807).

Dans leurs dernières expériences sur le pouvoir réflecteur des métaux, MM. Hagen et Rubens ont démontré qu'on peut rendre compte des propriétés des corps vis-à-vis des rayons de longueurs d'onde considérables en faisant dépendre la vitesse de propagation des vibrations électriques des mêmes équations qui sont de rigueur pour des courants lentement variables et qui ne contiennent d'autre constante physique du métal que le pouvoir conductif. Cela implique que les représentations de la théorie des électrons qui donnent une idée du mécanisme du mouvement de l'électricité doivent suffire pour fournir une image satisfaisante de l'absorption des rayons. Ces représentations ont été développées par MM. Riecke et Drude, qui supposaient que chaque métal contient des électrons libres se mouvant avec une vitesse indépendante de la température, de la même manière que les molécules d'un gaz ou les ions libres d'un électrolyte. On peut s'imaginer que, dans ce « mouvement de chaleur », chaque électron se déplace suivant une droite, jusqu'à ce qu'il heurte un atome métallique; sa trajectoire devient alors une ligne irrégulière en zigzag et, dans le cas où aucune cause spéciale n'intervient, il sera permis de supposer que, par un plan quelconque, il passe autant d'électrons de l'un des deux côtés que de l'autre. Aussitôt qu'une force électrique entre en jeu, tout change. Cette force favorisera le mouvement vers l'un des deux côtés, et c'est précisément dans ce surplus de mouvement vers ce côté que consiste le « courant électrique ». Pour qu'il y ait rapport entre le pouvoir d'émission et le pouvoir d'absorption exprimé par la loi de Kirchhoff, le mécanisme dont dépend l'émission ne saurait différer de celui auquel on attribue l'absorption. Ainsi l'on est porté à se demander, si l'on peut rendre compte de l'émission d'un métal, toujours dans le cas de longueurs d'onde considérables, en s'imaginant que ce métal contient des électrons, se mouvant de la manière indiquée, sans qu'on ait besoin de

recourir à des *vibratrices* proprement dites, admettant des vibrations à période déterminée qui leur sont propres. Dans cette Communication, l'auteur se propose de démontrer qu'en effet cela est possible. Tout en se basant sur les idées que nous venons d'indiquer, il calcule le pouvoir d'émission d'un métal, et le rapport entre cette quantité et le pouvoir d'absorption. Il trouve que ce rapport est indépendant des valeurs des quantités qui varient d'un métal à l'autre. Eu égard à la loi de Kirchhoff, ce résultat peut être considéré comme le rapport entre le pouvoir d'émission et le pouvoir d'absorption d'un objet quelconque, ou bien comme le pouvoir d'émission d'un corps parfaitement noir; ce rapport dépend d'une grandeur constante dont l'auteur indique la signification physique. Son Mémoire se termine par la solution d'une question du calcul des probabilités :

« Quelle est la probabilité que le centre de gravité d'un très grand nombre de points distribué sur une droite se trouve entre deux positions limites données ? ».

Tome XII: mai 1903-avril 1904.

Versluys (*W.-A.*). — Les singularités de la courbe focale d'une courbe gauche. (46-48).

L'auteur démontre que les singularités de la surface développable focale d'une courbe gauche s'accordent en nombre avec celles de la courbe plane qui forme la projection centrale de la courbe gauche, le centre et le plan de projection étant choisis arbitrairement.

Pannekoek (*A.*). — Quelques remarques sur la réversibilité de mouvements moléculaires. (63-69).

Verschaffelt (*J.-E.*). — Contributions à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (69-77, 1 planche).

VII. L'équation d'état, etc. (*voir* plus haut, t. XI, p. 255, 328, 663). 17. Le diagramme (α, β). La température, la pression et le volume correspondant au point de plissement. La condensation rétrograde. 18. Évaluation des quotients différentiels réduits.

Van der Waals (*J.*). — L'état fluide et l'équation d'état. (82-110).

A plusieurs reprises, on a démontré que l'équation d'état ne présente que qualitativement la marche des phénomènes, si l'on suppose que les quantités a et b qui y entrent sont constantes. Ici l'auteur se propose de démontrer que, si l'on suppose a constant et b une certaine fonction du volume, les grandes déviations disparaissent pour la plupart.

Van de Sande Bakhuyzen (*E.-F.*). — Recherches sur les erreurs des Tables lunaires de Hansen-Newcomb dans les années 1895-1902. (131-148, 381-391, 585-589).

Van Laar (*J.-J.*). — Sur les formes possibles de la ligne de fusion de mélanges binaires de substances isomorphes. (169-187, 494-509, 716-729, 3 planches).

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Happel* (*H.*). — La représentation de la continuité des états fluide et gazeux et des divers états d'agrégation solides à l'aide de la surface entropie-volume-énergie (η, v, ε) de Gibbs. (223-247, 4 planches).

Julius (*W.-H.*). — Explication de la périodicité des phénomènes solaires et de la périodicité correspondante de la variation des éléments météorologiques et des éléments du magnétisme terrestre à l'aide de la dispersion de la lumière. (300-334).

De Vries (*J.*). — Les courbes harmoniques d'une cubique plane donnée. (363-366).

1. La courbe harmonique d'un point P par rapport à une cubique plane donnée c^3 est le lieu des points H séparés harmoniquement de P par deux des trois points d'intersection de la droite PH avec c^3. Si $a_x^3 = b_x^3 = 0$ représente c^3 en coordonnées triangulaires, l'équation de la courbe harmonique du point (y_1, y_2, y_3) est

$$h_x^3 = 9a_x^2 a_y b_x b_y^2 - a_x^3 b_y = 0.$$

2. Les coniques polaires de P par rapport au faisceau de cubiques déterminé par c^3 et la courbe harmonique h^3 de P se touchent les unes les autres dans les points d'intersection de la droite polaire commune de P par rapport aux cubiques du faisceau.

3. La conique satellite de P par rapport à c^3 représentée par

$$4a_x^2 a_y b_y^2 - 3a_x a_y^2 b_x b_y^2 = 0.$$

Les coniques polaires et les coniques satellites de P, par rapport aux cubiques du faisceau $c_x^3 + \lambda h_x^3 = 0$, engendrent le même faisceau.

4. Le système des coniques satellites de P par rapport à un faisceau quelconque de cubiques.

5. Étude d'une courbe sextique en rapport avec la question.

Van der Grient Jr (*J.*). — Courbes rectifiantes. (414-423, 1 planche).

Question de Cinématique, où une tangente roule sur une courbe fixe. La rectifiante d'une courbe donnée par l'équation intrinsèque $f(s, \rho) = 0$, où s et ρ représentent l'arc et le rayon de courbure, est $f(x, y) = 0$. Ainsi l'auteur trouve par la synthèse que la rectifiante d'une droite est une spirale logarithmique, que celle d'une conique peut être une épicycloïde ou une hypocycloïde, etc.

Williot (*V.*). — Lettre sur quelques erreurs qui se sont glissées dans la *Théorie, propriétés, formules de transformation et méthodes d'évaluation des intégrales définies* de Bierens de Haan. (424-426).

Aux remarques de M. Williot est ajouté un complément de M. J.-C. Kluyver.

Kluyver (*J.-C.*) et *Kapteyn* (*W.*). — Rapport sur un Mémoire de M. K. Bes intitulé : *La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques.* (431-432).

Kluyver (*J.-C.*). — Sur des séries dérivées de la série $\sum \frac{\mu(m)}{m}$. (432-439).

Il s'agit de la fonction numérique $\mu(m)$ du nombre entier m qui disparaît pour m multiple d'un carré et qui d'ailleurs est égale à $+1$ ou à -1 à mesure que m est le produit d'un nombre pair ou impair de nombres premiers. Le théorème d'Euler

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdots + \frac{1}{29} - \frac{1}{29} - \frac{1}{30} \cdots = 0$$

n'a été prouvé rigoureusement que très récemment par MM. H. von Mangoldt (1897) et Ed. Landau (1899). Ici l'auteur s'occupe des séries

$$T_{b,h} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{mb+h},$$

convergentes tout de même. Successivement il trouve

$$T_{b,0} = 0, \qquad T_{2,1} = 0, \qquad T_{3,1} = -T_{3,2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$T_{4,1} = -T_{4,3} = \frac{\pi}{2}, \qquad T_{4,2} = 0, \qquad T_{5,1} = 1,108\ldots,$$

$$T_{5,2} = -0,710\ldots, \qquad T_{5,3} = -0,452\ldots, \qquad T_{5,4} = 0,034\ldots,$$

$$T_{6,1} = -T_{6,5} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}, \qquad T_{6,2} = -T_{6,4} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \qquad T_{6,3} = 0.$$

Van der Waals (*J.-D.*). — L'équilibre entre une substance

solide et une phase liquide, principalement à la proximité de l'état critique. (439-454, 606-615).

Verschaffelt (*J.-E.*). — Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (523-532, 1 planche).

VIII. La surface ψ à la proximité d'un mélange binaire se comportant comme une substance simple.

Schoute (*P.-H.*). — **Décomposition centrique de polytopes.** (603-605).

L'auteur indique par $P_{(m,n)}^{r}$ un polytope régulier de l'espace E_n limité par m espaces E_{n-1} dont r représente la longueur des arêtes. Autant que possible l'indice n est omis.

Dans l'espace E_3, on a :

1ᵃ. Les huit sommets d'un cube $P_6^{(1)}$ se décomposent en deux groupes de quatre sommets non contigus, les sommets de deux tétraèdres $P_4^{(\sqrt{2})}$.

1ᵇ. Les huit faces d'un octaèdre $P_8^{(1)}$ se décomposent en deux groupes de quatre faces non parallèles, les faces de deux tétraèdres $P_4^{(2)}$.

2ᵃ. Les vingt sommets d'un P_{12}^{1} pris deux fois se décomposent en cinq groupes de huit sommets, les sommets de cinq cubes $P_6^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ et pris une seule fois, de deux manieres differentes, les sommets de cinq tétraèdres

$$P_4^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2}}.$$

2ᵇ. Les vingt faces d'un P_{20}^{1} prises deux fois se décomposent en cinq groupes de huit faces, les faces de cinq octaèdres $P_8^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2}}$ et prises une seule fois, de deux manières différentes, les faces de cinq tétraèdres $P_4^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2}}$.

Dans l'espace E_4, on a :

3. Les seize sommets d'un P_8^{1} se décomposent en deux groupes de huit sommets non contigus, les sommets de deux $P_{16}^{\sqrt{2}}$. De la même manière, les seize espaces limitants de P_{16}^{1} forment les huitaines d'espaces limitants de deux $P_8^{(\frac{1}{2}\sqrt{2})}$.

4. Les vingt-quatre sommets d'un P_{24}^{1} se décomposent en trois octuples de sommets, les sommets de trois $P_{16}^{(\sqrt{2})}$. De la même manière, les espaces limitants de P_{24}^{1} fournissent trois $P_8^{(\sqrt{2})}$.

5. Les cent-vingt sommets d'un P_{600}^{1} forment, de cinq manières differentes,

les sommets de cinq $P_{2^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}}$. De la même manière, les espaces limitants de P_{120} mènent, de cinq manières, à cinq $P_{2^{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})\sqrt{2}}}$.

6. Les six cents sommets d'un P_{120} se décomposent, de deux manières différentes, en cinq groupes de cent-vingt sommets, les sommets de cinq $P_{2^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{2}}}$. De la même manière, les espaces limitants de P_{120} font trouver, de deux manières, cinq $P_{2^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{2}}}$.

Dans les espaces à un plus grand nombre de dimensions, on a en général :

7. Dans l'espace E_{2^p-1} les 2^{2^p-1} sommets d'un $P_{2^{(2^p-1)}}$ forment les sommets de 2^{2^p-p-1} simplexes $P_{2^{\sqrt{2^{p-1}}}}$. De même, les espaces E_{2^p-2} limitants d'un $P_{2^{2^p-1}}$ livrent 2^{2^p-p-1} simplexes $P_{2^{\sqrt{2^p}}}$.

8. Dans l'espace E_{2^p} les 2^{2^p} sommets d'un $P_{2^{p+1}}$ forment les sommets de $2^{2^p-p-1}P_{2^{2^{\sqrt{2^{p-1}}}}}$. De même, les espaces limitants E_{2^p-1} d'un $P_{2^{2^p}}$ font trouver $2^{2^p-p-1}P_{2^{2^{\sqrt{2^{p-1}}}}}$.

Kapteyn (*W.*). — L'équation différentielle de Monge. (703-705).

Si l'on suppose que les coefficients H, K, L de l'équation différentielle

$$(1) \qquad Hr - 2Ks + Lt + \ldots = 0$$

ne dépendent que de p et q, les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation admette deux intégrales intermédiaires sont

$$(2) \qquad \frac{H}{\theta_{11}} = \frac{K}{\theta_{12}} = \frac{L}{\theta_{22}}$$

et

$$(3) \qquad \begin{cases} 2D\left(\theta_{22}\dfrac{\partial^2 D}{\partial p^2} - \theta_{12}\dfrac{\partial^2 D}{\partial p\,\partial q} + \theta_{11}\dfrac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right) \\ \quad + 3\left[\theta_{22}\left(\dfrac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - 2\theta_{12}\dfrac{\partial D}{\partial p}\dfrac{\partial D}{\partial q} + \theta_{11}\left(\dfrac{\partial D}{\partial q}\right)^2\right], \end{cases}$$

où θ_{11}, θ_{12}, θ_{22} sont les quotients différentiels du second ordre d'une fonction θ, tandis qu'on a encore

$$D = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}^2 \neq 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est donnée par le système

d'équations

$$p = \frac{g - h'}{u - v}, \qquad q = \frac{\xi - \zeta}{u - v},$$

$$(4) \quad \begin{cases} \theta = \int g\,\xi\,du \\ \quad - \int h\,\zeta\,dv - (g' - h')(\xi + \zeta) - \dfrac{2}{u - v}\{(g - h)(\xi - \zeta) \\ \qquad - (\xi - \zeta)(g - h)\}, \end{cases}$$

où u et v sont deux paramètres arbitraires, tandis que

$$g = g(u), \qquad h = h(v), \qquad \xi = \xi(u), \qquad \zeta = \zeta(v)$$

sont des fonctions quelconques.

Sous les conditions (2) et (3), l'équation (1) admet les deux intégrales intermédiaires

$$z = z\xi' - xg = \bar{\Omega}(u),$$
$$z = y\zeta - xh = \bar{\Omega}(v),$$

où $\bar{\Omega}$ est une fonction quelconque des fonctions u et v de p et q déduites de (4).

Dans le cas particulier où θ satisfait aux deux équations qu'on obtient en égalisant à zéro chacun des membres de (3), il faut distinguer les deux cas

$$\frac{\partial D}{\partial q} = \frac{\theta_{pq} - \sqrt{\theta_{pq}^2 - \theta_{pp}\theta_{qq}}}{\theta_{pp}}\,\frac{\partial D}{\partial p} = 0,$$

etc.

La condition (1) se trouve déjà dans une autre forme, dans la thèse excellente de M. J. Valyi (Klausenburg, 1880).

Schoute (*P.-H.*). — Les nombres de Plücker d'une courbe en E_n. (705-709).

Si l'on représente par a et c l'ordre et la classe d'une courbe C_p située en E_n mais pas encore dans un E_{n-1}, par a et b les nombres de ses espaces E_{n-2} stationnaires et de ses points stationnaires, par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ses rangs, par $a_2, c_2, p_2, t_2, r_2, t_2$ les nombres pluckériens (ordre, classe, nombre de points doubles, de tangentes doubles, de points de rebroussement et de points d'inflexion) des $n(n-1)$ courbes planes C_{n-2} qui, d'après M. G. Veronese (*Math. Annalen*, t. XIX, p. 161-194), font connaître les $3(n-1)$ relations entre les $3n$ quantités caractéristiques ou nombres pluckériens de C_n, et si, de plus, on remplace, pour augmenter la régularité des formules, la série

$$b, a, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, c, a \quad \text{par} \quad s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1},$$

on trouve

$$a_2 = s_1, \quad c_2 = s_{n+1}, \quad r_2 = s_2, \quad t_2 = s_{n+2}$$

Ainsi les formules de Plucker pour les $n-1$ courbes C_n^k se transforment en

$$\left.\begin{aligned} 2p_k &= s_k(s_k-1) - s_{k+1} - 3s_{k+1} \\ 2t_k &= s_{k+1}(s_{k+1}-1) - s_k - 3s_{k+2} \\ &= s_{k+2} - s_{k+1} - 3(s_{k+1} - s_k) \end{aligned}\right\}, \quad (k=1, 2, \ldots, n-1).$$

En arrangeant les $3n$ nombres de Plucker en trois groupes, le groupe des $n+2$ nombres de rang $s_0, s_1, \ldots, s_{n+1}$, le groupe des $n-1$ nombres doubles ponctuels $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et le groupe des $n-1$ nombres doubles tangentiels, on trouve donc la série des nombres s à l'aide des $n-1$ équations de la troisième ligne aussitôt qu'on en connait trois nombres consécutifs, tandis que les deux groupes de $n-1$ équations de la première et de la deuxième ligne donnent les valeurs des nombres p et t, si les nombres s sont connus.

Le genre g de C_n^k est représenté par l'équation

$$2g = (o_k - 1)(o_k - 2) - 2(p_k - r_k),$$

qui se réduit à

$$2g = s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1} - 2.$$

Donc la relation récurrente entre quatre s consécutives permet de vérifier immédiatement que toutes les courbes $C_2^{(k)}$ ont le même genre.

Eu égard à la relation entre quatre s consécutives, on a

$$\frac{s_0 - (s_1 - 3s_0)x - (s_2 - 3s_1 - 3s_0)x^2}{(1-x)^3}$$
$$= s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \ldots + s_{n+1} x^{n+1} + \ldots;$$

donc les nombres de rang $s_0, s_1, \ldots, s_{n+1}$ d'une courbe C_n forment les premiers termes d'une série récurrente, etc.

Versluys (*W.-A.*). — Les singularités d'une courbe plane générale touchant σ fois la droite à l'infini et passant ε fois par chacun des points cycliques. (709-710).

Versluys (*W.-A.*). — Sur la position des trois points d'une courbe gauche situés dans un de ses plans osculateurs. (710-716).

La surface développable S^n d'une courbe gauche est coupée par le plan osculateur au point P suivant la tangente p et P comptée deux fois et une courbe C^{n-3}; l'auteur démontre à plusieurs reprises que la courbe C^{n-3} ne contient que deux des trois points qui déterminent le plan osculateur en P.

De Vries (*J.*). — Sur des systèmes de coniques en rapport avec les involutions de groupes de points situés sur des courbes rationnelles. (716-722).

1. Etude du système $[C^2]$ de coniques déterminé par une involution $I_{(n-5)}$.

sur une courbe plane rationnelle C^n, contenant les coniques passant par cinq points d'un même groupe de l'involution. Les deux caractéristiques μ, ν de ce système ont les valeurs

$$\mu = 2(n-2)(s-1), \qquad \nu = \tfrac{1}{2}(n-2)(s-1).$$

2. Le nombre des coniques de $[C^2]$ qui touchent C^n est

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(2n-1)(s-1).$$

3. Le nombre des coniques contenant six points d'un même groupe de l'involution est $(2n-5)(s-1)$.

Cas où $s = 5$; alors l'auteur fait passer les coniques par $5-s$ points fixes

De Vries (*J.*). — Les involutions fondamentales sur les quintiques rationnelles. (742-744).

La quintique C^5 admet quinze involutions quadratiques fondamentales, incises par des faisceaux de coniques dont les points de base sont quatre des six points doubles, et autant d'involutions cubiques fondamentales dont les groupes sont les triples de points, collinéaires avec les couples des involutions quadratiques; de plus les six points doubles donnent lieu à six involutions cubiques centrales fondamentales.

Cardinaal (*J.*) et *De Vries* (*J.*). — Rapport sur un Mémoire de M. H. de Vries intitulé : *Anwendung der Cyclographie auf die Lehre von den ebenen Curven* (*Application de la Cyclographie sur la théorie des courbes planes*). (775-777).

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Sur la décomposition du mouvement continu autour d'un point O de l'espace E_4 à quatre dimensions en deux mouvements continus autour de O en deux E_3. (819-838).

Si les deux angles de position de deux plans de l'espace E_4 sont égaux, chaque droite de l'un de ces plans fait le même angle avec sa projection sur l'autre plan; alors les semi-droites par le point commun O de l'un de ces deux plans et leurs projections sur l'autre s'appellent *semi-droites correspondantes*. Deux plans équiangulaires peuvent être équiangulaires à droite ou à gauche. Ainsi les deux plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = ax_1 + bx_2$, $x_4 = cx_1 + dx_2$ forment deux angles dont le carré de la tangente est racine de l'équation

$$z^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)z + (ad - bc)^2 = 0$$

et cette équation a deux racines égales dans les deux cas

$$c = b, \qquad c = b,$$
$$d = a, \qquad d = a.$$

Donc les couples de plans

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = ax_1 + bx_2,$$
$$x_2 = 0, \qquad x_4 = bx_1 - ax_2,$$

et

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = a'x_1 + b'x_2,$$
$$x_2 = 0, \qquad x_4 = b'x_1 - a'x_2,$$

sont deux couples équiangulaires, les angles égaux φ du premier et φ' du second étant déterminés par les relations

$$\operatorname{tang}^2\varphi = a^2 + b^2, \qquad \operatorname{tang}^2\varphi' = a'^2 + b'^2;$$

si l'on appelle le premier couple *équiangulaire à droite*, le second est *équiangulaire à gauche*. Et les plans coordonnés $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ forment le couple de plans communs de ces deux systèmes doublement infini.

Solution du problème : Déterminer par la synthèse le couple de plans communs de deux systèmes de couples de plans équiangulaires de différente espèce.

Démonstration, d'abord par la synthèse et ensuite par l'analyse, des trois théorèmes suivants :

I. Si la rotation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est équiangulaire à droite, la rotation $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est équiangulaire à gauche.

Ici a, b, c, d sont quatre semi-droites passant par un même point O et situées en E, de manière que $\widehat{ab} = \widehat{cd}$ et $\widehat{ac} = \widehat{bd}$.

II. Les rotations équiangulaires de même espèce forment un groupe.

III. Deux systèmes équiangulaires à droite forment en chaque semi-droite le même angle, l'angle de ces deux systèmes.

Ensuite l'auteur fait connaître une représentation géométrique des systèmes équiangulaires. Par une droite quelconque OW il passe un seul plan faisant partie d'un système de plans équiangulaires donné; ce plan est déterminé par OW et par la droite d'intersection R avec l'espace E normal à OW en O. Cette droite R est appelée la *représentante* du système; elle est indiquée par R_d ou par R_g à mesure que le système est équiangulaire à droite ou à gauche. Ainsi l'espace E en O normal à OW est en même temps *espace représentant* E_d *à droite* que *espace représentant* E_g *à gauche de* E. Alors chaque couple de plans de E_4 est déterminé univoquement par les droites représentantes en E_d et E_g et inversement. Cela posé l'auteur démontre le théorème :

IV. Une rotation équiangulaire à droite de E_4 autour d'un couple de plans, qui n'affecte pas E_g, fait tourner E_d autour de la droite représentante d'un angle égal au double de l'angle de la rotation équiangulaire à droite de E_4.

Application au mouvement d'Euler en E_4, à l'aide d'un système de coordonnés rectangulaires par rapport auquel les produits d'inertie du corps quadridimensional disparaissent. Cas particuliers où quelques-uns des quatre moments d'inertie sont égaux.

Schuh (*Fr.*). — Une relation de réalité se rapportant aux courbes planes réelles et imaginaires à singularités supérieures. (845-854).

En 1876 M. F. Klein a étendu une relation trouvée par M. H.-G. Zeuthen pour le cas d'une courbe C^n du quatrième ordre à une courbe algébrique quelconque dont l'équation n'admet que des coefficients réels et qui ne possède que les quatre singularités plückeriennes ordinaires, en démontrant la formule

$$n + \beta' + 2\tau'' = k + \alpha' + 2\delta'',$$

où n et k indiquent l'ordre et la classe, tandis que β', α', τ'', δ'' représentent les nombres des singularités réelles : points d'inflexion, points de rebroussement, tangentes doubles isolées et points doubles isolés.

M. Schuh étend cette équation à des courbes planes à singularités supérieures dont l'équation admet des coefficients réels ou complexes, et fait voir que par cette généralisation l'équation elle-même prend la forme plus simple

$$n + \Sigma' c_1 = k + \Sigma t_1,$$

où Σt_1 représente la somme des ordres des singularités à point réel, $\Sigma' c_1$ la somme des classes des singularités à tangente réelle. Il considère comme *élément* de la courbe un point de la courbe avec la tangente correspondante et bien exclusivement comme faisant partie d'une branche de la courbe représentée par un seul développement en série, suivant Puiseux, à exposants entiers ou fractionnaires. Cet élément est singulier : 1° si le point ou la tangente est singulier ou s'ils le sont tous les deux ; 2° si le point ou la tangente ou tous les deux font partie de plusieurs éléments ; 3° si le point est réel et la tangente imaginaire ou inversement.

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Zakrzewski* (*C.*). — Contributions à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (885-896, 1 planche).

IX. Les conditions d'existence de mélanges binaires de substances normales d'après la loi des états correspondants.

Schoute (*P.-H.*). — Projections régulières de polytopes réguliers. (909-910).

Énonciation de deux théorèmes généraux dont les démonstrations paraîtront ailleurs.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — La transformation symétrique de l'espace E^4 en rapport avec les espaces E_d et E_g. (926-928).

Complément de la Communication précédente (*voir* plus haut). Ici E_d et E_g indiquent encore les espaces représentants tridimensionaux des systèmes de rotations équiangulaires à droite et à gauche.

1. Une transformation symétrique quelconque de E_4 peut être remplacée par un réfléchissement précédé ou suivi d'une rotation équiangulaire à droite ou à gauche.

2. Par une transformation symétrique de E_4 autour d'un point fixe un seul couple de plans ne se déplace pas; dans l'un de ces deux plans rectangulaires l'un à l'autre les figures correspondantes sont congruentes, dans l'autre elles sont symétriques l'une de l'autre.

Jahnke (*E.*). — Bemerkung zu der am 27 Februar 1904 vorgelegten Notiz von Herrn Brouwer : *Sur la décomposition du mouvement continu autour d'un point* O *de l'espace* E_4 *en deux mouvements continus autour de* O *en deux* E_3. (940-941).

Réclamation de priorité. M. Jahnke prétend que les résultats trouvés par M. Brouwer (*voir* plus haut) ont été publiés par lui en 1896 et 1901.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Déduction algébrique de la décomposibilité du mouvement continu autour d'un point fixe en E_4 en ceux en deux E^3. (941-947).

Ici M. Brouwer fait voir qu'il y a une grande différence entre les théorèmes qu'il a communiqués à la séance du 27 janvier et ceux de M. Jahnke. Ce que M. Jahnke appelle *rotation élémentaire* (*Elementar-drehung*) n'est pas une rotation, mais une transformation symétrique ne jouissant pas de la propriété de former un groupe. Enfin il démontre par l'analyse les théorèmes par rapport à la décomposition du mouvement en E_4 obtenus récemment par la voie géométrique.

Kohnstamm (*Ph.*). — L'équation d'état de Van der Waals. (948-961).

L'auteur résume l'histoire remarquable de la question. L'équation

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{b}{v}\right)$$

de Tait et H.-A. Lorentz, et l'équation

$$p = \frac{a}{v^2} \quad \frac{RT}{v - b}$$

de Van der Waals. La polémique entre Tait, Lord Rayleigh et M. Korteweg. La discussion entre Boltzmann et Van der Waals, ou s'est mêle M. Van der Waals fils (Groningue). Les résultats de MM. Brinkman et Van Laar. La re-

marque de MM. Dieterici et Happel, que l'équation

$$p = \frac{a}{v} - \frac{RT}{v}\left(1 + \frac{b}{v} - \alpha\frac{b^2}{v^2} + \ldots\right)$$

ne saurait être d'accord avec les données expérimentales, etc.

Kohnstamm (*Ph.*). — **Les expressions de Clausius et de Van de Waals pour le chemin libre moyen et le nombre des percussions. (961-967).**

Lorentz (*H.-A.*). — **Les phénomènes électromagnétiques dans un système se mouvant avec une vitesse quelconque, inférieure à celle de la lumière. (986-1009).**

La question de savoir si la translation d'un système, comme, par exemple, celle due au mouvement annuel de la Terre, a quelque influence sur les phénomènes électriques et optiques, peut être résolue assez facilement, pour autant qu'on suppose que toutes les quantités, où entre le carré du rapport de la vitesse w de translation et la vitesse c de la lumière, peuvent être négligées. Au contraire, le problème devient beaucoup plus difficile dans le cas où une influence de l'ordre $\frac{w}{c}$ se fait encore sentir. L'expérience d'interférence de Michelson forme le premier exemple généralement connu de cette nature; pour expliquer que, dans ce cas même, la translation n'a pas d'influence, il faut supposer, comme l'ont démontré M. Fitzgerald et l'auteur, que les dimensions des solides varient un peu à cause du mouvement à travers l'éther en repos.

Récemment, on a fait des expériences où entrent également les quantités du second ordre. D'abord MM. Rayleigh et Brace ont examiné si, par suite du mouvement de la Terre, un corps devient biréfringent, supposition vraisemblable, eu égard aux petites variations mentionnées des dimensions; toutefois, les résultats de ces expériences ont été négatifs. Ensuite MM. Trouton et Noble se sont demandé si un condensateur chargé, dont les plaques sont inclinées par rapport à la direction du mouvement terrestre, subit l'action d'un couple, comme l'exige la théorie des électrons. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer un condensateur, l'éther figurant comme matière diélectrique; alors un calcul assez simple fait voir qu'un couple $\frac{L}{c^2}\sin 2\alpha$ tâche de faire tourner le condensateur, de manière que les plaques deviennent parallèles à la direction de la translation, L représentant l'énergie du condensateur et α l'angle entre la normale des plaques et la direction de la translation. Seulement, quoique le condensateur pendu à une balance de torsion fût sans doute assez sensible pour accuser le couple indiqué, on n'a observé aucune déviation. Donc il est souhaitable d'attaquer encore une fois le même problème. Mais il y a plus. Dans les *Rapports du Congrès de Physique* de 1900, t. I, p. [illegible], M. Poincaré a observé que la théorie des phénomènes électriques et optiques dans des solides en mouvement a quelque chose d'artificiel en ce qu'elle a été obligée de recourir à une hypothèse nouvelle pour l'explication de l'expérience de M. Michelson et que cette nécessité pourrait très bien se répéter plusieurs fois. Sans doute il serait

plus satisfaisant de pouvoir déduire de certaines hypothèses fondamentales que plusieurs actions électromagnétiques sont indépendantes de la translation, non seulement jusqu'aux quantités du premier ou du second ordre, mais pour une valeur quelconque de la vitesse. L'auteur a fait une première tentative dans cette direction, il y a quelques années; il se croit en état de la répéter ici avec l'espérance de plus de succès. Il y suppose que la vitesse de translation est quelconque, que seulement elle ne surpasse pas celle de la lumière. Ses calculs se basent sur les équations fondamentales de la théorie des électrons (*voir* l'article *Weiterbildung der Maxwell'schen Theorie, Elektronentheorie* de l'auteur, dans la *Mathematische Encyclopädie*, t. V, § 21 *a*). Chemin faisant il suppose que les électrons, sphériques dans l'état de repos, changent de forme à cause de la translation, de manière que les dimensions dans la direction de la translation deviennent kl fois, celles dans les directions perpendiculaires à la translation deviennent l fois plus petites, l'élément de vitesse conservant sa charge. De plus, il suppose que la loi des forces électriques dans un système électrostatique s'applique tout aussi bien aux forces entre les particules de matière sans charge qu'à celles entre ces particules et les électrons déformés en ellipsoïde de révolution aplaties dont l'axe indique la direction de la translation. A l'aide de ces hypothèses, il rend compte des résultats de MM. Rayleigh et Brace et de MM. Trouton et Noble; de plus, ses considérations satisfont à ce qu'a exigé M. Poincaré; elles sont indépendantes de l'ordre de grandeur du quotient $\frac{w}{c}$. Le travail se termine par quelques réflexions sur la détermination des masses longitudinale et transversale d'un électron par M. Abraham et la confirmation de ces calculs par les mesures de M. Kaufmann sur l'influence des forces électriques et magnétiques sur les rayons du radium.

S.

VERHANDELINGEN DER KONINKLYKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. Eerste sectie. In-4°.

Tome IV; 1901.

Kam (*N.-M.*). — Catalog von Sternen, deren Oerter durch selbständige Meridian-Beobachtungen bestimmt worden sind, aus Band 67 bis 112 der Astronomischen Nachrichten reducirt auf 1875,0. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H.-G. Van de Sande Bakhuyzen. (25 pages de tables, 12 pages de notes).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIV₂, p. 278.

Tome VIII; 1904.

Bes (*K.*). — L'équation finale. (n° 1, 30 pages).

I. Étant données deux équations $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ homogènes des degrés l et m, en déduire l'équation $\chi(x, y)$ ne contenant pas la variable z; ce résultat de l'élimination de z est appelé l'*équation finale*. De plus, l'équation déduite des deux équations données et contenant z au premier degré est appelée *équation terminale*. Deux méthodes d'élimination.

II. Étude du cas de trois équations homogènes à quatre variables. Nouvelle solution d'un problème de Liouville.

III. Étude du cas de $n - 1$ équations homogènes à n variables. Quelques identités entre coefficients binomiaux.

Bes (*K.*). — Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables. (n° 2, 47 pages).

Les systèmes de racines ne sont pas pour chaque degré des équations données indépendants entre eux.

L'auteur se propose :

1° De déterminer pour chaque degré des équations données le nombre des systèmes de racines indépendants;

2° De constituer les équations par lesquelles on peut évaluer ces systèmes de racines indépendants;

3° D'indiquer quelques propriétés se rapportant à des systèmes de racines ayant deux ou plusieurs éléments communs;

4° De signaler les relations qui lient les systèmes de racines superflus aux systèmes de racines indépendants;

5° D'exprimer les systèmes de racines superflus en fonction des systèmes de racines indépendants.

Easton (*C.*). — La distribution de la lumière galactique comparée à la distribution des étoiles cataloguées dans la Voie lactée boréale. (n° 3, 44 pages, 2 planches).

Versluys (*W.-A.*). — Focale des courbes planes et gauches. Première partie. Focales des coniques et focales des courbes planes qui n'occupent pas de position particulière. Première partie. (n° 5, 81 pages).

L'auteur se propose de déterminer les formules qui expriment l'ordre, la classe, le rang et les singularités de la focale d'une courbe d en fonction de l'ordre, de la classe, du rang et des singularités de cette courbe d.

Il remplace la détermination de la focale par le problème plus général suivant qui en forme l'extension projective : Déterminer le lieu des sommets des cônes quadratiques, passant par une conique quelconque donnée c_2 et doublement tangente à une courbe donnée d.

Les notations employées sont celles de M. E. Pascal (*Repertorio di Mathematiche superiori*); ainsi les singularités introduites sont plus nombreuses que dans les études ordinaires où l'on se contente de considérer seulement les singularités introduites par Cayley, Salmon et Plucker.

Sommaire : I. Introduction. II. Focales des courbes planes. III. Focales des coniques (1. Position générale de la conique donnée. 2. Positions particulières). IV. Focale de la cubique plane sans points singuliers. V. Focales de quelques courbes rationnelles (1. Focale de la cubique de la quatrième classe. 2 Focale de la cubique de la troisième classe. 3. Focale d'une quartique de la troisième classe). VI. Focale de la courbe plane d'ordre μ et de position générale. VII. De quelques dérivées de la courbe d.

Bes (*K.*). — La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques. (n° 6, 24 pages).

1. Formes binaires. 2. Formes ternaires (trois équations, deux équations). 3. Formes quaternaires. 4. La dépendance ou l'indépendance des fonctions algébriques.

Appendices. 1. Les solutions d'un système de n équations à n variables appartenant au domaine de l'infini. 2. Les solutions d'un système de n équations à n variables ayant un élément commun. 3. Combien de et quels déterminants d'une matrice doivent s'annuler, pour que tous les déterminants disparaissent. 4. Les relations qui doivent exister entre les coefficients de $n+1$ équations homogènes à n variables, pour que ces équations admettent une solution commune.

Errata du Mémoire précédent.

De Vries (*H.*). — Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven. (n° 7, 555 pages).

Application de la cyclographie à la théorie des courbes planes.

L'auteur s'occupe d'abord de la surface cyclographique correspondant à une courbe plane donnée C d'ordre μ, de classe ν, à d points doubles, $\varkappa$ points de rebroussement, τ tangentes doubles, σ tangentes d'inflexion, passant ε fois par chacun des deux points cycliques et touchant σ fois la droite à l'infini. Cette surface est le lieu des droites coupant orthogonalement la courbe elle-même et sous des angles de 45° le plan de cette courbe. L'étude de cette surface d'égale pente est compliquée; l'auteur en fait connaître l'ordre, l'ordre de sa courbe de rebroussement, la classe et le nombre des plans osculateurs stationnaires de cette courbe, d'où découlent plusieurs nombres caractéristiques, toujours en tenant compte des nombres donnés ε et σ. Ces nombres trouvés, l'auteur étudie plus à fond les propriétés caractéristiques de la surface cyclographique. Et, dans une seconde partie, il en donne des applications se rapportant à des cercles sa-

tisfaisant à deux conditions simples données et à celle de toucher la courbe donnée. Ces applications aboutissent à la solution du problème d'Apollonius par rapport à trois courbes données.

S.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN. Gegründet 1841 durch *J.-A. Grunert*. Dritte Reihe mit Anhang : SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT. Herausgegeben von *E. Lampe, W. Franz Meyer, E. Jahnke*.

Tome IV, 1903.

Pringsheim (*A.*). — Sur les critères de convergence pour les séries à termes complexes. (1-19).

Signalons, parmi les résultats établis par M. Pringsheim, ceux qui suivent.

Si la série $\sum |a_\nu|$ est telle que l'on puisse pour

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\rho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2},$$

$\varkappa$, λ, ρ_ν, σ_ν étant des nombres réels dont les deux premiers sont indépendants de ν, dont les deux autres sont tels que la borne supérieure de l'ensemble des nombres $|\rho_\nu + \sigma_\nu i|$ soit finie, cette série est convergente si l'on a $\varkappa > 1$, divergente si l'on a $\varkappa \leq 1$ [1].

Si les nombres a_ν sont tels que l'on puisse poser, pour $\nu \geq n$,

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2},$$

avec la condition $|r_\nu| \leq g$, la série $\sum a_\nu x^\nu$ est absolument convergente pour $|x| < 1$, et, si la partie réelle de k est plus grande que 1, encore pour $|x| = 1$. Si la partie réelle de k est positive, inférieure ou égale à 1, la série $\sum a_\nu x^\nu$ converge conditionnellement pour $|x| = 1$, sauf pour $x = 1$. Si la partie réelle de k est négative ou nulle, la série diverge sans exception pour $|x| = 1$. Pour $|x| > 1$, la série diverge toujours.

---

(1) *Cf.* WEIERSTRASS, *Werke*, t. I, p. 185.

Appell (*P.*). — Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels. (20-21).

S'il existe un nombre qui caractérise le degré de réalité d'une courbe, ce nombre doit satisfaire aux conditions suivantes.

Lorsque la courbe se décompose en deux courbes d'ordre moindre, le degré de réalité de cette courbe doit être la somme des degrés de réalité des courbes composantes.

Le degré de réalité d'une courbe doit rester le même quand on fait une transformation homographique quelconque à coefficients réels.

L'auteur caractérise, à ce point de vue, les degrés de réalité des courbes du deuxième, du troisième, du quatrième degré : il indique des applications aux courbes définies par des équations telles que

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}=0, \qquad \frac{\partial^{m+n}[(x^2+y^2-1)^{m+n}]}{\partial x^m\,\partial y^n}=0.$$

Weinholdt (*E.*). — Sur la construction des isophenges pour les surfaces du second degré. (22-43).

Considérons une surface du second degré éclairée par des rayons parallèles; si l'on admet que l'éclairement soit proportionnel au cosinus de l'angle de la normale avec la direction des rayons; les points d'égal éclairement forment les lignes *isophotes*. M. Burmester en a indiqué une construction simple (*Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmassig Gestalteter Flachen*, Leipzig, 1871; *Ueber Isophoten* [*Zeitschrift für Math. u. Ph.*, t. XIV, 1869)]. On peut admettre (contrairement au théorème de Lambert) que, si la surface est peu éclairée, la clarté *apparente* pour un observateur placé à l'infini est proportionnelle au produit des cosinus des angles que la normale fait avec la direction des rayons lumineux et des rayons visuels. Quelle que soit, au point de vue physique, la valeur de cette supposition, la construction des lignes *isophenges* (des points de même clarté apparente) est intéressante au point de vue géométrique. M. Weinholdt ramène cette construction, dans le cas général, à celle des lignes isophenges d'une sphère et, ainsi, à la construction d'un faisceau de cercles et des sections axiales de la surface du second degré; c'est la généralisation directe de la construction de M. Burmester pour les lignes isophotes.

Oster (*B.*). — Sur la déduction des formules pour les primes d'assurance sur la vie. (44-50).

Déduction simple de formules fondamentales pour la théorie des rentes viagères.

Thienemann (*W.*). — Sur un pentagonicositétraèdre remarquable. (50-57).

Il s'agit du corps obtenu (par hémiédrie) en partant d'un hexakisoctaèdre, dont on peint en blanc et en noir les faces, de façon que deux faces de même

couleur ne se raccordent jamais le long d'une arête, et dont on suppose les faces blanches, par exemple, prolongées jusqu'à leurs intersections mutuelles : il est limité par vingt-quatre pentagones. Le corps spécial qu'étudie M. Thienemann ne possède que *deux* sortes d'arêtes; chaque face est composée d'un rhombe surmonté d'un triangle équilatéral.

Haentzschel (*E.*). — Cyclides de révolution et produits de Lamé. (57-65).

Réponse à des critiques dirigées par M. Safford (*American Journal of Mathematics*, t. XXI, 1899; *Bulletin of the American mathematical Society*, 2e série, t. II, 1899) contre les *Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen* (Berlin, 1893) de l'auteur.

Netto (*E.*). — Note sur les polynomes de la division du cercle. (65-67).

Soit, en général, $F_\mu(x)$ le diviseur irréductible de $x^n - 1$ dont les racines sont les racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Le plus grand commun diviseur de $F_\mu(x^\nu)$ et de $F_\nu(x^\mu)$ est $F_{\mu\nu}(x)$. La proposition avait été établie par Kronecker dans le cas où μ, ν sont premiers entre eux.

Stäckel (*P.*). — Une propriété des lignes géodésiques. (68-73).

Considérons, sur une surface, la ligne géodésique qui joint deux points infiniment voisins P, Q; la projection de l'angle infiniment petit de la tangente en P et de la droite PQ sur le plan tangent en P est le tiers de l'angle du plan normal tangent en P et du plan normal en Q et passant par le point P. Ce théorème est dû à M. Waugerin et a été publié dans un Mémoire du général Baeyer inséré dans les *Astronomische Nachrichten*, t. LX; il se trouve cité dans divers écrits sur la Géodésie, mais non dans les traités de Géométrie; M. Stäckel en donne une démonstration nouvelle.

Züge (*H.*). — Pour la théorie de la divisibilité des nombres écrits dans le système décimal. (73-76).

Conséquences de cette remarque : si $10q + 1$ est divisible par p, $10x + y$ est divisible par p quand $x - qy$ est divisible par p.

Majcen (*G.*). — Sur certains faisceaux de coniques homothétiques dans la Géométrie du triangle. (76-99).

Ces faisceaux, qui jouissent d'ailleurs de propriétés géométriques intéressantes, interviennent dans la solution du problème suivant : un triangle étant donné, construire une droite coupant les côtés en trois points tels que les trois droites qui joignent ces points aux sommets opposés fassent le même angle avec les côtés correspondants.

Jolles (*S.*). — Théorie synthétique des moments d'inertie et des moments centrifugaux d'une portion d'espace. (100-116).

Soit R une portion limitée de l'espace, dR un élément de volume de R; considérons deux axes r et s et deux plans ξ, η; soit r_ξ la distance d'un point de dR au plan ξ mesurée parallèlement à l'axe ξ; soit s_η la distance du même point au plan η mesurée parallèlement à l'axe s; l'intégrale

$$\int r_\xi s_\eta \, d\mathrm{R},$$

étendue à R, est le moment *centrifugal* de R relativement aux plans ξ, η. La condition obtenue en égalant cette intégrale à 0 exprime une relation entre les deux plans ξ, η : cette relation fait correspondre un plan à un point, un point à un plan; elle définit ce que l'on appelle un *espace polaire*. L'étude de cet espace polaire conduit l'auteur à une exposition synthétique de diverses propriétés qui se rapportent, en particulier, à la théorie des moments d'inertie.

Wölffing (*E.*). — Sur une classe particulière de courbes transcendantes (117-123).

Sur les courbes définies par une équation de la forme

$$r^h + \alpha p^h = \beta^h,$$

r étant le rayon vecteur et p la distance du pôle à la tangente au point où aboutit. Les courbes $r = \alpha p + \beta$ sont des développantes de courbes cycliques

Saalschütz (*L.*). — Expression explicite des fonctions symétriques de Mac Mahon. (123-127).

Ces fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des sommes de termes formés avec h de ces lettres, affectées d'exposants égaux et inégaux, de manière que la dimension de tous les termes soit égale à d; M. Saalschütz parvient à une expression explicite de ces sommes $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{d}^{h}$ en suivant une méthode d'où M. Gegenbauer avait tiré une formule de récurrence (*Versl. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch z. Amsterdam*, t. IX).

Schoeler (*H.*). — Division approchée en n parties égales d'un angle quelconque au moyen de la règle et du compas. (128-129).

Lampe (*E.*). — Remarques sur quelques modes de division approchée des angles en n parties égales. (133-134).

La construction de M. Schoeler suppose qu'on sache diviser l'arc en $n+1$ parties égales; M. Lampe observe qu'elle revient à construire l'arc x lié à l'arc α

que l'on veut diviser en n parties égales par la formule

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin \frac{2\alpha}{n-1}}{\cos \frac{2\alpha}{n-1} - \frac{n}{n-1}},$$

et discute l'erreur commise, il indique en outre quelques autres procédés analogues.

Comptes rendus et Communications diverses. (134-192).

Signalons le *Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* et les observations de M. Saalschutz et de M. Eneström qu'il contient.

Weber (*H.*). — Théorie des nombres irrationnels quadratiques réels. (193-212).

Formes normales d'une irrationnelle du second degré; définition des nombres réduits et des formes réduites; pour un discriminant donné, il n'y a qu'un nombre limité de formes réduites. Nombres voisins, périodes des nombres réduits; unités d'un déterminant D $\left(\text{ce sont les nombres de la forme } \mathfrak{S}\ \frac{t+u\sqrt{D}}{2}\right.$ tels que l'on ait $\left.\frac{t^2}{4} - \frac{Du^2}{4} = \pm 1\right)$. Unités fondamentales dont les autres, au facteur ± 1 près, sont des puissances. Calcul des unités au moyen du développement en fraction continue. Nombres équivalents. Chaque irrationnelle quadratique est équivalente à un nombre réduit. Nombre de classes. Équivalence propre et impropre. Nombres entièrement équivalents et semi-équivalents.

Horn (*J.*). — Recherche des intégrales d'une équation différentielle linéaire dans le voisinage d'un point d'indétermination par approximations successives. (213-229).

L. Fuchs a donné dans les *Annali di Matematica* [1] (1870) une méthode qui, par des approximations successives, conduit à un développement en série des intégrales d'une équation différentielle linéaire, convergent pour les valeurs non singulières de la variable. M. Horn montre comment, en le modifiant convenablement, ce développement en série permet de reconnaître la façon dont se comportent les intégrales dans le voisinage d'un point d'indétermination : ses principaux résultats ont été insérés dans une Note des *Comptes rendus* (17 janvier 1898); le présent Mémoire contient le développement de la méthode : elle est exposée sur une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Py' + Q = 0,$$

---

[1] *Voir* aussi SCHLESINGER, *Handbuch*, etc., t. I, p. 370-389.

où

$$P = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

$$Q = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots.$$

sont supposés développés en série convergente dans le voisinage du point ∞.

Voici l'un des résultats auxquels parvient l'auteur : si l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0$$

a deux racines distinctes α_1, α_2, l'équation différentielle est vérifiée formellement par les deux séries, généralement divergentes,

$$S_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\beta_1}\left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right),$$

$$S_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\beta_2}\left(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots\right).$$

Supposons, ce qui d'ailleurs ne restreint pas la généralité, que α_1 et α_2 soient réels et que l'on ait $\alpha_1 > \alpha_2$. L'équation différentielle possède alors deux intégrales spéciales η_1, η_2 dont la première est représentée asymptotiquement par S_1, dans le voisinage de $x = \infty$, quand l'argument de x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$, et la seconde par S_2, quand l'argument de x est compris entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. La méthode d'approximations successives conduit à des développements en série convergents pour η_1, η_2.

Graf (*J.*). — Développement en série de $\log\Gamma(a)$ suivant les puissances décroissantes de l'argument. (230-236).

L'auteur établit, en suivant un procédé dû à M. Schlaefli, la formule

$$\log\Gamma(a) = \frac{1}{2}\log(2\pi - a) + \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a + \sum_{\mu=1}^{\mu=q}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu(2\mu-1)}\frac{1}{a^{2\mu-1}}$$
$$+ \int_0^1 \chi(2q+1, t)\left(\int_0^\infty e^{-a(t+x)}\frac{x^{2q}}{e^x - 1}\,dx\right)dt,$$

où B_μ est le $\mu^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli et

$$\chi(n, t) = \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{2\lambda=n}(-1)^{\lambda}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!}\frac{t^{n-2\lambda}}{(n-2\lambda)!}$$

est la fonction de Bernoulli, définie par la relation

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\chi(n, t)\,x^n.$$

Beyel (*C.*). — Sur l'axonométrie et la projection parallèle oblique. (237-251).

M. Beyel développe quelques critiques judicieuses sur la façon trop théorique et machinale dont on expose habituellement l'axonométrie, qui ne permet pas de se rendre compte de la façon dont on doit se figurer dans l'espace le corps, placé, par exemple, derrière le tableau, supposé transparent, sur lequel on le représente axonométriquement. Il indique, en entrant dans les détails, une façon de procéder qui échappe à ses critiques. Son travail est accompagné de deux planches.

Wallenberg (*G.*). — Sur la permutabilité de deux expressions différentielles linéaires (252-268).

Soient

$$P = p_0 y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y,$$
$$Q = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1} y' + q_n y$$

deux expressions linéaires et homogènes par rapport à y et à ses dérivées. En désignant par le symbole PQ le résultat obtenu en remplaçant y par Q dans P, on peut se demander sous quelles conditions on a PQ = QP. L'auteur traite directement le problème dans le cas ou P est du premier ordre, et dans celui où P et Q sont du second ordre. Il en donne ensuite la solution dans le cas où Q est irréductible au sens de M. Frobenius, c'est-à-dire (les coefficients étant supposés uniformes) lorsque Q ne peut pas être décomposé en un produit symbolique d'expressions différentielles à coefficients uniformes. P(y) doit alors pouvoir être mis sous la forme d'un produit symbolique de la forme

$$c_m (Q - \alpha_1 y)(Q - \alpha_2 y) \ldots (Q - \alpha_n y),$$

où c_m, α_1, α_2, ..., α_n sont des constantes. En ne supposant plus l'irréductibilité d'une des expressions P, Q, M. Wallenberg traite le cas où l'une de ces expressions est du second ordre, l'autre du troisième.

Extraits de trois lettres de Steiner à Jacobi. Lettre de Jacobi au ministre d'État v. Eichhorn, concernant Steiner. (Communiqué par E. Jahnke). (268-280).

Les lettres de Steiner, en dehors de leur intérêt mathématique, montrent clairement la familiarité des relations entre Steiner et Jacobi. Au point de vue mathématique, elles se rapportent principalement à l'attraction des ellipsoïdes et à la surface du troisième degré à quatre points doubles. La lettre de Jacobi à v. Eichhorn, où il demande qu'on augmente le traitement de Steiner, est fort intéressante par les détails qu'elle donne sur la vie de celui-ci.

Neuberg (*J.*). — Les coniques et la géométrie du triangle. (281-287).

Sur les trois hyperboles équilatères tangentes à deux côtés aux points où ils sont rencontrés par le troisième côté. Sur les paraboles de Brocard.

Guradze (*H.*). — Transformations et systèmes géométriques dans l'espace. (288-292).

L'auteur étudie, en particulier, la correspondance entre un point P et le plan qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur trois droites fixes.

Appell (*P.*). — Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables. (Extrait d'une lettre à M. M. Krause). (292-293).

En posant

$$P_n(x, y) = \sum_{p=1}^{p=x} \sum_{q=1}^{q=y} (pa + qb)^n.$$

On a symboliquement

$$P_m(x, y) = ((a P(x) + b P(y)))^n,$$

où $P_n(x) = 1 + 2^n + \ldots + x^n$ est le polynome ordinaire de Bernoulli.

$P_n(x, y)$ est le coefficient de $\frac{z^n}{n!}$ dans le produit

$$e^{az} \frac{1 - e^{azx}}{1 - e^{az}} \times e^{bz} \frac{1 - e^{bzy}}{1 - e^{bz}};$$

enfin, quand le rapport $\frac{b}{a}$ est complexe, c'est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int z^n \frac{\sigma' z}{\sigma z} dz,$$

prise sur un contour entourant les pôles

$$pa + qb$$
$$(p = 1, 2, \ldots, x;\ q = 1, 2, \ldots, y),$$

la fonction σz étant construite avec les périodes $2\omega = a$, $2\omega' = b$.

Krause (*M.*). — Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables. (Extrait d'une lettre à M. Appell). (293-295).

On a

$$P_n(x, y) = n! \sum_{r=1}^{r=n+1} \sum_{s=1}^{s=n+1} \frac{a^{r-1} b^{s-1}}{r!\, s!\, (n-r-s+2)!} \gamma_{n-r-s+2} x^r y^s$$
$$(r + s = n + 2),$$

γ_n est le coefficient de $\frac{z^n}{n!}$ dans le développement de

$$\frac{1}{1-e^{az}}\,\frac{1}{1-e^{bz}}\cdots$$

et peut être défini par l'équation symbolique obtenue en égalant l'expression précédente à e^{z} : on parvient ainsi à une nouvelle expression symbolique des polynomes $P_n(x, y)$.

Maennchen (*P.*). — Un nouveau problème de fermeture. (296-298).

Soient, sur une sphère, K_1, K_2 deux cercles qui ne se coupent pas. Soit P un point arbitrairement donné dans l'espace. Soit A un point arbitrairement pris sur K_1; par ce point on mène un cercle dont le plan passe par P tangent à K_2. Ce cercle coupe K_1 en un second point B. On mène par B un cercle, dont le plan passe par P, tangent à K_2; soit C le second point où il coupe K_1, ... La figure peut se fermer ou ne pas se fermer; si, pour un point particulier A, on est dans un de ces cas, on est dans le même cas quel que soit ce point.

Majcen (*G.*). — Nouveaux essais sur la géométrie du triangle. (299).

Compléments à un travail antérieur : *Sur certains faisceaux de coniques homothétiques dans la géométrie du triangle.*

Kühne (*H.*). — Équations fondamentales pour une multiplicité quelconque. (300-311).

Généralisation, pour une multiplicité quelconque M_p, située dans une multiplicité M_n, des équations fondamentales de la théorie des surfaces et des formules de Frenet pour les courbes gauches, obtenue en partant des expressions de l'élément linéaire et des symboles à trois ou quatre indices de Christoffel. L'auteur établit d'abord une suite d'identités, d'où il déduit ses formules générales et montre ensuite comment elles se réduisent aux formules classiques dans le cas d'une surface ou d'une courbe.

Kohn (*G.*). — Sur le principe de la conservation du nombre. (312-316).

Critique de ce principe tel qu'il a été exposé par M. Schubert dans son *Kalcul der abzählende Geometrie* et dans sa Communication au Congrès de Karlsbad.

Pringsheim (*E.*). — Sur la réfraction et la dispersion de la lumière sur le Soleil. (317-330).

Comptes rendus et Communications. (331-362).

Le *Sprechsaal* pour l'Encyclopédie contient des observations de M. F. Klein et de M. E. Jahnke et une Communication de M. L. Schmidt sur la signification de l'équation discriminante pour une équation différentielle algébrique du premier ordre (article de M. Painlevé).

J. T.

COMPTES RENDUS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE BERLIN.

Landau (*E.*). — Sur les lunules quarrables. (1-6).

Si le rapport des deux angles au centre est un nombre premier p qui n'appartient pas à la classe des nombres premiers (Gauss),

$$2^m = 2^k + 1,$$

la lunule n'est pas quarrable.

Knoblauch (*J.*). — Un système simple de formules fondamentales pour la théorie des surfaces. (6-10).

Critique des diverses façons dont ces formules sont habituellement présentées. Avantages de la méthode indiquée par l'auteur dans le *Journal für Math.* (t. CI et CXV) qui fournit effectivement une exposition systématique et courte.

Güntsche. — Construction géométrographique du polygone de 17 côtés. (10-15).

Construction géométrographique canonique. Construction au moyen du compas seul.

J. T.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série. Milano, U. Hoepli, éditeur.

Tome XXXII; 1899.

Aschieri (*F.*). — [V9]. Commémoration de F. Brioschi. (108-125).

Avec la liste des travaux de F. Brioschi.

Dina (*A.*). — [T4*c*]. Détermination de la conductibilité thermique de l'ébonite et du verre. (205-212).

De Pasquale (*V.*). — [J1*b*]. Sur les systèmes ternaires de 13 éléments. (213-231).

La distribution de n éléments 1, 2, ..., n en groupes de trois éléments, de manière qu'un couple quelconque ne se trouve que dans un seul groupe (*système ternaire*), peut se faire seulement lorsque n a l'une des deux formes

$$n = 6m - 1, \qquad n = 6m - 3.$$

La question avait été posée par Steiner (*Ges. Werke*, t. II, p. 437), et la condition fut donnée par Reiss (*Crelle's Journ.*, t. 56, 1859). Les cas $m = 0$, $m = 1$ sont très faciles. Le cas de $n = 13$, qui est le premier de ceux qui correspondent à $m = 2$, a été étudié par Kirkmann (*Cambridge and Dublin Math. Journ.*, t. VIII, 1853), qui a trouvé un système ternaire, et par Netto (*Math. Ann.*, t. XLII, 1892, p. 152), qui en a trouvé un autre. Deux autres systèmes ternaires pour 13 éléments, donnés respectivement par Reiss (*loc. cit.*) et De Vries (*Rend. d. Circ. mat. di Palermo*, t. VIII, 1894, p. 222) ne sont pas distincts de celui de Kirkmann, comme l'a démontré M. K. Zulauf dans sa thèse : *Ueber Tripelsysteme von 13 Elementen* (*Darmstadt, Winter'sche Buchdruckerei*, 1897). L'auteur démontre que pour 13 éléments il n'y a pas d'autres systèmes ternaires que les deux de Kirkmann et de Netto. La méthode suivie par l'auteur est fondée sur une observation due à De Vries, par laquelle on peut déduire tous les systèmes ternaires de 13 éléments en faisant une certaine opération sur toutes les configurations 10.

Vivanti (*G.*). — [H9*a*]. Sur l'extension de la méthode d'intégration de Monge et d'Ampère. (506-517).

La forme des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, constituant la généralisation de celles d'Ampère, a été déterminée par l'auteur dans ces *Rendiconti*, t. XXIX, p. 777; puis dans les *Math. Ann.*, t. XLVIII, p. 474. Il a étudié particulièrement le cas de trois variables, en donnant un système

d'équations de condition, sous lesquelles l'intégration se réduit à celle d'un système linéaire aux différentielles totales. Ici il trouve pour un nombre quelconque de variables un type d'équations analogue à celui qu'il avait étudié pour trois variables.

Veneroni (*E.*). — [N, 1*j*]. Sur le complexe des droites polaires par rapport à un faisceau de surfaces d'ordre quelconque (536-548).

Étude du complexe du degré $2(n-1)$ formé par les axes des faisceaux des plans polaires des points de l'espace par rapport aux surfaces du faisceau.

Vivanti (*G.*). — [D 4*a*]. Sur les fonctions transcendantes entières. (569-571).

Si l'on a la fonction

$$G(z) = e^{(kz^m - hz^m)} z^r \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction entière *simple* de genre p qui n'est pas nulle à l'origine, m étant celui des deux nombres $p, p-1$ qui est impair, r entier et positif, h et k réels et h n'étant pas positif; si $G(z)$ a toutes les racines réelles, les arguments des racines imaginaires de $G'(z)$ sont tous compris dans les intervalles

$$(2\lambda - 1)\frac{\pi}{m} \cdots (2\lambda)\frac{\pi}{m}, \qquad -(2\lambda - 1)\frac{\pi}{m} \cdots -(2\lambda)\frac{\pi}{m}, \qquad \left(\lambda = 1, \ldots, \frac{m-1}{2}\right).$$

Tedone (*O.*). — [Q2 ref. O8]. Sur la théorie des espaces de courbure constante. (592-609).

On peut définir un espace de courbure constante comme tel qu'on puisse y faire mouvoir sans déformation un système quelconque de points; et l'on peut fonder sur une telle définition la théorie de ces espaces.

Gobbi (*U.*). — [J2*d*]. Un théorème élémentaire sur la relation entre l'impôt et la richesse. (756-760).

Cavazzoni (*L.*). — [M, 4*d*]. Sur les courbes trigonales. (777-796).

Courbes contenant une série (au moins) linéaire g'_3 dont l'ordre (troisième) soit le minimum.

Si sur une telle courbe C_p^m, de l'ordre m et du genre p, les trois points de chaque groupe de g'_3 sont en ligne droite, la courbe C_p^m admet une (au moins) courbe adjointe de l'ordre $m-4$, et le genre p ne peut alors varier entre des limites arbitraires, mais il est déterminé par une formule que l'auteur assigne. Une telle courbe peut être réduite biunivoquement à une courbe Γ_p^m de même ordre et genre, à point $(m-3)^{\text{ple}}$, et les rayons partant de ce point donnent

sur Γ_p^m la transformée de g_1^1. Il y a aussi d'autres réductions de cette courbe. Une réduction qui reste possible même lorsque les points des groupes de g_1 ne sont pas en ligne droite, est celle qui transforme Γ_p^m en une courbe de même genre p et de l'ordre $p+3$ avec $p+1$ points doubles et un point p^{ple} dont les tangentes aux p branches ont un contact du troisième ordre. L'équation de cette dernière courbe est

$$(1) \qquad U_p x_1^3 + 3U_{p-1} x_1^2 x_2 + U_{p-3} = 0,$$

U_p, U_{p-1} étant les formes binaires en x_1, x_2 des degrés p et $p-3$ respectivement. Les $p+1$ points doubles sont sur la conique

$$(2) \qquad x_1^2 - x_2 x_3 = 0.$$

L'auteur démontre aussi, par voie analytique, quelques autres propriétés de la courbe. Soit la détermination du nombre des paramètres dont dépend l'équation (1). Ces paramètres dépendent des coordonnées des $p+1$ points doubles, qui par cela sont suffisants pour déterminer la courbe, et, comme ces points sont sur la conique (2), les paramètres arbitraires, servant à déterminer une classe de courbes trigonales, se réduisent au nombre de $p-1$.

Bardelli (*G.*). — [R2*c*β]. Sur les moments d'inertie des solides de rotation. (837-842).

Fano (*G.*). — [H3*c*]. Sur les équations différentielles linéaires du cinquième ordre dont les courbes intégrales sont contenues dans des variétés algébriques. (853-866).

Ce travail se rattache aux recherches de Picard et Vessiot sur le *groupe de rationalité*, et se rapporte au cas où n solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation différentielle donnée, de l'ordre n, sont liées par une ou plusieurs relations homogènes à coefficients constants. Les y_i sont interprétées comme coordonnées d'un point dans un espace S_{n-1}, et le groupe de rationalité est représenté en S_{n-1} par un groupe de collinéations qui transforment en elle-même la variété algébrique représentée par les équations qui lient entre elles les y_i. L'étude des cas qui peuvent se présenter dépend de la détermination des variétés algébriques de S_{n-1} admettant des groupes de transformations projectives en elles-mêmes, et de la composition de ces groupes. Ce travail traite le cas de $n=5$, en supposant que cinq solutions indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_5$ soient liées par une seule équation à coefficients constants, et que l'équation donnée ne soit pas intégrable par des quadratures et des opérations algébriques, c'est-à-dire que le groupe correspondant ne soit pas intégrable (car lorsque le groupe est intégrable, l'intégrabilité de l'équation par des quadratures résulte d'un théorème de Vessiot; et le cas où les solutions sont liées par plus d'une équation est compris dans un cas déjà traité complètement pour n quelconque, celui où la variété renfermant les n solutions est une surface ou une courbe). L'auteur commence par rappeler les variétés à trois dimensions de S_4 qui n'ont qu'un groupe simple ∞^3 de transformations projectives, et donne pour chacun des cas, qui sont au nombre de sept, la réduction correspondante de l'équation donnée. Il trouve ainsi que l'intégration de cette équation peut se réduire à

celle d'une ou de deux équations linéaires du deuxième ordre. Un seul cas fait exception, c'est celui où la relation entre les solutions est quadratique et à déterminant différent de zéro; alors l'intégration peut se réduire à celle d'une équation du quatrième ordre de la forme

$$y^{\text{IV}} + py'' + p'y' + qy = 0.$$

Veneroni (*E.*). — [N, 1*j*]. Sur les complexes du troisième degré formés par des faisceaux de droites. (1008-1016).

Complexes dont tout rayon appartient à un faisceau (au moins) du complexe. Un rayon du complexe ne peut, suivant un théorème de Voss, appartenir à plus de quatre faisceaux. Ici l'auteur étudie les complexes du troisième degré dont tout rayon appartient à un ou à deux faisceaux. Dans un appendice, inséré dans ce même Tome, à la page 1403, il démontre que les cas où un rayon appartienne à trois ou quatre faisceaux ne peuvent se présenter.

Retali (*V.*). — [P6*f*]. Sur une correspondance (m, n). (1051-1056).

Rosati (*C.*). — [Q2]. Sur les espaces linéaires de dimension maximum, contenus dans une quartique base d'un faisceau de quadriques dans un espace de dimension paire. (1267-1273).

Sur la quartique base d'un faisceau de quadriques dans un espace S_{2p+2} il y a des S_p en nombre de 2^{p+2} dont chacun est rencontré par $2p-3$ autres suivant un S_{p-1}, par $\binom{2p-3}{2}$ autres suivant un S_{p-2}, ..., par $\binom{2p-3}{p}$ autres suivant un S_0, et n'est pas rencontré du tout par les autres $\binom{2p-3}{p-1}$.

Ferrini (*R.*). — [T5, 6, 7]. Sur un nouveau système absolu de mesures pour les grandeurs électriques et magnétiques. (1304-1313).

C'est le système proposé par Franz Kerntler : *Die Unität des absoluten Maass-Systems, etc.*, Budapest, 1899.

Veneroni (*E.*). — [N, 1*j*]. Appendice à la Note sur les complexes du troisième degré formés par des faisceaux de droites. (1403-1404).

La Note est celle de ce Tome, à la page 1008.

Severini (*C.*). — [H8]. Sur l'intégration approchée d'une équation linéaire aux dérivées partielles. (1427-1437).

Tome XXXIII, 1900.

Somigliana (*C.*). — [T, 5. 6, 7]. Sur les unités électriques et magnétiques. (119-132).

Il y a un nombre infini de systèmes possibles d'unités absolues pour les grandeurs électriques et magnétiques. Ils dépendent de *deux* paramètres arbitraires. Le système proposé par Kerntler (*Die Unität des absoluten Maass-Systems, etc.*, Leipzig, 1899) rentre dans les systèmes considérés par l'auteur.

Celoria (*G.*). — [V9]. Eugène Beltrami (Commémoration). (241-242).

Somigliana (*C.*). — [V9]. Eugène Beltrami (Commémoration). (242-245).

Pascal (*E.*). — [H6*a*]. Sur les équations aux différentielles totales d'ordre quelconque. (287-297).

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle équation soit *complètement intégrable*, c'est-à-dire ait une intégrale $\varphi = 0$ contenant une fonction arbitraire rationnelle entière de degré $r - 1$.

Dina (*A.*). — [T7*c*]. Sur l'hystérèse magnétique dans un corps ou dans un champ en rotation. Note I (382-397), Note II (430-445), 2 planches.

Ciani (*E.*). — [M4*l*3]. Un théorème sur la quartique de Klein. (565-566).

Enoncé d'un théorème relatif à la quartique invariante par rapport au groupe de 163 collinéations planes. Comme une quartique plane générale est covariante de 36 autres quartiques, et la quartique de Klein est covariante d'elle-même, l'auteur assigne par ce théorème les 35 autres, ainsi que leur relation avec le groupe des collinéations.

Cazzaniga (*T.*). — [C2*h*]. Notes critiques sur la théorie des intégrales curvilignes et de surface. (567-575).

Chini (*M.*). — [H6*b*]. Sur les facteurs intégrants d'une ou de plusieurs formes différentielles de degré n à m variables. (601-618).

Conditions nécessaires et suffisantes $\left[\text{au nombre de } (p+1)\binom{m}{2} - m\right]$ pour que p formes différentielles linéaires à m variables aient des facteurs intégrants communs, et détermination de ces facteurs. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction λ soit un facteur intégrant d'une forme différentielle de degré n est que λ soit un facteur intégrant de certaines $\binom{m+n-2}{m-1}$ formes différentielles linéaires, et par cela la recherche des facteurs intégrants simultanés de plusieurs formes de degrés quelconques se réduit à celle des facteurs intégrants simultanés de plusieurs formes linéaires.

Berzolari (*L.*). — [N⁴2*i*]. Sur les coniques appuyées en plusieurs points à des courbes algébriques données. (664-674).

Énoncés sans démonstration. *Voir* une suite de cette Note à la page 809.

Pascal (*E.*). — [H6*b*]. La théorie des équations aux différentielles totales du troisième ordre. (675-687).

Application aux équations du troisième ordre des résultats obtenus dans la Note précédente du même auteur (*voir* ce Tome, p. 287). Ici l'auteur commence par donner une autre forme à la condition d'intégrabilité complète, en réduisant l'intégration de l'équation donnée à celle d'un système d'équations linéaires aux différentielles totales du premier ordre. Puis il traite le cas où l'équation donnée n'est pas complètement intégrable, c'est-à-dire qu'elle est intégrable par une équation qui ne contient pas le nombre maximum de constantes arbitraires.

Celoria (*G.*) et *Rejna* (*M.*). — [U]. Éclipse solaire du 28 mai 1900. (710-716).

Gigli (*D.*). — [O4*g*α ref. Q1*c*]. Sur les surfaces hélicoïdales et réglées de l'espace elliptique. (717-723).

Amaldi (*U.*). — [B2α]. Sur les substitutions linéaires permutables. (731-744).

Réduction simultanée à forme canonique de deux substitutions linéaires permutables. Cette réduction, donnée par M. Schlesinger [*Ueber vertauschbare lineare Substitutionen* (*Crelle*, t. 121, 1899)], est faite ici par une méthode synthétique employée déjà par M. Pincherle (*voir* ces *Rendiconti*, t. XXIX, 1896 : *Le operazioni distributive e le omografie*). Suit l'application de cette réduction à l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Berzolari (*L.*). — [N⁴2*i*]. Sur les coniques appuyées en plusieurs points à des courbes algébriques données. (809-821).

Énoncés sans démonstration. Suite de la Note insérée dans ce Tome à la page 664.

Severini (*C.*). — [H2]. Sur les équations différentielles ordinaires contenant un paramètre arbitraire. (825-839).

Méthode pour former m polynomes rationnels entiers en x et μ, représentant avec une approximation donnée les intégrales des équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \mu),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \mu).$$

Cette méthode est fondée sur un théorème que l'auteur commence par démontrer :

« Il est possible, et d'un nombre infini de manières, de former un polynome rationnel en x, tel que ce polynome et sa dérivée représentent respectivement en tous les points d'un intervalle (x_1, x_2), avec une approximation donnée, une fonction donnée $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. »

Ciani (*E.*). — [P1 *bz* ref. M1 6]. Les groupes finis de collinéations planes doués d'une quartique invariante irréductible. (1170-1176).

Ils sont :

a. Le G_{168} de Klein;
b. Le G_{96} de Walter Dyck;
c. Le G_{48} de la quartique de Caporali spécialisée;
d. Le G_{16} de la courbe $x_3^2 x_1 x_2 + x_4^4 + x_2^4 = 0$;
e. Les groupes composés par les puissances d'une même collinéation, qui ne sont pas renfermés dans les cas précédents.

S. R.

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY; Rédigées par MM. *E.-H. Moore*, *E.-W. Brown* et *T.-S. Fiske*.

Tome I, 1900.

White (*H.-S.*). — Sur les coniques et les cubiques liées à une cubique plane par certaines relations covariantes. (1-8).

Gordan (*P.*). — Développement, au point de vue de la théorie des formes, des théorèmes contenus dans le Mémoire de M. White sur les courbes de troisième ordre. (9-13).

Goursat (*E.*). — Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy. (14-16).

Moulton (*F.-R.*). — Sur une classe de solutions particulières du problème de quatre corps. (17-29).

Dickson (*L.-E.*). — Sur la définition du groupe linéaire abélien, des deux groupes hypoabéliens et d'autres groupes linéaires comme groupes complémentaires des groupes d'isomorphismes de certains groupes élémentaires. (30-38).

Maschke (*H.*). — Note sur la surface unilatérale de Moebius. (39).

Bôcher (*M.*). — Sur les points singuliers réguliers des équations différentielles linéaires du second ordre dont les coefficients ne sont pas nécessairement analytiques. (50-52).

Bolza (*O.*). — Sur les fonctions sigma elliptiques considérées comme cas spécial des fonctions sigma hyper-elliptiques. (53-65).

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes qui sont les produits directs de deux sous-groupes. (66-71).

Moore (*E.-H.*). — Sur certaines courbes *crinkly*. (72-90).

Dickson (*L.-E.*). — Une définition nouvelle du groupe linéaire abélien général. (91-96).

Morley (*F.*). — Sur la géométrie métrique d'un système plan de n lignes. (97-115).

Chessin (*A.-S.*). — Sur le mouvement relatif. (116-169).

White (*H.-S.*). — Sur les cubiques planes et les cubiques covariantes irrationnelles. (170-181).

Coolidge (*J.-L.*). — Sur une représentation purement géométrique de tous les points du plan projectif. (182-192).

Wilson (*E.-B.*). — Sur la décomposition de la collinéation générale de l'espace en trois réflexions gauches. (193-196).

Maschke (*H.*). — Une méthode nouvelle pour déterminer les paramètres différentiels et les invariants des formes différentielles quadratiques. (197-204).

Hill (*G.-W.*). — Sur l'application de la méthode de Delaunay dans la théorie lunaire au problème général du mouvement des planètes. (205-242).

Campbell (*J.-E.*). — Sur les types d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre en trois variables indépendantes qui ne sont pas changées par les transformations d'un groupe continu. (243-258).

Pupin (*M.-I.*). — Sur la propagation des ondes sur les conducteurs électriques non-uniformes. (259-286).

Krause (*M.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles, qui ont pour solutions des fonctions à quatre périodes. (287-292).

Van Vleck (*E.-B.*). — Sur des conditions linéaires pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. (293-309).

Osgood (*W.-F.*). — Sur l'existence de la fonction de Green pour l'aire simplement connexe la plus générale. (310-314).

Pell (*A.*). — Les lignes D sur les quadriques. (315-322).

Loud (*F.-H.*). — Sur certains théorèmes concernant n lignes d'un plan. (323-338).

Wilczynski (*E.-J.*). — Sur une application de la théorie des groupes à l'hydrodynamique. (339-352).

Dickson (*L.-E.*). — La détermination d'un groupe simple abstrait d'ordre $2^7.3^6.5.7$ holoédriquement isomorphe à un certain

groupe orthogonal et à un certain groupe hyper-abélien. (353-370).

Smith (*P.-F.*). — Sur des surfaces enveloppées par des sphères appartenant à un complexe linéaire sphérique. (371-390).

Hutchinson (*J.-I.*). — Sur certaines relations entre les constantes des fonctions theta. (391-394).

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes qui ont le même groupe d'isomorphismes. (395-401).

Gordan (*P.*). — Sur la courbe de Hesse et celle de Cayley. (402-413).

Bôcher (*M.*). — Sur l'application d'une méthode de d'Alembert à la démonstration des théorèmes de comparaison de Sturm. (414-420).

Blake (*E.-M.*) — Sur deux mouvements plans produisant une surface réglée du quatrième ordre. (421-429).

Kasner (*E.*). — La théorie des invariants du groupe des inversions : la géométrie sur une surface quadrique. (430-498).

Moore (*E.-H.*). — Une démonstration simple du théorème fondamental de Cauchy-Goursat. (499-506).

Notes et Errata : Tome I.

Tome II. 1901.

Wilczynski (*E.-J.*). — Sur les invariants de systèmes d'équations différentielles linéaires. (1-24).

Cajori (*F.*). — Sur les séries divergentes et semi-convergentes dont le produit est absolument convergent. (25-36).

Porter (*M.-B.*). — Sur les points de coïncidence sur les cubiques non singulières d'un système syzygétique. (37-42).

Strong (*W.-M.*). — Note sur les systèmes de nombres non-quaternions. (43-48).

Fields (*J.-C.*). — Sur la réduction de l'intégrale abélienne générale. (49-86).

Hilbert (*D.*). — Sur les surfaces de courbure totale constante. (87-99).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Note sur les fonctions de la forme

$$f(x) \equiv \varphi(x) + d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} + \ldots + d_n,$$

qui dans un intervalle donné diffèrent le moins possible de zéro. (100-102).

Dickson (*L.-E.*) — Sur les formes canoniques de substitutions abéliennes quaternaires dans un champ de Galois arbitraire. (103-138).

Bôcher (*M.*). — Sur certains cas dans lesquels la réduction à zéro du *Wronskien* est une condition suffisante pour la dépendance linéaire. (139-149).

Bôcher (*M.*). — Une démonstration élémentaire d'un théorème de Sturm. (150-151).

Stecker (*H.-F.*). — Sur la détermination des surfaces capables de représentation conforme sur le plan de manière que les lignes géodésiques soient représentées par des courbes algébriques. (152-165).

Osgood (*W.-F.*). — Sur l'existence d'un minimum de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$, x_0 et x_1 étant des points conjugués et sur les géodésiques sur un ellipsoïde de révolution; une revision d'un théorème de Kneser. (166-182).

Stringham (*I.*). — Sur la géométrie des plans dans un espace parabolique à quatre dimensions. (183-214).

Van Vleck (*E.-B.*). — Sur la convergence des fractions continues aux éléments complexes. (215-233).

Smith (*P.-F.*). — Sur la géométrie dans un complexe linéaire sphérique. (234-248).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Une détermination nouvelle des groupes continus primitifs à deux variables. (249-258).

Miller (*G.-A.*). — Détermination de tous les groupes d'ordre p^m contenant les groupes abéliens de type $(m-2, 1)$, p étant un nombre premier quelconque. (259-272).

Osgood (*W.-F.*). — Sur une propriété fondamentale d'un minimum dans le calcul des variations et la démonstration d'un théorème de Weierstrass. (273-295).

Moore (*E.-H.*). — Sur la théorie des intégrales définies impropres de Harnack. (296-330).

Mertens (*F.*). — Sur la transformation linéaire des séries $\mathfrak{Z}$. (331-342).

Wilczynski (*E.-J.*). — La géométrie d'un système de deux équations différentielles homogènes linéaires de second ordre. (343-362).

Dickson (*L.-E.*). — Sur la théorie des groupes linéaires dans un champ arbitraire. (363-394).

Metzler (*W.-A.*). — Sur certains systèmes de mineurs de déterminants. (395-403).

Pringsheim (*A.*). — Sur l'application de la formule de multiplication de Cauchy à des séries semi-convergentes ou divergentes. (404-412).

Pringsheim (*A.*). — Sur la démonstration du théorème de Cauchy par M. Goursat. (413-421).

Bolza (*O.*). — Démonstration nouvelle d'un théorème de M. Osgood dans le calcul des variations. (422-427).

Bôcher (*M.*). — Sur certaines paires de fonctions transcendantales dont les racines se séparent. (428-436).

Mc Donald (*J.-H.*). — Sur le système d'une cubique et d'une quadratique binaire et la réduction des intégrales hyperelliptiques de genre deux à des intégrales elliptiques par une transformation de quatrième ordre. (437-458).

Moore (*E.-H.*). — Sur la théorie des intégrales définies impropres. (459-475).

Van Vleck (*E.-B.*). — Sur la convergence et le caractère d'une certaine forme de fraction continue. (476-483).

Notes et Errata : Tomes I et II. (484-487).

Tome III, 1902.

Hutchinson (*J.-I.*). — Sur une classe de fonctions automorphes. (1-11).

Stecker (*H.-F.*). — Sur l'existence de surfaces capables de représentation conforme sur le plan de manière que les lignes géodésiques soient représentées par un système de courbes donné. (12-22).

Stolz (*O.*). — Sur la définition de la longueur d'un arc et de l'aire d'une surface. (23-37).

Dickson (*L.-E.*). — Les groupes de Steiner dans les problèmes de contact. (38-45).

Hathaway (*A.-S.*). — Sur l'espace des quaternions. (46-59).

Wilczynski (*E.-J.*). — Sur les systèmes réciproques d'équations différentielles linéaires. (60-70).

Haskins (*C.-V.*). — Sur les invariants des formes différentielles quadratiques. (71-91).

Mc Clintock (*E.*). — Sur les fonctions employées dans la détermination des résidus quadratiques. (92-109).

Van Vleck (*E.-B.*). — Détermination du nombre de racines réelles et imaginaires de la série hypergéométrique. (110-131).

Bliss (*G.-A.*). — La seconde variation d'une intégrale définie dont une extrémité est variable. (132-141).

Moore (*E.-H.*). — Sur les axiomes projectifs de la géométrie. (142-158).

Brown (*E.-W.*). — Sur les petits diviseurs dans la théorie de la Lune. (159-185).

Young (*J.-W.*). — Sur les holomorphismes d'un groupe. (186-191).

Moulton (*F.-R.*). — Sur une géométrie simple non-désarguesienne. (192-195).

Bôcher (*M.*). — Sur les solutions réelles de deux équations différentielles linéaires homogènes de premier ordre. (196-215).

Scott (*C.-A.*). — Sur une méthode récente pour traiter les intersections de courbes planes. (216-263).

Huntington (*E.-V.*). — Un système complet de postulats pour la théorie des grandeurs continues en valeur absolue. (264-279).

Huntington (*E.-V.*) — Sur des systèmes complets de postulats pour les théories de nombres positifs intégraux et de nombres positifs rationnels. (280-284).

Dickson (*L.-E.*). — Sur le groupe défini pour un champ donné par la table de multiplication d'un groupe fini quelconque. (285-301).

Stolz (*O.*). — Supplément à l'Ouvrage : *Sur la définition de la longueur d'un arc*, etc. (ce Volume, p. 23 ff.). (302-304).

Bolza (*O.*). — Démonstration de la suffisance de la condition de Jacobi pour le signe permanent de la seconde variation dans les problèmes isopérimétriques. (305-311).

Hawkes (*H.-E.*). — Sur les nombres hyper-complexes. (312-330).

Fite (*W.-B.*). — Sur les groupes métabéliens. (331-353).

Eisenhart (*L.-P.*). — Sur les congruences linéaires conjuguées. (354-371).

Lehmer (*D.-N.*). — Théorie constructive de la cubique unicursale par la méthode synthétique. (372-376).

Dickson (*L.-E.*). — Les groupes de Steiner dans les problèmes de contact (second Mémoire). (377-382).

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes d'ordre p^m contenant des éléments d'ordre p^{m-2}. (383-387).

Scott (*C.-A.*). — Sur les circuits de courbes planes. (388-398).

Scott (*C.-A.*). — Note sur les points d'inflexion réels de courbes planes. (399-400).

Hadamard (*J.*). — La théorie des plaques élastiques planes. (401-422).

Wilczynski (*E.-J.*). — Les covariants de systèmes d'équations différentielles linéaires et les applications à la théorie des surfaces réglées. (423-450).

Gale (*A.-S.*). — Sur le rang, l'ordre et la classe de courbes minima algébriques. (451-466).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Sur la détermination de la distance entre deux points dans un espace à m dimensions. (467-481).

Maschke (*H.*). — Sur les surfaces quadriques super-osculant. (482-484).

Moore (*E.-H.*). — Une définition de groupes abstraits. (485-492).

Emch (*A.*). — Les transformations algébriques d'une variable complexe réalisable par des systèmes articulés. (493-498).

Notes et errata : Tomes I, II, III. (499-501).

Tome IV, 1903.

Morley (*F.*). — Les propriétés ortho-centrales de n lignes dans le plan. (1-12).

Dickson (*L.-E.*). — Définitions d'un champ par des postulats indépendants. (13-20).

Dickson (*L.-E.*). — Définitions d'une algèbre aux nombres hypercomplexes par des postulats indépendants. (21-26).

Huntington (*E.-V.*). — Deux définitions d'un groupe abélien par des postulats indépendants. (27-30).

Huntington (*E.-V.*). — Définitions d'un corps par des systèmes de postulats indépendants. (31-37).

Haskins (*C.-N.*). — Sur les invariants de formes différentielles d'ordre supérieur à deux. (38-43).

Lœwy (*A.*). — Sur la réductibilité de groupes de substitutions linéaires homogènes. (44-64).

Coble (*A.-B.*). — La courbe de quatrième ordre par rapport aux coniques. (65-85).

Kasner (*E.*). — Les théories cogrédientes et digrédientes des formes binaires multiples. (86-102).

Allardice (*R.-E.*). — Sur les enveloppes des axes d'un système de coniques passant par trois points. (103-106).

Osgood (*W.-F.*). — Une courbe de Jordan avec aire positive. (107-112).

Darwin (*G.-H.*). — La détermination approximative de la forme du sphéroïde de Maclaurin. (113-133).

White (*H.-S.*). — Sur les courbes gauches de troisième ordre ayant une directrice. (134-141).

Heffter (*L.*). — Les intégrales sur une courbe dans l'espace à m dimensions. (142-148).

Kasner (*E.*). — Le problème de Beltrami généralisé concernant la représentation géodésique. (149-152).

Miller (*G.-A.*). — Sur l'holomorphe d'un groupe cyclique. (153-160).

Coolidge (*J.-L.*). — Surfaces quadriques dans un espace hyperbolique. (161-170).

Lœwy (*A.*). — Sur la réductibilité de groupes réels de substitutions linéaires homogènes. (171-177).

Ford (*W.-B.*). — Sur la possibilité de différentier terme à terme les développements d'une fonction arbitraire d'une variable réelle en fonctions de Bessel. (178-184).

Wilczynski (*E.-J.*). — Sur une certaine congruence associée avec une surface réglée donnée. (185-200).

Westlund (*J.*). — Sur le *class number* du champ cyclotomique $k(e^{2\pi i/p^n})$. (201-212).

Kasner (*E.*). — Sur le point-ligne considéré comme élément de l'espace; une étude du connexe bilinéaire correspondant. (213-233).

Brown (*E.-W.*). — Sur la formation des dérivées des coordonnées lunaires par rapport aux éléments. (234-248).

Epsteen (*S.*). — Sur les groupes réductibles. (249-250).

Shaw (*J.-B.*). — Théorie de systèmes de nombres hypercomplexes. (251-287).

Morley (*F.*). — Coordonnées projectives. (288-296).

Van Vleck (*E.-B.*). — Sur une extension du Mémoire de Stieltjes de 1894. (297-332).

Brown (*E.-W.*). — Sur la variation des constantes arbitraires et données dans les équations de la Dynamique. (333-350).

Manning (*W.-A.*). — Les groupes primitifs de classe $2p$ contenant une substitution d'ordre p et de degré $2p$. (351-357).

Huntington (*E.-V.*). — Systèmes complets de postulats pour la théorie des quantités réelles. (358-370).

Dickson (*L.-E.*). — Sur les sous-groupes d'ordre égal à une puissance de p dans le groupe quaternaire abélien dans le corps de Galois d'ordre p^n. (371-386).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Sur l'ordre des groupes linéaires homogènes. (387-397).

Miller (*G.-A.*) et *Moreno* (*H.-C.*). — Groupes non abéliens dans lesquels tous les sous-groupes sont abéliens. (398-404).

Shaw (*J.-B.*). — Sur les systèmes de nombres complexes nilpotents. (405-422).

Merrill (*H.-A.*). — Sur les solutions d'équations différentielles possédant un théorème d'oscillation. (423-433).

Dickson (*L.-E.*). — Sur la réductibilité de groupes linéaires. (434-436).

Epsteen (*S.*). — Sur les systèmes de nombres hyper-complexes demi-réductibles. (437-444).

Maschke (*H.*). — Théorie symbolique des invariants de formes différentielles de second ordre à n variables. (445-469).

Eisenhart (*L.-P.*). — Congruences de courbes. (470-488).

Bromwich (*T.-J.-I.*) — Coniques semblables passant par trois points. (489-492).

Tome V, 1904.

Dickson (*L.-E.*). — Les sous-groupes d'ordre égal à une puissance de 2 du groupe orthogonal quinaire simple dans le corps de Galois d'ordre $p^n = 8l \pm 3$. (1-38).

Hun (*J.-C.*). — Sur certains invariants de deux triangles. (39-55).

Kasner (*E.*). — Systèmes isothermes de géodésiques. (56-60).

Lœwy (*A.*). — Sur la théorie des groupes avec des applications à la théorie des équations différentielles homogènes linéaires. (61-80).

Young (*J.-W.*). — Sur le groupe de signature (0, 3; 2, 4, ∞) et les fonctions y appartenant. (81-104).

Epsteen (*S.*). — Sur la définition des systèmes réductibles de nombres hyper-complexes. (105-109).

Goursat (*E.*). — Une démonstration simple d'un théorème du calcul des variations. (110-112).

Bliss (*G.-A.*). — Un théorème d'existence pour une équation différentielle de second ordre, avec une application au calcul des variations. (113-125).

Dickson (*L.-E.*). — Détermination de tous les sous-groupes du groupe simple connu d'ordre 25 920. (126-166).

Haskins (*C.-N.*). — Sur les invariants des formes différentielles quadratiques. (167-192).

Roe (*E.-D.*). — Sur les coefficients dans le produit d'un alternant par une fonction symétrique. (193-213).

Cole (*F.-N.*) — Les groupes d'ordre $p^\alpha q^\beta$. (214-219).

Mason (*M.*). — Le théorème et les fonctions de Green pour certains systèmes d'équations différentielles. (220-225).

Wilczynski (*E.-J.*). — Études dans la théorie générale des surfaces. (226-252).

Van Vleck (*E.-B.*). — Sur la convergence des fractions continues algébriques dont les coefficients ont les valeurs limites. (253-262).

Findlay (*W.*). — Les sous-groupes de Sylow du groupe total. (263-278).

Brown (*E.-W.*). — Sur les petites perturbations dans les arguments lunaires. (279-287).

Huntington (*E.-V.*). — Systèmes de postulats indépendants pour la logique algébrique. (288-309).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Sur l'ordre du groupe linéaire homogène (deuxième Mémoire). (310-325).

Shaw (*J.-B.*). — Des algèbres définies par des groupes finis. (326-342),

Veblen (*O.*). — Un système d'axiomes pour la Géométrie. (343-384).

Macaulay (*F.-S.*). — Sur une méthode pour traiter les intersections de courbes planes. (385-410).

Peirce (*J.-M.*). — Sur certains systèmes complets d'expressions de quaternions et sur le calcul de quaternions sans des limitations métriques. (411-420).

Eisenhart (*L.-P.*). — Trois systèmes particulaires de courbes sur une surface. (421-437).

Wilczynski (*E.-J.*). — Sur les surfaces réglées dont la courbe flecnodale coupe chaque génératrice en deux points coïncidents. (438-446).

Hutchinson (*J.-I.*). — Sur les fonctions automorphes du groupe (0, 3; 2, 6, 6). (447-460).

Blichfeldt (*H.-F.*). — Un théorème concernant les invariants de groupes linéaires homogènes avec des applications aux groupes de substitutions. (461-466).

Morley (*F.*). — Sur la géométrie dont l'élément est un système de trois points d'un plan. (467-476).

Bliss (*G.-A.*). — Les conditions suffisantes pour un minimum par rapport à une variation unilatérale. (477-492)

Fréchet (*M.*). — Sur les opérations linéaires. (493-499).

Rietz (*H.-L.*). — Sur les groupes dans lesquels certaines opérations commutatives sont conjuguées. (500-508).

Taber (*H.*). — Sur des systèmes de nombres hyper-complexes (premier Mémoire). (509-548).

Notes et errata; Tomes I, III, IV, V.

J.-W. Young.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série, Tome XXI; 1904 [1].

Vessiot (*E.*). — Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations. (9-85).

Introduction. — L'objet principal de cette étude est l'extension de la célèbre théorie de Galois, pour les équations algébriques, aux équations linéaires aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial x}{\partial t_i} = 0 \tag{1}$$

et aux systèmes complets de telles équations. Cette extension a été indiquée par M. Drach dans sa thèse; mais, à cause de certaines lacunes dans les énoncés et les démonstrations, il nous a paru utile de reprendre la question, afin d'arriver à des résultats bien précis....

La méthode que nous avons employée est tout analytique. Nous l'avons exposée d'abord, sur la théorie de Galois elle-même, dans un premier Chapitre. En voici le principe :

Étant donnée une équation algébrique, que l'on considère comme remplacée par le système (S) des relations entre les racines $x_1, \ldots, x_n$ et les coefficients, on étudie d'abord le problème fondamental suivant : *Quel parti peut-on tirer de la connaissance de certaines relations* (A) *entre* $x_1, \ldots, x_n$, *en n'employant que des opérations rationnelles?* Nous montrons que l'on peut déduire du système [S, A] un système analogue, dont le système [S, A] admet toutes les solutions, et qui est, comme nous disons, *automorphe :* ce qui veut dire que ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions d'un groupe G, qui est dit le *groupe associé au système*, ou simplement le *groupe du système*. On remarquera que (S) est déjà un système automorphe, ayant le groupe général pour groupe associé.

Dès lors, si l'on se place au point de vue de Galois, c'est-à-dire si l'on cherche à classer toutes les relations rationnelles en $x_1, \ldots, x_n$ existant pour une équation algébrique donnée, on voit que l'on peut se limiter à ne considérer que des systèmes [S, A] rationnels et automorphes. Et l'on arrive, presque

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX, p. 19.

immédiatement, au résultat suivant, qui n'est qu'une forme du théorème de Galois :

Il existe un système [S, A] *automorphe et rationnel, tel que tout système* [S, A] *rationnel* (*automorphe ou non*) *en admet toutes les solutions, dès qu'il en admet une : le groupe de ce système est le groupe de rationalité* (*groupe de Galois*) *de l'équation.*

Il est au reste facile de déduire, de cet énoncé, l'énoncé classique de Galois....

Dans un second Chapitre, nous appliquons la même méthode aux équations différentielles ordinaires, linéaires et homogènes. Nous complétons ainsi, de manière à la rendre entièrement rigoureuse, la démonstration que nous avions donnée autrefois, dans notre thèse, de la double propriété du groupe de rationalité de l'équation. Nous montrons l'équivalence de l'énoncé que nous avions donné, convenablement interprété, et de l'énoncé de M. Picard.

La même marche s'appliquerait plus généralement à des systèmes automorphes d'équations différentielles, ordinaires ou aux dérivées partielles, pourvu que le groupe associé au système considéré (c'est-à-dire qui, effectué sur les fonctions inconnues, échange les solutions entre elles) soit un groupe de transformations fini, dont la transformation générale soit définie par des équations rationnelles....

Dans le troisième Chapitre, nous commençons à nous occuper des équations (1). Nous traitons le problème préliminaire fondamental, c'est-à-dire que nous substituons à l'équation (1) le système (S) des relations différentielles liant à $t, t_1, \ldots, t_n$ les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui constituent n intégrales indépendantes de (1), c'est-à-dire une *solution* quelconque de (1); et nous cherchons à tirer parti, par des opérations rationnelles, de la connaissance d'équations différentielles (A), satisfaites par certaines de ces solutions.

On arrive à définir un ensemble, en général infini, de systèmes automorphes dont les groupes associés sont du même type et entre lesquels se répartissent les solutions du système [S, A]. Mais aucun de ces systèmes automorphes n'est rationnel, en général.

On se trouve donc en présence d'une difficulté toute nouvelle. Nous l'avons tournée en montrant que l'on peut former rationnellement un système automorphe, dont le groupe soit encore du même type, qui n'admette que des solutions de (S), et qui admette une solution de (S) se réduisant, pour $t = t_0$, à des fonctions rationnelles de $t_1, \ldots, t_n$ supposées données.

Le dernier Chapitre est consacré à la discussion de la théorie esquissée par M. Drach. D'après ce qui précède, on voit que les simplifications qui peuvent se produire dans l'intégration d'une équation (1) donnée ne sont pas de la même nature pour les diverses solutions de l'équation. On obtient, dans tous les cas, les simplifications les plus grandes, en se bornant aux solutions principales, c'est-à-dire dans lesquelles $x_1, \ldots, x_n$ se réduisent, pour une valeur particulière $t = t_0$ de t à $t_1, \ldots, t_n$ respectivement. Nous arrivons pour elles à l'énoncé suivant, qui est l'analogue du théorème de Galois :

Parmi tous les systèmes rationnels [S, A], *admettant une même solution principale, il en existe un, qui est automorphe, et dont chacun des autres*

admet toutes les solutions. Son groupe est le groupe de rationalité de l'équation. Les groupes de rationalité correspondant à diverses solutions principales sont semblables.

Nous indiquons diverses autres formes de cet énoncé; nous montrons aussi comment il faut le modifier pour l'appliquer à une solution quelconque....

Tous ces résultats s'étendraient sans peine à des systèmes complets d'équations (1). Nous avons, pour abréger, laissé de côté cette généralisation....

Floquet (*G.*). — Sur la représentation des fonctions elliptiques. (87-98).

L'objet de ce Mémoire est la représentation générale d'une fonction elliptique d'ordre m par le quotient de deux expressions linéaires par rapport à $\wp(u-h)$ et à ses dérivées des premiers ordres, h désignant une constante convenable.

A cet effet, l'auteur considère d'abord l'expression

$$\varphi(u) = A + A_0 \wp(u-h) + A_1 \wp'(u-h) + \ldots + A_{m-2} \wp^{(m-2)}(u-h)$$

et détermine les constantes qui y figurent de manière que $\varphi(u)$ admette m zéros donnés $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans un parallélogramme de périodes. On voit d'abord que la constante h est susceptible de plusieurs valeurs en nombre $\leq m^2$, puisque son produit par m est congruent à la somme des affixes des zéros donnés. Une fois h choisi, les constantes A sont déterminées, à un facteur près, par des équations du premier degré.

Soit maintenant

$$\psi(u) = B + B_0 \wp(u-h) + B_1 \wp'(u-h) + \ldots + B_{m-2} \wp^{(m-2)}(u-h)$$

une expression composée comme $\varphi(u)$, et dans un même parallélogramme des périodes, deux groupes de m points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et $b_1, b_2, \ldots, b_m$, ces derniers différant tous des premiers, mais ayant leur somme congruente à celle des a. On veut que la fonction elliptique

$$f(u) = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$$

admette les m points a comme zéros et les m points b comme pôles.

Le nombre des fonctions $f(u)$ distinctes qui répondent à la question est toujours égal à m^2. L'auteur donne le moyen d'obtenir ces m^2 fonctions qui sont déterminées à un facteur constant près.

De là résulte la solution du problème proposé. Le Mémoire se termine par une application aux fonctions elliptiques du second ordre.

Duhem (*P.*). — Recherches sur l'élasticité. Première Partie : De l'équilibre et du mouvement des milieux vitreux. (99-139).

Introduction. — La plupart des travaux dont la théorie de l'élasticité a été l'objet se bornent à étudier des corps dont les déformations sont extrêmement petites, soit que leurs divers points matériels demeurent immobiles, soit qu'un mouvement de très faible amplitude les anime.

La limite qui restreint ainsi les problèmes étudiés ne constitue pas une

entrave gênante lorsqu'on se propose seulement d'analyser les modifications des corps très peu déformables auxquels on réserve le nom de *solides élastiques;* mais elle rend inutilisables les résultats obtenus par le théoricien, lorsque celui-ci se propose d'étudier ces corps mous ou pâteux qui forment la transition entre les fluides et les solides; il est alors indispensable de formuler des lois applicables aux milieux qui ont subi des déformations finies.

G. Kirchhoff et M. J. Boussinesq nous ont fait connaître les lois qui président à l'équilibre de semblables milieux, du moins lorsque leurs éléments sont simplement soumis à des *actions newtoniennes.* Il était intéressant d'étendre leur analyse au cas beaucoup plus général et insoupçonné avant nos recherches sur la mécanique des fluides, où les masses élémentaires qui composent le milieu sont soumises à des *actions non newtoniennes;* le présent Mémoire apporte ce complément aux recherches de nos illustres prédécesseurs et met en évidence, dans le cas où les actions ne sont pas newtoniennes, l'existence des *couples élémentaires* auxquels les actions newtoniennes ne sauraient donner naissance.

Les lois du mouvement de milieux affectés de déformations finies se tireraient des lois qui président à leur équilibre au moyen du principe de d'Alembert, si les milieux étudiés n'étaient affectés d'aucune viscosité; mais les corps mous et pâteux, qui offrent à cette analyse ses plus intéressantes applications, sont, en même temps, dans la plupart des cas, des corps très visqueux; il serait illusoire d'en étudier les mouvements si l'on devait faire abstraction de leur viscosité. Nous sommes donc naturellement conduits à préciser les lois auxquelles obéit la viscosité au sein de milieux élastiques.

Ce problème n'a tenté jusqu'ici, à notre connaissance, que les efforts d'un seul analyste, M. Oskar-Emil Meyer. Mais les recherches de M. Meyer se sont bornées aux mouvements très petits d'un corps isotrope à la fois élastique et visqueux; en outre, elles reposent sur certaines hypothèses moléculaires que nous nous gardons toujours d'invoquer. Il y avait donc lieu de créer les formules qui régissent les actions de viscosité au sein de milieux élastiques affectés de déformations finies. C'est l'un des principaux objets du présent Mémoire.

Ces formules nous ont permis d'obtenir certains résultats; en particulier, elles nous ont permis d'étendre à tous les milieux élastiques visqueux, qu'ils soient vitreux ou cristallisés, une proposition que nous avions déjà démontrée pour les fluides visqueux : *Les seules ondes qui puissent persister en un milieu visqueux sont des ondes sans propagation, qui séparent sans cesse les deux mêmes portions du milieu.*

D'ailleurs, l'emploi de méthodes semblables à celles dont nous avions fait usage dans l'étude des fluides nous a permis de donner, de la propagation des ondes au sein des milieux élastiques non visqueux, une analyse qui ne laisse place à aucun cas d'exception.

Les milieux que nous avons étudiés ont toujours été supposés dénués d'hystérésis; la possibilité des déformations permanentes a donc été exclue, ce qui restreint la généralité de notre analyse et la portée expérimentale des résultats obtenus. Mais les formules cinématiques qui nous ont permis d'étudier la viscosité des milieux élastiques nous permettront également d'étendre à de tels milieux les principes de notre théorie des déformations permanentes.

Picard (Émile). — Sur certains développements en séries déduits

de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires. (141-151).

Cette leçon, détachée de l'enseignement de M. Picard, a pour objet principal la démonstration du théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

on considère l'intégrale Y *qui prend pour* $x = x_0$ *la valeur* y_0. *On suppose que,* x *croissant à partir de* x_0, *la fonction* Y *soit continue tant que* x *ne dépasse pas* $x_0 + b$ *et que, de plus, pour chacune des valeurs* (x, Y) *qui correspondent à l'intégrale considérée, la fonction* f *ne cesse pas, pour un petit domaine autour de* (x, Y), *de remplir les conditions dites de Lipschitz. Dans ces conditions, la méthode de Cauchy est valable dans tout l'intervalle* $x_0 x$, *où l'intégrale est continue.*

Le résultat précédent s'applique encore à un système d'équations

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où les fonctions F_i satisfont aux conditions de Lipschitz. Il donne lieu à une conséquence importante : *Si les* F_i *sont indépendantes de* x *et sont des polynomes par rapport aux* y, *les fonctions* y *pourront être représentées par des séries dont les termes seront des polynomes en* x. Tel est, entre autres, le cas des équations du mouvement d'un corps solide pesant mobile autour d'un point fixe et d'équations plus générales dont M. Volterra a montré l'intérêt dans certains problèmes de Dynamique.

Grâce à une nouvelle extension de ses résultats, M. Picard prouve que *les équations différentielles du problème de p points se repoussant en raison inverse de la* $\mu^{\text{ième}}$ *puissance de la distance* $(\mu > 1)$ *s'intègrent par des séries convergentes pour toute valeur du temps.*

L'extension donnée par l'auteur à la méthode de Cauchy est valable dans le cas où l'on a des fonctions analytiques et où la variable est complexe. En particulier pour les équations dont les seconds membres ne contiennent pas la variable et sont des polynomes par rapport aux fonctions inconnues, on pourra représenter les intégrales par des séries de polynomes *qui seront convergentes dans le domaine que M. Mittag-Leffler appelle une étoile.* On remarquera que, pour les équations différentielles du type précité, les développements de M. Mittag-Leffler se déduisent tout naturellement du procédé élémentaire et classique par lequel Cauchy démontre l'existence des intégrales.

Cartan (*E.*). — Sur la structure des groupes infinis de transformations. (153-206).

Ce Mémoire a pour but de donner une base nouvelle à la théorie de la structure des groupes de transformations continus définis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Il est divisé en quatre Chapitres, dont les deux premiers seuls sont publiés dans ce Volume.

Le Chapitre I, consacré à la théorie du système de Pfaff en involution, peut être considéré comme le complément d'un Mémoire précédent de l'auteur sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales (*Annales de l'École Normale*, année 1901).

Au Chapitre II, M. Cartan définit tous les groupes continus au moyen d'un certain nombre d'expressions de Pfaff et introduit les constantes caractéristiques de la structure du groupe; il énonce et démontre les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire ces constantes.

Voronoï (*Georges*). — Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries. (207-267, 457-533).

La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin et la formule de Fourier pour le développement des fonctions en série trigonométrique ont leur origine commune dans l'identité suivante :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=a}^{n=b} f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n=a}^{n<b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_a^b f(x)\cos 2\pi n x\,dx,$$

valable à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$ et ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima.

Dans les recherches relatives à la sommation des séries multiples, on rencontre souvent des sommes qui dépendent de fonctions discontinues; alors la formule d'Euler-Maclaurin n'est plus applicable et l'on ne parvient, en général, au résultat qu'à l'aide d'artifices particuliers. Le plus simple de ces problèmes est celui dont M. Voronoï formule comme suit la solution :

Étant données une fonction analytique $f(x)$ et une fonction numérique $\tau(n)$ qui n'est déterminée que pour les valeurs entières de l'argument n, la somme

$$\frac{1}{2}\sum_{n=a}^{n=b} \tau(n) f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n\geq a}^{n<b} \tau(n) f(n)$$

peut être développée en une série infinie

$$(S) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathfrak{Z}(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(x)\,\alpha(nx)\,dx$$

pourvu que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$ et ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima. $\mathfrak{Z}(x)$ et $\alpha(x)$ sont deux fonctions analytiques qui ne dépendent que de la fonction numérique $\tau(n)$.

Le but final du présent Mémoire est de démontrer le théorème dans le cas où la fonction $\tau(n)$ est le nombre des diviseurs de l'entier positif n, en établissant

2ud Partie.

qu'on peut alors poser dans la série (S)

$$\mathfrak{z}(x) = \log x + 2C,$$
$$\mathfrak{x}(x) = 2\xi(4\pi^2 x) - 2\eta(4\pi^2 x),$$

C désignant la constante d'Euler et $\xi(x)$, $\eta(x)$ étant les deux fonctions de Bessel qui vérifient les équations linéaires

$$x\xi'' + \xi' - \xi = 0, \qquad x\eta'' + \eta' + \eta = 0.$$

La première Partie du Mémoire est consacrée à l'étude des fonctions ξ et η que l'auteur définit, la première par la relation

$$\xi = 2\int_1^\infty \frac{e^{-t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-1}}\,dx,$$

la partie réelle de $\sqrt{x}$ étant supposée positive, la seconde par la formule

$$\eta(x) = \lim_{\rho=0} \frac{\xi(-x+\rho i) - \xi(-x-\rho i)}{i},$$

avec $x > 0$, $\rho > 0$. La fonction ξ est dite *fonction ultra-exponentielle*, pour rappeler la propriété qu'exprime l'équation

$$\Gamma^2(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\xi(x)\,dx,$$

tandis qu'avec l'exponentielle e^{-x} on a

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

La seconde Partie, spécialement consacrée à la sommation des séries qui dépendent du nombre des diviseurs de l'entier positif n, aboutit à la justification du résultat énoncé plus haut et à l'établissement d'une formule qui généralise la célèbre formule sommatoire de Poisson.

Mezais (*R.*). — Sur la réduction d'un système de substitutions linéaires d'ordre k. (269-295).

L'auteur a étudié dans sa thèse une classe de fonctions hyperfuchsiennes et leur groupe de substitutions. Ces substitutions, mises sous la forme homogène

$$(1)\qquad \begin{cases} u' = A_0 u + B_0 v + C_0 w, \\ v' = A_1 u + B_1 v + C_1 w, \\ w' = A_2 u + B_2 v + C_2 w, \end{cases}$$

ont pour coefficients $A_0, \ldots, C_2$ des entiers complexes $a + b\lambda$, où λ est une racine cubique imaginaire de l'unité. Elles transforment en elle-même la forme quadratique

$$\Gamma = uu_1 + vv_1 + ww_1,$$

où $u, u_1; v, v_1; w, w_1$ sont trois couples d'indéterminées conjuguées.

Il étudie maintenant les substitutions de même nature qui reproduisent la forme F multipliée par un entier réel k.

Cet entier ne peut pas être choisi arbitrairement: il est de l'une des formes $3m - 1$ et $3(3m + 1)$. En supposant k premier et de la forme $3m + 1$, M. Picard (*Comptes rendus*, 1889) a effectué la réduction des substitutions U d'ordre k.

M. Alezais étudie complètement l'hypothèse $k = 3$. On sait que le nombre N des substitutions non équivalentes d'ordre k joue un rôle important dans la théorie des fonctions hyperfuchsiennes; soient, en effet, $J_1(u, v, w)$ et $J_2(u, v, w)$ deux de ces fonctions, admettant pour groupe de substitutions celui des substitutions semblables de F; si $J_3(u, v, w)$ est ce que devient la fonction J_1 quand on effectue sur elle la substitution U d'ordre k, il existe, d'après un théorème de M. Picard, une équation algébrique entre les trois fonctions J_1, J_2, J_3 et le degré de cette équation algébrique par rapport à J_3 est précisément égal à N. C'est pour $k = 3$ que ce degré aura la plus petite valeur possible.

La discussion complète à laquelle l'auteur procède le conduit à cette conclusion que toutes les substitutions U d'ordre 3 se ramènent à douze d'entre elles. Dans un Tableau final on trouvera un système de représentants des douze classes avec leurs expressions sous la forme U_1T, où U_1 est la plus simple des substitutions considérées d'ordre 3 et T une substitution d'ordre 1.

Riquier (*Ch.*). — Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales correspondant à des conditions initiales données. (297-373).

Introduction. — Les résultats du présent Mémoire, communiqués à l'Académie des Sciences le 12 janvier 1903, peuvent se résumer comme il suit.

Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, faisons correspondre un entier, positif, nul ou négatif, que nous nommerons la *cote* de cette quantité; puis, considérant une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions $u, v, \ldots$, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction celles des r variables de différentiation....

D'autre part, étant donné un système différentiel *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées*, convenons de dire qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique*.

Cela posé, considérons un système différentiel satisfaisant à la double condition ci-après :

1° Le système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées et, si l'on partage les équations en groupes

suivant que leurs premiers membres appartiennent à telle ou telle inconnue, aucun des groupes ainsi obtenus ne contient plus d'une équation;

2° Les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale et, moyennant l'attribution aux variables indépendantes de cotes toutes égales à 1 et aux fonctions inconnues de cotes déterminées, chacun d'eux ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.

Un système de cette espèce étant donné, pour que les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement et soient uniques, il suffit que certaines fonctions (en nombre limité) des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques présentent, pour des valeurs numériques initiales de leurs arguments, des modules satisfaisant à certaines inégalités.

Considérons, par exemple, le cas très simple de l'équation aux dérivés partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

et supposons qu'il s'agisse de déterminer un ensemble de conditions suffisantes pour l'existence d'une intégrale (unique) répondant à des conditions initiales données. Je désignerai par A et B les dérivées partielles du second membre f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, par A_0 et B_0 les valeurs numériques initiales de A et B et je rappellerai que divers géomètres ont successivement assigné comme condition suffisante à l'existence de l'intégrale :

1° La nullité identique des deux fonctions A, B; ce résultat a été formulé pour la première fois par M. Picard, dans un Mémoire célèbre paru en 1890; il se trouve également contenu, comme cas particulier, dans des recherches publiées la même année par M. Méray avec ma collaboration;

2° La nullité identique de l'une ou l'autre des fonctions A, B; c'est là une application particulière de mes recherches sur les systèmes *orthonomes*, dont j'ai commencé la publication en 1891;

3° La nullité numérique de l'une ou l'autre des valeurs initiales A_0, B_0; ce résultat a été indiqué par M. Goursat dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 2 novembre 1897.

Ceci étant rappelé, si l'on applique à l'équation (1) la méthode exposée dans le présent Mémoire, on trouve comme condition suffisante la simple inégalité numérique

$$\operatorname{mod}(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

Duhem (*P.*). — Recherches sur l'élasticité. Deuxième Partie : Les milieux vitreux peu déformés. (375-414).

Les considérations développées dans la première Partie de ces recherches (*voir* ci-dessus) montrent de quelle manière on peut logiquement mettre en équations les problèmes relatifs à l'équilibre et au mouvement d'un milieu

vitreux. Mais cette mise en équations exige, avant tout, la résolution d'une équation du troisième degré.

C'est donc seulement dans certains cas particuliers où l'on aura, par des hypothèses convenables, grandement simplifié le problème, que l'on pourra le mettre effectivement en équations.

Aussi M. Duhem traite-t-il, en cette seconde Partie, un cas particulièrement simple qui est défini de la façon suivante :

1° Les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont newtoniennes;

2° Les déplacements ξ, η, ζ du point primitivement placé en (a, b, c) et leurs dérivées partielles de tous les ordres par rapport à a, b, c et au temps sont partout et toujours assez petits pour qu'on puisse, dans les calculs, les traiter comme des infiniment petits du premier ordre.

Desaint (*L.*). — Les séries de Taylor et la représentation exponentielle. (§§15-§§8).

L'étude présente à son origine dans les résultats d'une méthode employée par Laguerre, appliquée par Stieltjes, et dont M. Le Roy a fait usage dans ses recherches sur les points singuliers. L'auteur considère la suite

$$A(1),\ A(2),\ \ldots,\ A(n),\ \ldots$$

des coefficients du noyau taylorien

$$F(z) = \sum A(n) z^n$$

comme les valeurs que prend pour x entier et positif une fonction analytique $A(x)$ qui peut, comme on sait, être supposée entière. En outre, il se place dans le cas où il suffit de remplacer n par x dans le coefficient $A(n)$ pour avoir une fonction analytique et se propose, *étant donnée la fonction* $A(x)$, *d'en déduire l'ensemble des points singuliers de la fonction* $F(z)$.

Il faut, pour que le problème ait un sens, que la fonction $F(z)$ soit analytique; on suppose, en outre, que cette fonction n'admet pas sur son cercle de convergence comme coupure; il suit de là que la fonction $A(x)$ n'est pas la fonction entière la plus générale possible, sans quoi le cercle de convergence de $F(z)$ serait une coupure.

L'ensemble des coefficients $A(1), \ldots, A(n)$ n'a d'influence véritable sur l'ensemble des points singuliers de $F(z)$ que pour les valeurs infinies de n, de sorte que *c'est du point à l'infini de* $A(x)$ *que sortent les points singuliers* de $F(z)$.

Ce point, d'ailleurs, doit être supposé point singulier essentiel de $A(x)$. Si, en effet, le rayon de convergence de la série dont $A(n)z^n$ est le terme général ne se réduit pas à zéro, on peut supposer que ce rayon est égal à 1 et que la série est valable sur son cercle de convergence. Dans ces conditions, si l'infini est régulier pour $A(x)$, la fonction $F(x)$ ne possède dans tout le plan, comme l'a montré M. Leau, d'autre point singulier que le point $z = 1$. Si l'infini est un pole de $A(x)$, la même conclusion subsiste.

Supposons donc que le point infini est un point essentiel de la fonction $A(x)$. M. Desaint se sert de la *représentation exponentielle* de cette fonction, c'est-à-dire de son expression par une intégrale double portant sur un terme expo-

nentiel) pour déterminer les points singuliers de la fonction $F(z)$ dans les trois cas suivants :

1° Le secteur d'holomorphisme de $A(x)$ est fini (non nul), mais inférieur à 180° ;

2° Ce secteur est d'ouverture au moins égale à 180° ;

3° Ce secteur se compose du demi-plan à droite d'une parallèle à l'axe des quantités imaginaires.

Pour définir le *secteur d'holomorphisme*, on suppose qu'il existe un angle *fini* dont le sommet S est sur l'axe des quantités réelles et comprend la portion de cet axe qui s'étend de S à $-\infty$, et que la fonction $A(x)$ est holomorphe à l'intérieur de cet angle, finie et continue sur ses deux côtés ; c'est le secteur d'holomorphisme.

Dans le premier cas, la fonction $F(z)$ n'a sur son cercle de convergence qu'un seul point singulier $z=1$; dans le second, la fonction $F(z)$ n'admet qu'un seul point singulier à distance finie ; dans le troisième, la fonction $F(z)$ a ses points singuliers sur la partie de l'axe des quantités réelles qui s'étend de $z=1$ à $+\infty$.

Le Mémoire se termine par diverses propositions relatives au mode d'existence d'une fonction autour d'un de ses points singuliers essentiels.

Nielsen (*Niels*). — Sur la représentation asymptotique d'une série de factorielles. (449-458).

La série de factorielles que l'auteur considère est de la forme

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{x(x-1)\ldots(x+s)},$$

les coefficients b étant indépendants de x. Il se propose d'en obtenir une représentation asymptotique.

Définissant des nombres K_{q+1}^p par la relation

$$q!\,K_{q+1}^p = C_q^0 q^{p+q} - C_q^1 (q-1)^{p+q} + \ldots + (-1)^{q-1} C_q^{q-1},$$

où C_q^n est le nombre des combinaisons de q objets n à n, il forme la série

$$S_n = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots,$$

dont les coefficients se déterminent comme suit :

$$a_1 = b_1,$$
$$a_r = b_r K_r^1 - b_{r-1} K_{r-1}^1 + \ldots + (-1)^r b_2 K_2^1.$$

Cela posé, il prouve que, si la fonction $\Omega(x)$ est développable en série de puissances négatives entières de x, son développement est fourni par la série S_n : dans le cas contraire, cette série fournit, pour la fonction $\Omega(x)$, une représentation asymptotique qui est certainement valable pour tous les points très éloignés du domaine de convergence de la série (1), à l'exception peut-être des points situés sur l'axe des nombres négatifs.

Voici un autre moyen d'arriver au même résultat : Toute fonction $\Omega(x)$, développable en série de factorielles de la forme (1), peut être représentée par une intégrale

$$\Omega(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-tx} dx,$$

où $f(t)$, holomorphe aux environs de $t = 0$, est développable en série de Taylor

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} + R_n(t),$$

les a_n étant déterminés comme précédemment. On aura identiquement

$$\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \int_0^\infty R_n(t) e^{-tx} dt.$$

Si donc le développement de $\Omega(x)$ en série de puissances négatives entières de x est possible, cette formule le donnera ; dans le cas contraire, elle fournira la série asymptotique de $\Omega(x)$.

Inversement, l'application formelle de la méthode de Stirling à la série asymptotique S permettra d'en déduire le développement de $\Omega(x)$ en série de factorielles de la forme (1) si ce développement est possible ; sinon on obtiendra la série de factorielles asymptotique de $\Omega(x)$, qui sera valable généralement dans le domaine où la série S l'est elle-même.

Après avoir établi ces trois théorèmes, l'auteur en fait l'application aux deux *fonctions de Binet*

$$\omega(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi},$$

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2x} - D_x\omega(x) = \log x - \Psi(x),$$

et enfin à la fonction

$$\zeta(x) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Hadamard. — Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (premier Mémoire). (535-556).

Introduction. — L'existence, pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, de solutions présentant en un point arbitraire une singularité de nature déterminée, solutions qu'on peut appeler *fondamentales*, a été découverte par M. Picard dans des travaux bien connus et démontrée d'une manière explicite en ce qui concerne les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x, y) u = 0.$$

Le cas général (les coefficients étant toutefois supposés analytiques) a été traité en même temps par MM. Hilbert et Hedrick et par nous-même....

Les premières recherches de cette nature qui aient été faites pour un nombre de variables supérieur à deux sont dues à M. Fredholm. Elles sont spéciales aux équations à coefficients constants, dans lesquelles il n'intervient que des dérivées toutes de même ordre. Mais cet ordre peut être quelconque.

Il sera intéressant d'étendre au cas général, où les coefficients sont variables, les résultats de forme si remarquable obtenus par M. Fredholm. Nous nous bornerons ici, comme dans une Note précédemment présentée à l'Académie des Sciences et dont le présent travail constitue le développement, au cas le plus simple, celui d'une équation du second ordre.

Celui-ci (où les solutions de M. Fredholm se réduisent au potentiel ordinaire) a fait, peu de temps avant la Note dont je viens de parler, l'objet d'un travail de M. Holmgren, lequel a obtenu les solutions de la forme $u = \frac{1}{r}$ pour les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + lu = 0.$$

On a ainsi une généralisation étendue du potentiel newtonien.

Rappelons toutefois que l'équation ainsi traitée par M. Holmgren ne représente pas la forme générale d'une équation linéaire du second ordre. Une telle équation étant donnée, il n'existe aucun choix de variables qui permette d'y rendre constants les coefficients des dérivées secondes.

La méthode que je vais exposer permet de combler cette lacune et de déterminer la solution fondamentale pour une équation quelconque. Toutefois, comme elle est, au fond, la généralisation de celle à laquelle j'ai fait allusion pour le cas de deux variables, nous serons obligés de supposer les coefficients analytiques.

Si l'on tient compte des valeurs imaginaires des variables, les potentiels et les intégrales analogues de M. Holmgren sont infinis, non seulement en un point réel, mais sur tout le cône isotrope qui a pour sommet ce point.

La surface qui, dans le cas général, remplace ce cône isotrope, est aisée à indiquer immédiatement : c'est le conoïde caractéristique qui a pour sommet le point considéré. Si $\Gamma = 0$ est l'équation de cette surface, la solution est infinie comme une puissance (non entière positive) de Γ....

Fréchet (*Maurice*). — Sur les fonctions de lignes fermées. (557-571).

La Physique mathématique conduit à l'étude de fonctions beaucoup plus générales que les fonctions *ordinaires* qui dépendent de la valeur d'une ou de plusieurs variables : ce sont des expressions qui ne sont déterminées que par la connaissance de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions *ordinaires*. M. Volterra a défini et étudié les plus simples de ces *fonctions de lignes fermées*.

M. Fréchet se propose d'étendre les résultats de M. Volterra. Il considère des fonctions U_L dont la valeur varie seulement avec la forme d'une ligne L fermée, plane ou gauche, appartenant à une famille (G) qui dépend d'un paramètre. Dans ces conditions, qu'il précise entièrement, on peut parler de la variation première δU_L qui dépend de la famille (G) considérée. On appellera

fonction de Volterra ou fonction ($\mathcal{V}$) toute fonction telle que l'on ait

$$\delta U_L = \int_L (U'_x \delta x + U'_y \delta y + U'_z \delta z)\, ds,$$

U'_x, U'_y, U'_z étant des quantités déterminées en chaque point M de la ligne fermée L dont ds est l'élément d'arc. Ces fonctions possèdent la propriété que M. Volterra a prise pour définition. Seront dites *fonctions* ($\mathcal{V}$) *du premier degré* les intégrales

$$I = \int_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

fonctions ($\mathcal{V}$) *simples* les fonctions *ordinaires* d'une seule fonction ($\mathcal{V}$) du premier degré.

Les fonctions simples sont les seules fonctions ($\mathcal{V}$) qui vérifient l'équation fonctionnelle

$$U_{L+1} = \varphi(U_L, U'_L),$$

φ étant une fonction *ordinaire* (continue et dérivable) de U_L et U'_L. L'auteur généralise encore d'autres résultats de M. Volterra et établit notamment les conditions d'existence d'une fonction U_L déterminée par ses *dérivées linéaires* U'_x, U'_y, U'_z, ainsi que le caractère distinctif des fonctions ($\mathcal{V}$) du premier degré.

L. R.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

5e série, tome VI; 1900 [1].

Appell (Paul). — Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique. (5-40).

Un système matériel peut être assujetti à deux sortes de liaisons, A et B.

A. Soient d'abord des liaisons exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points : en vertu de ces liaisons, les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque m du système peuvent être exprimées en fonction de h paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_h$ et du temps t.

B. Entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_h$, qui sont de véritables coordonnées, et d'autres paramètres $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$, au nombre de s, on établit des rela-

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX$_2$, p. 36.

tions différentielles non intégrables au nombre de $p - s$

$$A_{i1}\,dq_1 + A_{i2}\,dq_2 + \ldots + A_{ih+s}\,dq_{h+s} + A_i\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

les coefficients A_{ij} et A_i sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_{h+s}, t$. Si $p = s$, ces relations doivent être considérées comme définissant les nouveaux paramètres introduits et n'imposent aucune liaison nouvelle au système. Si $p > s$, ces relations définissent les nouveaux parametres et, de plus, imposent au système $p - s$ liaisons nouvelles; $p - s$ est au plus égal à $h - 1$.

Si, dans le systeme ci-dessus, on remplace les d par des δ (en faisant $\delta t = 0$), on a les relations qui lient les variations virtuelles des anciens paramètres à celle des nouveaux. On peut donc, en désignant par n la différence positive

$$n = h + s - p,$$

considérer n de ces variations, par exemple $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$, comme arbitraires et exprimer les p autres en fonction de celles-là.

Pour obtenir les équations du mouvement, on calculera la somme

$$\Sigma m(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z''\,\delta z)$$

qui se mettra sous la forme

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_n\,\delta q_n,$$

puis la fonction S introduite par M. Appell

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2,$$

où J est l'accélération absolue du point m. On exprimera S à l'aide des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et de leurs dérivées premières et secondes, en ayant soin de n'y laisser figurer d'autres dérivées secondes que celles des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ regardés comme independants. Puis on ecrira les n equations

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i''} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il n'y aura plus qu'à leur associer les p équations écrites au début pour avoir le systeme différentiel qui définit les $n + p$ paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ en fonction de t.

Cette forme nouvelle des équations de la Dynamique est plus générale que la forme à laquelle s'est arrêté Lagrange : 1° les equations actuelles sont applicables à tous les genres de liaisons, même aux liaisons qui, comme les roulements, s'expriment par des relations differentielles non intégrables; 2° elles s'appliquent encore quand, au lieu de définir la position d'un système par de veritables coordonnées, on emploie des parametres lies aux coordonnées par des relations différentielles non integrables.

L'auteur en expose diverses applications, relatives au mouvement plan d'un point matériel en coordonnées polaires, au mouvement d'un solide qui se meut parallelement à un plan fixe, ou qui a un point fixe.

Une proposition tout à fait analogue au theoreme de Konig sur la force vive d'un système permet de former les équations du mouvement d'un solide entièrement libre.

M. Appell traite en terminant le mouvement d'un corps de révolution homogène et pesant assujetti soit à glisser sans frottement, soit à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe.

Duport (*H.*). — Sur les équations aux dérivées partielles. (41-46).

L'auteur a étudié précédemment (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1897) le système des deux équations de Pfaff

$$(1) \qquad \Sigma a_i\, dx_i = 0, \qquad \Sigma b_i\, dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

où les coefficients a_i et b_i sont des fonctions quelconques des variables x_i.

Ce système présente un intérêt particulier dans le cas où les variables qui restent arbitraires sont au nombre de deux, car il constitue un système intermédiaire entre les équations du premier ordre et celles du second; en outre, il est approprié à l'examen des cas où l'on peut trouver les solutions à l'aide d'équations différentielles ordinaires.

Dans la présente Note, M. Duport expose deux cas nouveaux d'intégration du système (1). Le premier renferme, en particulier, l'équation de Laplace dans le cas le plus général; l'autre est celui où l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle revient le système (1) possède deux systèmes de caractéristiques confondus.

Zaremba (*S.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. (47-72).

Les fonctions harmoniques sont celles que M. Poincaré a considérées dans son Mémoire : *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894).

M. Zaremba considère une surface fermée (S), qui peut se composer de plusieurs nappes séparées et qui admet en chacun de ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe. Soit (D) le domaine limité par la surface (S). Toute fonction $f(x, y, z)$, si elle s'annule sur (S) et si Δf existe, est développable en une série uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (D), procédant suivant des fonctions dont chacune est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions harmoniques. Tel est le théorème de M. Zaremba.

Pour le démontrer, l'auteur commence par intégrer l'équation

$$\Delta v - \xi v = 0;$$

son analyse a l'avantage de fournir une démonstration très simple et très générale du principe de Dirichlet. Il étudie ensuite certaines intégrales analogues à celles de M. Schwarz et prouve la possibilité du développement annoncé.

Stéphanos (*Cyp.*). — Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. (73-128).

La théorie des substitutions linéaires a donné naissance à un calcul symbolique, à multiplication associative, qui offre de grands avantages pour l'étude

des formes bilinéaires et des formes quadratiques. M. Frobenius a exposé ce calcul d'une façon systématique, en employant la notion de *composition* des formes bilinéaires.

M. Stéphanos donne à ce calcul une double extension en introduisant, conjointement avec la composition (ordinaire) des formes bilinéaires, deux autres opérations qu'il nomme *conjonction* et *composition bialternée* des formes bilinéaires.

Parmi les résultats de son travail, il convient de remarquer ceux qui se rapportent à la théorie de l'élimination, entre autres, la solution générale des deux problèmes suivants :

I. Étant données deux équations

$$f_1(\xi) = \xi^m + a_1\xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0,$$
$$f_2(\eta) = \eta^n + b_1\eta^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\eta + b_n = 0,$$

et une fonction entière

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma}\xi^\rho\eta^\sigma,$$

représenter par un déterminant d'ordre mn le résultat de l'élimination de ξ et η entre les trois équations

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0.$$

II. Étant donnée une équation

$$f(\xi) = \xi^m + a_1\xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière symétrique φ des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ $(s \leq m)$, former l'équation de degré C_m^s dont les racines sont les C_m^s valeurs que la fonction φ acquiert pour les diverses combinaisons des racines de $f(\xi) = 0$ prises s à s.

A signaler encore la solution de cet autre problème :

Trouver toutes les substitutions linéaires entre les mn éléments d'un tableau à m lignes et à n colonnes, qui établissent des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre de ce tableau.

Picard (Émile). — Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé. (129-140).

L'auteur commence par établir le théorème suivant :

Le contour C *étant régulièrement analytique et la fonction* $f(x, y)$ *étant continue ainsi que ses dérivées* f'_x *et* f'_y *si l'on a, dans* C *et sur* C,

$$|f| < F, \qquad |f'_x| < F, \qquad |f'_y| < F_1,$$

F *et* F_1 *étant deux constantes, l'intégrale* v *de l'équation*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y)$$

qui s'annule sur C *possède des dérivées premières et secondes continues dans* C *et sur* C, *et l'on a*

$$|v| < \lambda F, \qquad |v'_x| < \mu F_1, \qquad |v'_y| < \mu F_1,$$
$$|v''_{xx}| < \lambda_1 F + \mu_1 F_1, \qquad |v''_{xy}| < \lambda_1 F + \mu_1 F_1.$$

λ, μ, λ_1 *et* μ_1 *sont des constantes positives qui dépendent uniquement du contour* C *et nullement de la fonction* $f(x, y)$. *Les trois constantes* λ, μ *et* μ_1 *sont très petites si le contour est très petit; la quatrième constante* λ_1 *garde une valeur finie, mais non très petite.*

M. Picard passe ensuite à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

dont il a précédemment trouvé l'intégrale continue assujettie à prendre des valeurs données *sur un contour* γ *régulièrement analytique suffisamment petit*. Il précise les conditions sous lesquelles sa solution est valable : d'abord a, b, c sont continues et admettent des dérivées partielles du premier ordre, elles-mêmes continues; de plus, *la succession des valeurs données sur le contour forme une fonction continue admettant des dérivées des trois premiers ordres.*

Gordan. — Les invariants des formes binaires. (141-156).

Autonne (*Léon*). — Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati. (157-214).

On peut se proposer de former toutes les équations algébriques h_n de degré n :

$$f(x) = x^n + A_1(t)x^{n-1} + \ldots + A_n(t) = 0$$

dont les n racines x vérifient une même équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = B_0(t) + B_1(t)x + B_2(t)x^2.$$

D'abord les rapports anharmoniques formés avec quatre racines sont constants; d'où le nom d'*anharmoniques* par lequel M. Autonne désigne les équations h_n.

En outre, le groupe G de h_n (au sens de Galois) sera très particularisé entre les n lettres x_i. Pour définir le groupe G, l'auteur considère comme quantités rationnelles : 1° toutes les constantes; 2° les coefficients $A_i(t)$ de h_n. Sous le bénéfice de ces conventions, il suppose h_n irréductible et G transitif.

La théorie des anharmoniques h_n est fondée sur celle des groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, constitués par les substitutions

$$\left| z, \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \right.$$

groupes qui ont été construits par MM. Jordan, Klein et Gordan. Elle repose, en effet, sur les deux propositions fondamentales que voici :

THÉORÈME I. — *Le groupe G de h_n est isomorphe sans hemiedrie a un groupe S.*

THÉORÈME II. — *Toute h_n est de la forme $F(x, T) = 0$, où le polynome F, à deux arguments, est à coefficients numériques qui ne dépendent que de S; T est une fonction rationnelle de la variable t; la relation entre x et T est du genre zéro.*

Ainsi, il n'intervient dans h_n qu'*une seule* fonction T de t. Les A s'expriment rationnellement en fonction de T, comme T en fonction de A. Les équations h_n se répartissent en un nombre fini, et même assez restreint, de types dont la construction effective et explicite peut être poursuivie jusqu'au bout.

Après avoir donné le moyen de former toutes ces equations, M. Autonne applique ses règles générales à la construction de toutes les anharmoniques du quatrième et du cinquième degré, qu'il avait déterminées directement dans un autre travail (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, 1900).

Duhem (*P.*). — Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch. (215-259).

Introduction. — Tout le monde connait les équations des petits mouvements d'un solide isotrope, équations qui régissent aussi, comme l'a démontré Helmholtz, la propagation des flux de déplacement dans les milieux diélectriques. On sait également que Clebsch a donné aux intégrales de ces équations une forme extrêmement utile en ce qu'elle decompose le petit mouvement le plus général d'un solide isotrope en un petit mouvement *longitudinal*, dénué de *rotation*, et un petit mouvement *transversal*, dénué de *dilatation*, chacun de ces petits mouvements dépendant de la classique équation du son. Malheureusement, la démonstration sommaire donnée par Clebsch laisse peut-être quelque place au doute.

Dans notre enseignement de la Faculte des Sciences de Bordeaux, nous avons donné du theoreme de Clebsch une demonstration tres elémentaire qui nous semble rigoureuse.

Cette démonstration s'étend sans peine et permet d'appliquer le théorème de Clebsch a un type tres général d'equations aux dérivées partielles simultanees. Ce type comprend, comme cas particuliers, non seulement les equations des petits mouvements des solides isotropes, mais encore les équations des petits mouvements adiabatiques des fluides compressibles visqueux; d'ailleurs, ces deux categories d'equations sont d'un interêt tres général en Physique : la première categorie régit, hors du domaine de l'electricite, la propagation d'une perturbation électrique dans un milieu dielectrique; la seconde n'a pas cours seulement en Hydrodynamique : c'est d'elle que depend le flux électrique au sein d'un conducteur immobile. Enfin, ces deux catégories peuvent être regardées comme deux cas particuliers d'une catégorie plus générale, dont dépend le champ électrique dans un corps a la fois conducteur et dielectrique; a cette catégorie s'appliquent également les considérations suivantes.

Maillet (*Edm.*). — Sur les équations indéterminées à deux et

trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. (261-277).

On se propose de résoudre en nombres entiers les équations du type

$$(1) \qquad F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0,$$

où les fonctions φ sont des polynomes homogènes en x et y de degré égal à leur indice et à coefficients entiers. On suppose d'ailleurs que $F(x, y)$ est arithmétiquement irréductible, c'est-à-dire que ce polynome n'est divisible par aucun polynome de degré moindre.

Certaines des équations (1) n'ont qu'un nombre limité de solutions; d'autres en ont une infinité. On connaît des exemples d'équations de l'une et l'autre classe, dans le cas où $n = 2$. Quand n dépasse 2, l'équation (1) n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers si l'équation $\varphi_n(1, c) = 0$ n'a que des racines imaginaires.

Dans le présent Mémoire, M. Maillet démontre l'existence de nouvelles catégories d'équations (1) n'admettant qu'un nombre limité de solutions. Cette existence découle du théorème suivant :

Si c_1 est une racine simple réelle et différente de zéro de $\varphi_n(1, c)$ et si $\psi_k(1, c)$ est un facteur irréductible de degré $k = n$ de $\varphi_n(1, c)$, qu'on suppose exister et qui admette la racine c_1, l'équation indéterminée (1) ne peut avoir, sur la branche infinie de la courbe $F(x, y) = 0$ dont l'asymptote a pour coefficient angulaire c_1, un nombre infini de solutions en nombres entiers que si l'une des quantités

$$\varphi_{n-1}(1, c_1), \quad \varphi_{n-2}(1, c_1), \quad \ldots, \quad \varphi_2(1, c_1)$$

est différente de zéro.

Les conclusions auxquelles cette proposition donne lieu s'étendent aux équations indéterminées à trois variables.

Humbert (G.). — Sur les fonctions abéliennes singulières (deuxième Mémoire). (279-386).

« Dans un premier Mémoire, inséré au Tome V (5e série) de ce Journal, j'ai commencé, dit l'auteur, l'étude des fonctions abéliennes à deux variables que j'ai nommées *singulières :* ce sont celles qui admettent pour périodes normales les quantités

$$1, \quad 0, \quad g, \quad h,$$
$$0, \quad 1, \quad h, \quad g',$$

liées par une *relation singulière,* c'est-à-dire de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

Le présent Mémoire continue la même étude, dans les domaines de la transformation et de la multiplication complexe.

» Les fonctions abéliennes singulières admettent des transformations qui n'existent pas dans le cas général, et que je nomme *singulières,* par oppo-

sition aux transformations *ordinaires* de M. Hermite; la première Partie du Mémoire est consacrée à la recherche de ces transformations, à leur réduction, à la transformation des fonctions thêta et des fonctions intermédiaires singulières.

» La seconde Partie s'applique aux transformations singulières du premier degré, dont je détermine complètement la forme générale; on y voit apparaître ce résultat curieux et inattendu que deux systèmes de fonctions abéliennes, liés par une transformation (singulière) de degré 1, n'ont pas toujours les mêmes modules : sous forme géométrique, c'est dire que deux surfaces hyperelliptiques, ayant des modules différents, peuvent se correspondre point par point.

» Dans la troisième Partie est posé et résolu le problème de la multiplication complexe, considérée comme un cas particulier de la transformation : il s'agit de rechercher les fonctions abéliennes telles qu'une transformation convenable leur fasse correspondre des fonctions aux mêmes périodes. Nous trouvons ainsi que les fonctions singulières possèdent seules une multiplication complexe; à côté des fonctions simplement, doublement ou triplement singulières, et de fonctions réductibles à des fonctions elliptiques particulières, nous rencontrons d'intéressantes fonctions, simplement singulières, dont les périodes vérifient, en outre, deux relations quadratiques.

» Ce sont là les seuls cas de multiplication complexe; nous les étudions avec détail, en indiquant toutes les multiplications correspondantes dans les cas les plus intéressants.

» La quatrième et dernière Partie, enfin, traite des multiplications de degré 1, c'est-à-dire des transformations birationnelles des surfaces hyperelliptiques en elles-mêmes; nous y démontrons qu'en dehors des correspondances évidentes $U = \pm u + c$, $V = \pm v + c'$, toutes les transformations cherchées dérivent de l'existence de relations singulières entre les périodes et se déterminent dès lors aisément; il n'y a d'exception que pour les surfaces attachées au radical $\sqrt{x^5+1}$, dont le Chapitre final énumère complètement les transformations univoques. »

Le Roux (*J.*). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. (387-422).

On sait que les équations aux dérivées partielles du premier ordre et les équations linéaires à deux variables indépendantes d'un ordre quelconque peuvent être, en général, intégrées complètement quand on connaît une ou plusieurs intégrales particulières satisfaisant à des conditions déterminées.

C'est à ce point de vue que l'auteur se place pour étudier le problème général de l'intégration. Il cherche à déterminer un nombre limite d'intégrales particulières dont on puisse déduire toutes les autres par un moyen régulier, et auxquelles il donne, pour cette raison, le nom d'*intégrales primitives* ou *principales*. Les équations du premier ordre admettent comme *intégrales primitives* leurs *intégrales complètes*. Pour les équations linéaires du second ordre à deux variables indépendantes, M. Darboux a obtenu (*Théorie des surfaces*, t. II), par la généralisation d'une idée de Riemann, une *intégrale primitive* fort simple. Dans deux Mémoires précédents (*Annales de l'École Normale*, 1895; *Journal de Mathématiques*, 1898), M. Le Roux a fait voir qu'à côté de cette intégrale primitive il en existe une infinité d'autres dont la détermination dépend d'une fonction arbitraire d'une variable et il a étendu cette

notion aux équations linéaires d'ordre quelconque *à deux variables indépendantes*.

Ici, il étend aux équations linéaires à *plusieurs variables indépendantes* la notion des intégrales primitives et le mode de représentation qu'elles fournissent. Il ramène l'intégration de ces équations à la détermination d'une intégrale complète de l'équation des caractéristiques et au calcul d'une ou plusieurs intégrales particulières primitives correspondantes : la connaissance de ces deux éléments permet de représenter toutes les solutions de l'équation proposée au moyen d'intégrales à $(n-1)$ dimensions et à limites variables.

Si, partant des formules obtenues, on veut déterminer les éléments qui y figurent de manière à vérifier certaines conditions initiales, on est conduit à un problème d'inversion d'intégrale multiple. M. Le Roux a traité complètement ce problème dans un cas simple, ce qui l'a conduit à une généralisation intéressante de la notion de dérivée.

Lindelöf (*Ernst*). — Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles. (423-441).

L'auteur considère d'abord un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où la variable x ainsi que la fonction y sont réelles, et il étudie ses solutions générales

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

envisagées comme fonctions des valeurs initiales $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$.

Il traite ensuite des équations de même forme, mais en supposant que leurs seconds membres dépendent en outre d'un paramètre μ, et, désignant par

$$y_i = \varphi_i(x, \mu)$$

les équations de la courbe intégrale (dans une variété à n dimensions) qui passe par un point déterminé, il étudie les fonctions φ du paramètre μ. Cette courbe intégrale est ce que M. Lindelöf appelle *la caractéristique*.

Les théorèmes qu'il établit jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'Analyse, notamment dans le calcul des variations et l'étude *qualitative* des courbes définies par des équations différentielles (Poincaré). Pour donner toute leur portée aux propositions de cette espèce, il importe de les démontrer, et c'est ce qu'a fait l'auteur, pour tout domaine où les caractéristiques sont continues et où les équations différentielles satisfont aux hypothèses sur lesquelles repose le raisonnement. C'est pourquoi la méthode suivie par M. Lindelöf paraît préférable aux démonstrations données antérieurement, qui ne s'appliquaient qu'à des domaines assez restreints et conduisaient à des résultats moins étendus et moins précis.

Bien que l'auteur n'ait raisonné que sur des éléments réels, la méthode qu'il a adoptée permet d'étendre immédiatement les théorèmes obtenus au cas des fonctions analytiques d'une variable complexe.

L. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIX; 1905. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3e série. T. XX, XXI, 1903. 1904. — 19-36. 191-204.

Archiv der Mathematik und Physik. T. IV, 1903. — 160-169.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXXVIII, CXXXIX, 1904. — 98-110.

Comptes rendus de la Société mathématique de Berlin, 1903. — 169.

Journal de Mathématiques pures et appliquées. 5e série. T. V, VI, 1899. 1900. — 36-45. 204-210.

Mathematische Annalen. T. XLIV-XLVII, 1894-1896. — 56-98.

Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e Lettere, 2e série. T. XXVIII-XXXI, XXXII, XXXIII, 1895-1898. 1899-1900. — 5-16. 170-176.

The Quaterly Journal of pure and applied Mathematics, T. XXXI, XXXII, 1900. 1901. — 46-56.

Transactions of the American mathematical Society, T. I-IV, 1900-1904. — 176-190.

Verhandelingen der k. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. T. IV-VIII. 1901-1904. — 157-160.

Verslag van de gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der k. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. T. IX-XII, 1900-1904. — 115-160.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Alezais (R.). 197.
Allardice (R.). 185.
Amati (A.). 18, 19.
Amaldi (U.). 175.
Appell (P.). 161, 167, 204.
Aschieri (F.). 170.
Ascoli (G.). 12.
Autonne (L.). 208.
Backuis Roozeboon. 136.
Backuyzen (E. van de Sande). 114, 131, 134, 146.
Bakka (G.). 117.
Baker (H.-F.). 67.
Bardelli (G.). 12, 15, 172.
Barnes (E.). 50.
Bassi (A.). 11, 12.
Baur (L.). 76.
Beke (E.). 70, 86, 94.
Beinganum (M.). 114.
Beltrami (E.). 10, 15.
Bernstein (E.). 103, 110.
Bertini (E.). 14, 160.
Berzolari (L.). 175.
Bes (K.). 125, 158, 159.
Beudon (J.). 44.
Beyel (C.). 166.
Blake (E.). 179.
Blichfeldt (H.). 180, 181, 184, 187, 189, 190.
Bliss (G.). 183, 188, 190.
Blythe (W.). 55.
Bôcher (M.). 177, 179, 180, 182, 183.
Bois (H. du). 129, 141.
Bolza (O.). 177, 181, 184.
Borel (E.). 98, 100.
Boussinesq (J.). 42, 98, 99, 100, 104, 109, 110.
Boutroux (P.). 102, 106, 108, 109.
Brill (J.). 54.
Bromwich (T.). 188, 189.
Brouwer (L.). 152, 154, 155.
Brown (E.). 183, 186, 187, 189.
Burali-Forti (C.). 88.
Busche (E.). 89.
Cajori (F.). 179.
Campbell (D.). 48.
Campbell (J.). 178.
Cantor (G.). 83.
Cardinaal (J.). 131, 136, 139, 152.
Cartan (E.). 195.
Castelnuovo (G.). 59.
Cavazoni (L.). 171.
Cazzaniga (T.). 14, 16, 17, 18, 174.
Celoria (G.). 174, 175.
Cerri (A.). 11.
Chauveau (A.). 105, 106, 107, 108, 110.
Chessin (A.). 177.
Clairin (J.). 107.
Clintoch (E. Mc). 183.
Coble (A.). 185.
Cohn (F.). 64.
Cole (F.). 189.
Coolidge (J.). 178 186.
Considère. 103.
Cotton (E.). 23.
Crémieu (V.). 102, 104.

Crocco (G.). 112.
Crotti (F.). 6.
Darwin (G.). 186.
Demoulin (A.). 99, 109.
Desaint (L.). 200.
Dickson (L.). [illegible], 50, [illegible], 178, 180, 181, 182, 183, 185, 187, 188.
Dina (A.). 170, 174.
Donald (J. Mc). 182.
Duhem (P.). [illegible], 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 209.
Duport (H.). 206.
Easton. 158.
Egorov (T.). 102.
Eisenhart (L.). 183, 189.
Elliot (E.). 49.
Emch (A.). 180.
Enriquez (F.). [illegible], 70.
Epsteen (S.). 186, 187, 188.
Everdingen (E. van). 114.
Everett (J.). 51, 55.
Fano (G.). 172.
Fatou. 10[illegible], 111, 112.
Feder (J.). 93.
Ferrini (R.). 5, 16, 173.
Fields (J.). 180.
Filon (L.). [illegible].
Findlay (W.). 189.
Ford (W.). 186.
Fournier (vice-amiral), 111.
Frankl (J.). [illegible]
Fréchet (M.). 11[illegible], 120, 20[illegible].
Fricke (R.). 58, 65, 96.
Gale (A.). 184.
Gall (Fr. von). 68.
Gegenbauer (L.). 115, 1[illegible], 192.
Gleich (D.). 175.
Glaisher (J.). [illegible], 48, [illegible], [illegible], 51, 54, 55.
Goblot (U.). 14, 171.
Godt (W.). 96.
Goursat (E.). 177, 188.
Gordan (P.). 73, 87, 177, 179, 208.
Graf (J.-H.). 69, 165.
Griend (van de). [illegible].
Guichard (C.). 21, 99, 101.
Güntsche. 169.
Guradze (H.). 167.
Hadamard (J.). 202.
Haentzschel (E.). 162.
Happel (H.). 146.
Hardy (G.). 52, 55.
Hartmann (C.). 113.
Haskins (C.). 182, 185, 188.
Hataney (A.). 182.
Hawkes (H.). 184.
Heffter (L.). 168.
Heilbronner (P.). 11[illegible]
Henry (C.). 107
Hensel (K.). 75.
Hermes (J.). 72, [illegible].
Hervé (H.). 108.
Hilbert (D.). 56, 71, 77, 180.
Hill (G.). 178.
Hocevar (F.). 102.
Hölder (G.). 81.
Horn (J.). 164.
Hoyer (P.). 86, 89, 90.
Humbert (G.). [illegible], 73, [illegible].
Hun (J.). 188.
Huntington (E.). 18[illegible], 18[illegible], 189.
Hurwitz (A.). 58, 65, 66, 79, 80.
Hutchinson (J.). 179, 182, 190.
Jacob. 112.
Jahnke (E.). 155.
Jessop (C.). 51, 55.
Jolles (S.). 163.
Jordan (C.). 101.
Jouguet (E.). 102, 108, 110.
Juel (C.). 89.
Julius (W.). 146.
Junker (F.). 65.
Kam (N.). 157.
Kamerling Onnes (H.). 114, 1[illegible], 149, 154.
Kantor (S.). 5.
Kapteyn (W.). [illegible], 11[illegible], 124, 125, 127, 1[illegible], 147, 149.
Kasner (E.). 179, 185, 186, 188.
Keesom (W.). 127, 134.
Kempinski (S.). 96.
Klein (F.). 68, 76.
Kluyver (J.). 119, 1[illegible], 129, 136, 143, 147.
Kœnigsberger (L.). 57.
Kohn (G.). 81, 168
Kohn (H.). 168
Kohnstamm (P.). 155, 156.
Korn (A.). 22.
Korselt (A.). 60.
Korteweg (D.). 115, 128, 134.
Kneser (A.). 74, 95.
Knoblauch (J.). 169.

Krause (M.). 167, 178.
Krazer (A.). 82.
Kühne (H.). 168.
Kürschaal (J.). 56.
Laar (J. van). 132, 146.
Laussedat (A.). 105, 109.
Landau (E.). 169.
Leau (L.). 44, 110.
Lebert (E.), 106.
Lebesgue (H.). 30, 107.
Lecornu (L.). 101, 105.
Lehmer (D.). 184
Lerch (M.). 45, 103.
Le Roux. 211.
Le Vavasseur (R.) 112.
Levi-Civita (T.). 6, 7, 11.
Lévy (H.). 101, 112.
Lilienthal (R. von). 63.
Lindelöf (E.). 212.
Ling (G.). 55.
London (F.). 62, 75.
Lœwy (A.). 185, 186, 188.
Lorentz (H.). 116, 118, 132, 133, 137, 156.
Loud (F.). 178.
Lüroth (J.). 64.
Macaulay (F.). 189.
Mäennchen (P.). 168.
Maillard (L.). 109.
Maillet (E.). 31, 42, 100, 102, 103, 209.
Majcen (G.). 162, 168.
Manning (W.). 187.
Marchi (L. de). 17.
Markoff (A.). 97.
Mathews (G.). 54.
Maschke (H.). 177, 178, 184, 187.
Mason (M.). 189.
Martin (E.). 108.
Mascart (J.). 112.
Maurer (L.). 91.
Mesnager (M.). 99.
Metzeler (W.). 181.
Merrill (H.). 187.
Mertens (F.). 181.
Michel (J.). 51.
Michell (J.). 52.
Miller (G.). 47, 49, 51, 55, 102, 177, 179, 181, 184, 186, 187.
Mittag-Leffler (G.). 102, 103.
Moehlenbrück. 105.
Montel (P.). 101.
Montesano (D.). 15.
Montessus de Ballore. 101.
Moore (E.). 177, 179, 181, 182, 183, 185.
Moreau (H.). 187.
Morley (F.). 177, 185, 187, 190.
Morton (W.). 49.
Moulton (F.). 177, 183.
Nekrassof (P.). 95.
Netto (E.). 81, 162.
Neuberg (J.). 166.
Niels Nielsen. 105, 106, 201.
Noether (M.), 83, 86.
Normand (J.). 100.
Ocagne (M. d'). 98.
Osgood (W.). 178, 180, 181, 186.
Oss (van). 126, 138.
Oster (B.). 161.
Oudemans (J.). 118.
Padé (H.). 112.
Painleve (P.). 106, 112.
Pannekoek (A.). 145.
Pascal (E.). 7, 14, 99, 175.
Pasch (M.). 58.
Pasquale (V. de). 170.
Pearson (K.). 48.
Peirce (J.). 189.
Pell (A.). 178.
Pellet (A.). 99.
Pérot (A.). 101, 112.
Picard (E.). 26, 32, 34, 36, 79, 85, 90, 99, 100, 107, 108, 111, 207.
Pieri (M.). 6, 18.
Pincherle (S.). 13, 15.
Pochhamer (L.). 87.
Poincare (H.). 102, 103.
Pompéiu (D.). 111.
Porter (M.). 179.
Potron. 109, 111.
Pourcel (A.). 98.
Prete (G. del). 15.
Pringsheim (A.). 57, 58, 62, 90, 160, 181.
Pringsheim (E.). 168.
Pupin (M.). 178.
Raffy (L.). 27, 107, 108.
Rejna (M.). 175.
Remoundos (G.), 106, 109.
Renard (C.). 104, 105, 106, 108, 110.
Renard (P.). 109.
Retali (V.). 173.
Réthy (M.). 74, 80.
Reye (T.). 82.

Richmond (W.). 47, 48, 50, 52, 54.
Riesz (F.). 110.
Rietz (H.). 90.
Riquier (C.). 20, 198.
Ritter (E.). 61, 74, 80, 90.
Roberts (R.). 54.
Roe (E.). 189.
Rosati (C.). 173.
Runge (C.). 63, 79.
Saalschütz (L.). 163.
Saltykow (N.). 45.
Scarpis (U.). 19.
Schaw (J.). 187, 189.
Schiaparelli (G.). 11.
Schilling (F.). 60, 76, 86.
Schlesinger (L.). 24, 103.
Schœler (H.). 163.
Schœnflies (A.). 54.
Schoute (P.). 115, 126, 134, 138, 141, 148, 150, 154.
Schmidt (C.). 71.
Schröder (E.). 78.
Schubert (H.). 68.
Schuh (F.). 155, 154.
Scott (C.). 54, 183, 184.
Severini (C.). 17, 18, 173, 176.
Somigliana (C.). 12, 13, 174.
Smith (P.). 179, 181.
Solvay (E.). 104, 107.
Sommerfeld (A.). 69, 93.
Stackel (P.). 65, 71, 80, 98, 162.
Stecker (H.). 180, 182.
Stein (J.). 127.
Stekloff (W.). 108.
Stephanos (C.). 206.
Stolz (O.). 182, 183.
Stringham (J.). 180.
Strong (W.). 180.
Study (E.). 92.
Taber (H.). 87, 190.
Taffoureau (E.). 109.
Tedone (O.). 171.
Tennant (J.). 55.
Thienemann (W.). 161.
Traynard. 100, 110.
Turksma (B.). 88.
Tzitzeica (G.). 101.
Vallée-Poussin (de la). 41.
Veblen (O.). 189.
Veneroni (E.). 16, 18, 171, 173.
Veronese (G.). 94.
Verschaffelt (J.). 136, 145, 148.
Versluys (W.). 145, 151, 158.
Vessiot (E.). 29, 191.
Visalli (P.). 5, 6, 13.
Vivanti (G.). 6, 14, 170, 171.
Vleck (van). 178, 181, 182, 183, 189.
Voes (F.). 128.
Volterra (V.). 111
Voronoi (G.). 196.
Voss (A.). 77, 78.
Vries (J. de). 114, 124, 125, 128, 132, 141, 143, 146, 151, 152, 159.
Waals (J. van der). 113, 114, 121, 131, 134, 135, 136, 138, 141, 145, 147.
Walker (G.). 49.
Wallenberg (G.). 166.
Weber (H.). 88, 164.
Weber (E. von). 64, 76.
Weeder (J.). 138.
Weinholdt (E.). 101.
Weiss (P.). 98.
Westland (J.). 186.
White (H.). 176, 177, 186.
Wiernsberger (P.). 105.
Wilczynski. 178, 179, 181, 182, 184, 186, 189, 190.
Williot (V.). 147.
Wilson (E.). 177.
Wimann (A.). 95, 99.
Winston (M.). 78.
Wolffing (E.). 165.
Young (J.). 183, 188.
Zakrzewski (C.). 154.
Zaremba (S.). 19, 206.
Zeuthen (H.). 91.
Zoretti (E.). 101, 105.
Zuze (H.). 162.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIX.

PARIS IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
36016 Quai des Grands Augustins, 55.

QA
1
B8
v.40

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY